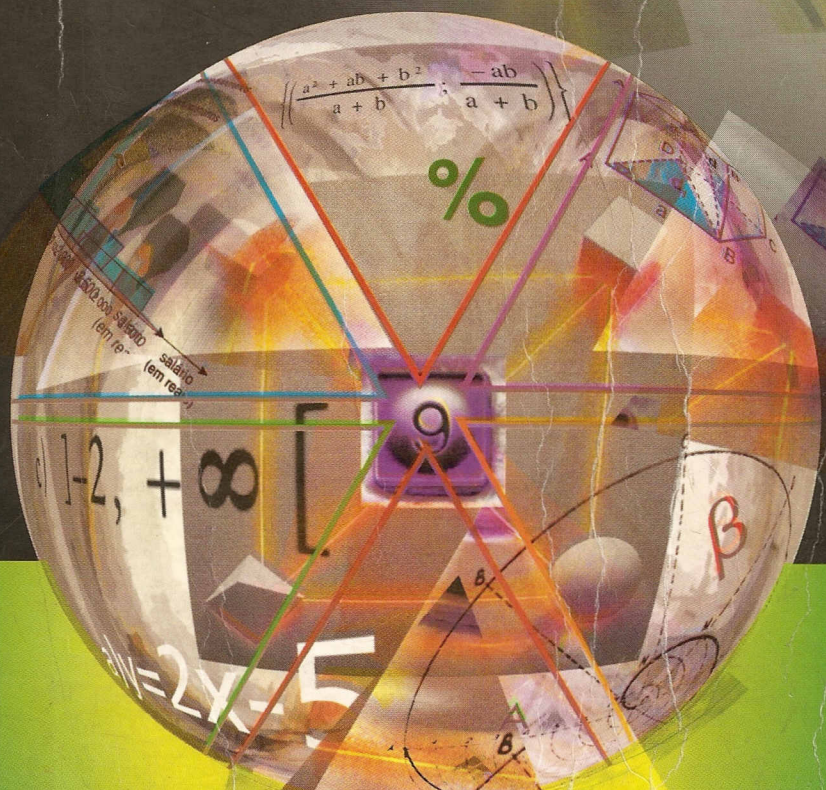
elson Iezzi
Osvaldo Dolce
David Degenszajn
Roberto Périgo



Matemática

volume único

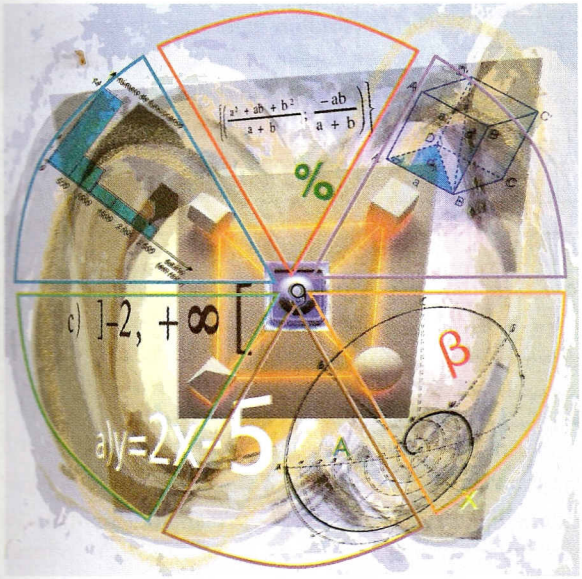
[11340011]

ATUAL
EDITORA

Apresentação

Os programas de Matemática do ensino médio são geralmente muito parecidos, só diferindo em alguns detalhes, como por exemplo a seqüência utilizada no estudo das funções elementares, a série em que a Trigonometria será tratada, a forma de abordar a Geometria, entre outros. Além disso, é grande a variação de carga horária das aulas de Matemática entre as escolas: algumas têm apenas duas aulas semanais, enquanto outras têm oito.

Já fizemos várias tentativas com o objetivo de o livro-texto de Matemática poder contemplar essas variações, mas sempre com sucesso relativo. Um livro por série, por exemplo, pode não atender ao programa de muitas escolas. Dividir o conteúdo a ser ensinado em uma coleção de livros por assunto implica a necessidade de se utilizar dois ou mais livros por série.



Com a obra *Matemática — volume único* pretendemos superar essas dificuldades. Em um só volume, professores e estudantes encontrarão os conteúdos usualmente tratados no ensino médio e poderão ordená-los da forma mais conveniente.

Nesta nova edição introduzimos várias alterações. Por solicitação de muitos colegas professores resolvemos:

- acrescentar dois assuntos: "poliedros", em Geometria, e "cônicas", em Geometria Analítica;
- mantido o capítulo sobre áreas, restringir a Geometria Plana ao estudo da semelhança e das relações métricas nos triângulos, assuntos necessários ao bom desenvolvimento da Trigonometria;
- aprofundar o capítulo de Probabilidades;
- ampliar substancialmente o capítulo de Estatística;
- atualizar os testes e exercícios com questões de vestibulares recentes e do Enem.

Procurando atender ao que preconizam os PCNs quanto à contextualização e à interdisciplinaridade, introduzimos, onde foi possível, problemas de aplicação e estudos que fazem uso de textos, gráficos e tabelas publicados em jornais e revistas de grande circulação no país.

Estamos certos de que esta obra merecerá a análise da classe docente de Matemática no ensino médio e esperamos despertar o interesse dos estudantes. Assim, estamos abertos a críticas e sugestões dos leitores, que poderão enviá-las à editora.

OS AUTORES.

Sumário

Parte 1 — ÁLGEBRA I

1 ○ CONJUNTOS NUMÉRICOS 3

1. Introdução 3
2. O conjunto $\mathbb{N}$ 3
3. O conjunto $\mathbb{Z}$ 4
4. O conjunto $\mathbb{Q}$ 6
5. O conjunto $\mathbb{I}$ 9
6. O conjunto $\mathbb{R}$ 9
7. Intervalos reais 12
8. Outro conjunto importante 14

Testes de vestibulares 14
Desafios 15

2 ○ FUNÇÕES 16

1. Introdução 16
2. Definição 18
3. Funções definidas por fórmulas 19
4. Domínio e contradomínio 21
5. Gráficos 22
6. Noções básicas de plano cartesiano 26
7. Construção de gráficos 27
8. Análise de gráficos 30

Testes de vestibulares 35
Desafios 38

3 ○ FUNÇÃO AFIM 39

1. Introdução 39
2. Definição 39
3. Gráfico 39
4. Coeficientes da função afim 42
5. Zero e equação do 1º grau 43
6. Crescimento e decrescimento 44
7. Sinal 45
8. Inequações 47

Testes de vestibulares 51
Desafios 54

4 ○ FUNÇÃO QUADRÁTICA 55

1. Introdução 55
2. Definição 55
3. Gráfico 56
4. Zeros e equação do 2º grau 57
5. Coordenadas do vértice da parábola 61
6. Imagem 62
7. Construção da parábola 63
8. Sinal 66
9. Inequações 68

Testes de vestibulares 73
Desafios 75

5 ○ FUNÇÃO MODULAR 77
1. Função definida por mais de uma sentença 77
2. Módulo de um número 80
3. Função modular 82
4. Gráfico 82
5. Imagem 82
6. Função composta 82
7. Funções compostas com a modular 84
8. Equações modulares 85
9. Inequações modulares 87
Testes de vestibulares 88
Desafios 91

6 ○ FUNÇÃO EXPONENCIAL 92
1. Potência de expoente natural 92
2. Potência de expoente inteiro negativo 93
3. Raiz n-ésima (enésima) aritmética 94
4. Potência de expoente racional 96
5. Função exponencial 97
Testes de vestibulares 106
Desafios 108

7 ○ LOGARITMOS 110
1. Introdução 110
2. Conseqüências 111
3. Sistemas de logaritmos 112
4. Propriedades operatórias 113
5. Utilização das propriedades 115
6. Mudança de base 117
Testes de vestibulares 118
Desafio 119

8 ○ FUNÇÃO LOGARÍTMICA 120
1. Introdução 120
2. Funções sobrejetoras 121
3. Funções injetoras 121
4. Funções bijetoras ou inversíveis 122
5. Função inversa 122
6. Função logarítmica 125
7. Equações exponenciais 131
8. Equações logarítmicas 132
9. Inequações exponenciais 135
10. Inequações logarítmicas 136
Testes de vestibulares 138
Desafios 141

9 ○ PROGRESSÕES 143
1. Seqüências numéricas 143
2. Progressões Aritméticas 145
3. Termo geral da P.A. 145
4. Notação especial 148

5. Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A. 150
6. Progressões Geométricas 152
7. Termo geral da P.G. 153
8. Trabalhando ao mesmo tempo com P.A. e P.G. 156
9. Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G. 157
10. Série geométrica convergente 159

Testes de vestibulares 161
Desafios 164

Respostas dos exercícios e testes 165

Parte 2 — MATEMÁTICA FINANCEIRA

10 ○ NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA 179

1. Razão e proporção 179
2. Porcentagem 180
3. Juros 188
4. Juros simples 188
5. Juros compostos 189

Testes de vestibulares 192
Desafios 195

Respostas dos exercícios e testes 197

Parte 3 — TRIGONOMETRIA

11 ○ SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS 199

1. Introdução 199
2. Triângulos semelhantes 200
3. Relações métricas no triângulo retângulo 204

Testes de vestibulares 208
Desafios 210

12 ○ TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO 211

1. Introdução 211
2. Razões trigonométricas 211
3. Relação fundamental I 214
4. Outra razão trigonométrica 216
5. Relação fundamental II 216
6. Ângulos notáveis 217

Testes de vestibulares 220
Desafios 223

13 ○ RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS 224

1. Introdução 224
2. Ângulos suplementares 224
3. Lei dos senos ou teorema dos senos 225
4. Lei dos cossenos ou teorema dos cossenos 227

Testes de vestibulares 229
Desafios 230

14 ○ FUNÇÕES CIRCULARES 232
1. Ciclo trigonométrico 232
2. Funções circulares 242
Testes de vestibulares 254
Desafios 256

15 ○ RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES 258
1. Relações fundamentais 258
2. Relações decorrentes 261
3. Identidades trigonométricas 262
Testes de vestibulares 264
Desafios 265

16 ○ TRANSFORMAÇÕES 266
1. Introdução 266
2. Fórmulas de adição e subtração 266
3. Fórmulas de multiplicação 269
4. Fórmulas de transformação em produto 272
Testes de vestibulares 274
Desafios 276

17 ○ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES 277
1. Equações elementares 277
2. Inequações elementares 283
Testes de vestibulares 287
Desafios 289

18 ○ RETOMANDO AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 290
1. Função seno 290
2. Função cosseno 294
3. Função tangente 297
4. As outras funções trigonométricas 299
Testes de vestibulares 300
Desafios 302

Respostas dos exercícios e testes 303

Parte 4 — ÁLGEBRA II

19 ○ MATRIZES 313
1. Introdução 313
2. Representação de uma matriz 314
3. Matrizes especiais 314
4. Igualdade de matrizes 316
5. Adição e subtração 317
6. Multiplicação de um número real por uma matriz ... 320
7. Multiplicação de matrizes 321
8. Matriz identidade 326
9. Matriz inversa 326
Testes de vestibulares 328
Desafios 330

20 ○ DETERMINANTES 331
1. Definição e regras práticas 331
2. Cofator 333
3. Teorema de Laplace 334
Testes de vestibulares 335
Desafios 336

21 ○ SISTEMAS LINEARES 337
1. Introdução 337
2. Equação linear 337
3. Sistema linear 338
4. Sistemas escalonados 340
5. Sistemas equivalentes e escalonamento 342
6. Sistemas homogêneos 347
7. Regra de Cramer 348
8. Discussão de um sistema 350
Testes de vestibulares 353
Desafios 355

22 ○ ANÁLISE COMBINATÓRIA 356
1. Introdução 356
2. Princípio fundamental da contagem 356
3. Fatorial de um número natural 359
4. Arranjos 361
5. Permutações 363
6. Combinações 366
7. Permutação com elementos repetidos 370
Testes de vestibulares 372
Desafios 374

23 ○ PROBABILIDADE 375
1. Introdução 375
2. Experimento aleatório 375
3. Espaço amostral 375
4. Evento 376
5. Probabilidades em espaços amostrais eqüiprováveis ... 377
6. Probabilidade da união de dois eventos 381
7. Probabilidade condicional 383
8. Probabilidade de dois eventos simultâneos (ou sucessivos) 385
9. Experimentos binomiais 388
Testes de vestibulares 390
Desafios 393

24 ○ BINÔMIO DE NEWTON 395
1. Introdução 395
2. Coeficientes binomiais 395
3. Triângulo de Pascal/Tartaglia 397
4. Somatório 399
5. Desenvolvimento de $(a + b)^n$ 400
6. Termo geral do binômio 403
Testes de vestibulares 404
Desafios 405

Respostas dos exercícios e testes 406

Parte 5 — ESTATÍSTICA

25 ○ ESTATÍSTICA 413

1. Introdução 413
2. Variável 413
3. Tabelas de freqüência 415
4. Representação gráfica 417
5. Medidas de centralidade 422
6. Medidas de dispersão 428

Testes de vestibulares 434
Desafios 437

Respostas dos exercícios e testes 438

Parte 6 — GEOMETRIA

26 ○ GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO 441

1. Introdução 441
2. Noções primitivas e postulados 441
3. Determinação de retas e planos 442
4. Posições relativas 444
5. Perpendicularidade 447
6. Projeções ortogonais sobre um plano 450
7. Distâncias geométricas 451
8. Ângulos 453

Testes de vestibulares 455
Desafio 456

27 ○ POLIEDROS 457

1. Introdução 457
2. Os poliedros 457
3. Relação de Euler 458
4. Poliedros de Platão 459
5. Poliedros regulares 461

Testes de vestibulares 462
Desafio 462

28 ○ ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS 463

1. Conceito 463
2. Área do retângulo 463
3. Área do quadrado 464
4. Área do paralelogramo 464
5. Área do triângulo 466
6. Área do trapézio 470
7. Área do losango 470
8. Área do polígono regular 471
9. Área do círculo 473

Testes de vestibulares 477
Desafios 481

29 PRISMA 482
1. Conceito 482
2. Elementos 482
3. Classificação 482
4. Paralelepípedo 483
5. Áreas e volume 487
Testes de vestibulares 490
Desafios 492

30 PIRÂMIDE 493
1. Conceito 493
2. Elementos 493
3. Classificação 493
4. Áreas e volume 495
5. Tetraedro regular 497
6. Tronco de pirâmide 499
Testes de vestibulares 503
Desafios 505

31 CILINDRO 506
1. Conceito 506
2. Elementos 506
3. Classificação 506
4. Áreas e volume 507
5. Seção meridiana e cilindro eqüilátero 508
Testes de vestibulares 511
Desafios 513

32 CONE 514
1. Conceito 514
2. Elementos 514
3. Classificação 514
4. Áreas e volume 515
5. Seção meridiana e cone eqüilátero 516
6. Tronco de cone 518
Testes de vestibulares 521
Desafios 523

33 ESFERA 524
1. Conceitos 524
2. Elementos 525
3. Área e volume 525
4. Fuso esférico 526
5. Cunha esférica 526
Testes de vestibulares 529
Desafios 531

Respostas dos exercícios e testes 532

Parte 7 — GEOMETRIA ANALÍTICA

34 O PONTO 537

1. Introdução 537
2. O plano cartesiano 537
3. Distância entre dois pontos 538
4. Ponto médio de um segmento 539
5. Condição de alinhamento de três pontos 540

Testes de vestibulares 542
Desafios 543

35 A RETA 544

1. Introdução 544
2. A equação geral da reta 544
3. A equação reduzida da reta 546
4. Retas que passam por um ponto dado 548
5. Outras formas de equação da reta 549
6. Analogia com a função afim 551
7. Interseção de retas 552
8. Paralelismo 554
9. Perpendicularidade 555
10. Inequações do 1º grau com duas variáveis 556
11. Ângulos entre retas 559
12. Distância entre ponto e reta 560
13. Área de um triângulo 561
14. Bissetrizes dos ângulos de duas retas 563

Testes de vestibulares 564
Desafios 568

36 A CIRCUNFERÊNCIA 569

1. A equação reduzida da circunferência 569
2. A equação geral da circunferência 571
3. Posições relativas entre ponto e circunferência 573
4. Inequações do 2º grau com duas incógnitas 575
5. Posições relativas entre reta e circunferência 576
6. Problemas de tangência 578

Testes de vestibulares 580
Desafios 583

37 AS CÔNICAS 584

1. Elipse 584
2. Hipérbole 588
3. Parábola 591

Testes de vestibulares 594
Desafios 596

Respostas dos exercícios e testes 597

Parte 8 — ÁLGEBRA III

38 ○ NÚMEROS COMPLEXOS 603

1. Introdução 603
2. Igualdade entre números complexos 606
3. Operações com números complexos 606
4. Potências de *i* 611
5. Plano de Argand-Gauss 612
6. Módulo 614
7. Argumento 615
8. Forma trigonométrica ou polar 616
9. Operações na forma trigonométrica 618
10. Potenciação em $\mathbb{C}$ 620
11. Radiciação em $\mathbb{C}$ 621

Testes de vestibulares 624
Desafios 625

39 ○ POLINÔMIOS 626

1. Função monomial 626
2. Função polinomial 626
3. Adição, subtração e multiplicação de polinômios 629
4. Divisão de polinômios 630
5. Divisão por binômios do tipo x – a 632
6. Divisões sucessivas 636

Testes de vestibulares 638
Desafios 639

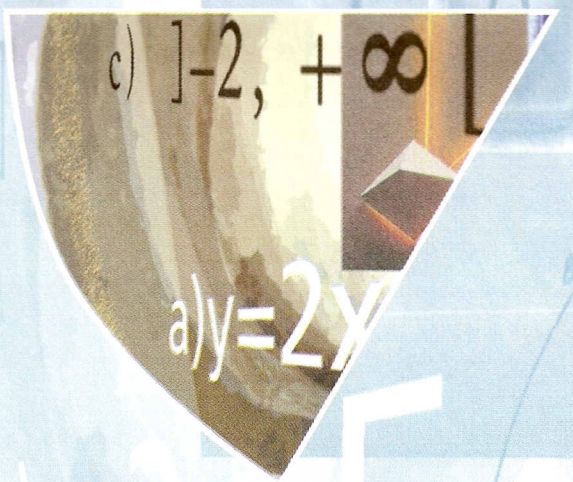
40 ○ EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS 640

1. Introdução 640
2. Noções iniciais 640
3. Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) 641
4. Teorema da decomposição 641
5. Multiplicidade de uma raiz 644
6. Raízes complexas 645
7. Relações de Girard 647
8. Raízes racionais 649

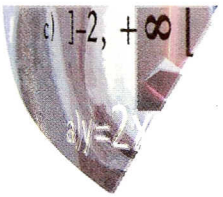
Testes de vestibulares 651
Desafios 653

Respostas dos exercícios e testes 654

• ÁLGEBRA I •



Parte I



1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

1 ○ Introdução

Certos conjuntos cujos elementos são números que guardam entre si algumas características comuns são aqui denominados *conjuntos numéricos*.

Tais conjuntos possuem os elementos perfeitamente caracterizados. Neste capítulo serão estudados, entre os conjuntos numéricos, o conjunto dos números naturais, o dos inteiros, o dos racionais, o dos irracionais e, por fim, o dos números reais.

O surgimento do conjunto dos números naturais deveu-se à necessidade de se contarem os objetos; os outros conjuntos, em geral, foram surgindo, também por necessidade, como ampliações daqueles até então conhecidos.

2 ○ O conjunto $\mathbb{N}$

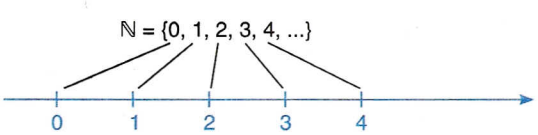
É o *conjunto dos números naturais*:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\},$$

em que n representa o elemento genérico do conjunto.

Os conjuntos numéricos aqui apresentados podem ser representados geometricamente por meio de pontos de uma reta, a chamada *reta numerada*. Escolhemos sobre ela um ponto de origem (correspondente ao número zero), uma unidade de medida e uma orientação (geralmente para a direita).

No caso particular do conjunto $\mathbb{N}$, marcamos sobre a reta outros números naturais, respeitando a unidade de medida:



O conjunto dos números naturais possui alguns subconjuntos importantes:

▶ **1º** O conjunto dos números naturais não nulos:

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\};\ N^* = N - \{0\}$$

▶ **2º** O conjunto dos números naturais pares:

$$\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

▶ **3º** O conjunto dos números naturais ímpares:

$$\mathbb{N}_i = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1, \ldots\}; \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

▶ **4º** O conjunto dos números primos:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

Conjunto fechado em relação a uma operação

Quando em um conjunto pode ser efetuada uma determinada operação entre quaisquer elementos do conjunto e o resultado da operação é um número que também pertence ao conjunto, dizemos que tal conjunto é fechado em relação à operação.

No caso do conjunto $\mathbb{N}$, temos, por exemplo:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}: \; m + n \in \mathbb{N}$$
$$m \cdot n \in \mathbb{N}$$

Assim, $\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição e à multiplicação.

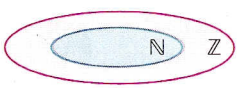
O mesmo não ocorre, porém, com a subtração; por exemplo, não existe número natural x tal que $x = 3 - 7$. Assim, $\mathbb{N}$ não é fechado em relação à subtração. Por esse motivo, fez-se necessária uma ampliação do conjunto $\mathbb{N}$, surgindo o conjunto dos números inteiros.

3 ○ O conjunto $\mathbb{Z}$

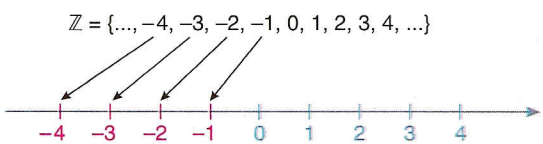
É o *conjunto dos números inteiros*:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Todos os elementos de $\mathbb{N}$ pertencem também a $\mathbb{Z}$, o que equivale a dizer que $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$.



A representação geométrica do conjunto dos inteiros é feita a partir da representação de $\mathbb{N}$ na reta numerada; basta acrescentar os pontos correspondentes aos números negativos:



O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

▶ **1º** O conjunto dos números inteiros não nulos:

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}; \; \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$$

▶ **2º** O conjunto dos números inteiros não negativos:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}_+$ é o próprio conjunto dos números naturais: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

▶ **3º** O conjunto dos números inteiros positivos:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

▶ 4º O conjunto dos números inteiros não positivos:

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

▶ 5º O conjunto dos números inteiros negativos:

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Números opostos

Dois números inteiros são ditos *opostos* um do outro quando apresentam soma zero; assim, os pontos que os representam distam igualmente da origem.

Podemos tomar como exemplo o número 3: o oposto de 3 é –3 e o oposto de –3 é 3, pois $3 + (-3) = (-3) + 3 = 0$.

Dizemos, em geral, que o oposto — ou simétrico — de a é $-a$, e vice-versa; particularmente, o oposto de zero é o próprio zero.

Módulo de um número inteiro

Damos o nome de módulo, ou valor absoluto, de x à distância entre a origem e o ponto que representa o número x.

Por exemplo, dizemos que o módulo de –3 é 3, e que o módulo de 3 também é 3; indicamos $|-3| = |3| = 3$.

Exercícios

1 Determine $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$.

2 Escreva por meio de uma propriedade característica o conjunto $D \cap E$, sendo $D = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ e $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 8 \leq x \leq 11\}$.

3 Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

a) $0 \in \mathbb{N}^*$
b) $0 \notin \mathbb{Z}^*$
c) $-3 \in \mathbb{Z}$
d) $\mathbb{Z}_+ \supset \mathbb{N}$
e) $5 - 9 \in \mathbb{N}$
f) $9 - 5 \in \mathbb{Z}$
g) $9 - 5 = 5 - 9$
h) O conjunto dos números naturais é finito.
i) O conjunto $\mathbb{Z}$ possui mais elementos que o conjunto $\mathbb{N}$.

4 Calcule:

a) $5 - (-3 + 2) - 1 - |-3 - 4|$
b) $-3 - \{-2 + 3 \cdot [-4 + (-1 + 3)]^2 - 1\} - 1$
c) $|9 - |3 + 11|| - |1 - 6|$

5 a) Qual a condição para que dois números inteiros a e b sejam simétricos?
b) Qual a condição para que dois números inteiros distintos c e d possuam módulos diferentes?

4 O conjunto $\mathbb{Q}$

O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação às operações adição, multiplicação e subtração, mas o mesmo não acontece em relação à divisão: embora $(-15) : (+3) = -5 \in \mathbb{Z}$, não existe número inteiro x para o qual se tenha $x = (+3) : (-15)$. Por esse motivo fez-se necessária uma ampliação do conjunto $\mathbb{Z}$, da qual surgiu o conjunto dos números racionais.

O conjunto $\mathbb{Q}$, dos racionais, é inicialmente descrito como o conjunto dos quocientes entre dois números inteiros:

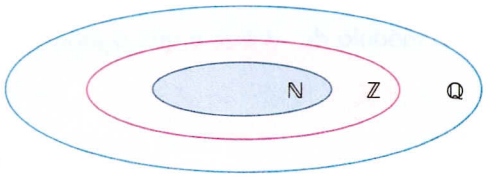
$$\mathbb{Q} = \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{5}, \ldots, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \ldots\right\}$$

Outra forma, mais simples, de denotar o conjunto dos racionais, é:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Assim, definimos $\mathbb{Q}$ como o conjunto das frações $\frac{p}{q}$; desse modo, um número é racional quando pode ser escrito como uma fração $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$.

Quando $q = 1$, temos $\frac{p}{q} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{Z}$, o que mostra que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$; assim, podemos construir o diagrama:



No conjunto $\mathbb{Q}$ destacam-se os seguintes subconjuntos:

$\mathbb{Q}^*$: conjunto dos racionais não nulos;
$\mathbb{Q}_+$: conjunto dos racionais não negativos;
$\mathbb{Q}_+^*$: conjunto dos racionais positivos;
$\mathbb{Q}_-$: conjunto dos racionais não positivos e
$\mathbb{Q}_-^*$: conjunto dos racionais negativos.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado para as operações adição, multiplicação e subtração. O conjunto $\mathbb{Q}^*$ é fechado para a divisão.

Representação dos números racionais

Os elementos de $\mathbb{Q}$ apresentam-se normalmente como frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{100}$, etc. Há, porém, outra representação dos números racionais; é a forma decimal.

As frações $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{40}$ e $\frac{31}{8}$, por exemplo, podem ser representadas por 0,25, 0,175 e 3,875, respectivamente. Esses números, por conterem na representação decimal mais simples um número finito de algarismos, são chamados *decimais exatos*.

Para escrever, por exemplo, a fração $\frac{1}{8}$ na forma decimal, basta dividir o numerador 1 pelo denominador 8:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 8 \\ 120 & 0{,}125 \\ 1240 & \\ 1240 & \end{array}$$

resto nulo ↔ decimal exato

Processo inverso:

$$0{,}125 = \frac{125}{1\underbrace{000}_{3\text{ zeros}}} = \frac{1}{8}$$

($\underbrace{}_{3\text{ casas}}$)

Outro exemplo: $\frac{7}{200} = 0{,}035$:

$$\begin{array}{r|l} 700 & 200 \\ 1000 & 0{,}035 \\ 100 & \end{array}$$

100 ← resto nulo

Processo inverso:

$$0{,}035 = \frac{35}{1\underbrace{000}_{3\text{ zeros}}} = \frac{070}{200}$$

($\underbrace{}_{3\text{ casas}}$)

Em alguns casos, porém, não se obtém resto nulo em nenhuma etapa da divisão. Nessas ocasiões aparecem as *dízimas periódicas*, que são marcadas pela repetição infinita de algarismos após a vírgula.

A fração $\frac{11}{6}$, por exemplo, apresenta essa característica. Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 6 \\ 50 & 1{,}833\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \\ \vdots & \end{array}$$

O algarismo 3 repete-se indefinidamente e o número $\frac{11}{6} = 1{,}833\ldots = 1{,}8\overline{3}$ é uma dízima periódica, na qual o período é constituído pelo algarismo 3.

Outro exemplo: a fração $\frac{113}{22}$.

$$\begin{array}{r|l} 113 & 22 \\ 30 & 5{,}13636\ldots \\ 80 & \\ 40 & \\ 80 & \\ 140 & \\ \vdots & \end{array}$$

período: 36

notação: $\frac{113}{22} = 5{,}13636\ldots = 5{,}1\overline{36}$

Em cada caso, a fração que dá origem à dízima periódica é chamada *fração geratriz* da dízima.

Inversamente, no caso de termos a dízima periódica, é possível achar a sua fração geratriz. Veja os exemplos.

Exemplo 1

Seja a dízima periódica $0{,}\overline{5} = 0{,}555\ldots = x$.

Podemos fazer:

$$10x = 5{,}55\ldots \quad \text{e} \quad 9x = 10x - x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{9}$$

A fração $\frac{5}{9}$ é a fração geratriz da dízima $0{,}\overline{5}$.

Exemplo 2

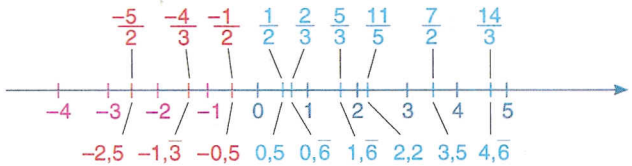
Seja, agora, a dízima periódica $y = 2{,}1\overline{90}$.

Fazendo $1000y = 2190{,}\overline{90}$ e $10y = 21{,}\overline{90}$, obtemos $990y = 2169$ e aparece a fração geratriz: $y = \frac{2169}{990}$.

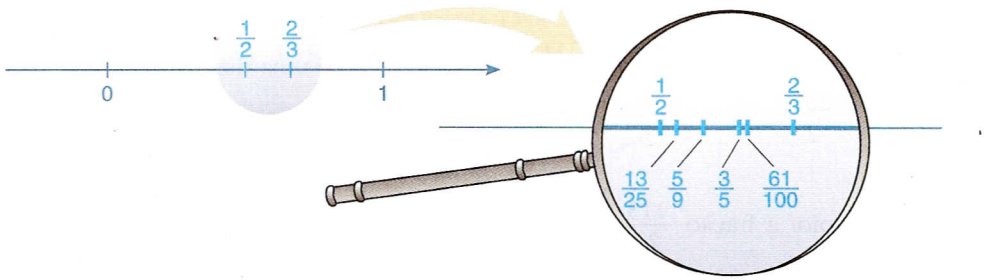
Como 2169 e 990 não são primos entre si, ou seja, mdc (2169, 990) = 9 ≠ 1, convém simplificar a fração: $y = \frac{241}{110}$.

Representação geométrica do conjunto dos números racionais

Daremos outros exemplos de números racionais e os localizaremos na reta numerada, que já contém alguns números inteiros assinalados:



Podemos notar que entre dois inteiros consecutivos existem infinitos números racionais e também que entre dois racionais quaisquer há infinitos racionais. Por exemplo, entre os racionais $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$, podemos encontrar os racionais $\frac{13}{25} = 0{,}52$, $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$, $\frac{3}{5} = 0{,}6$ e $\frac{61}{100} = 0{,}61$, entre outros.



Inverso de um número racional

Dois números são ditos inversos um do outro quando o produto entre eles resulta em 1.

Por exemplo, $\frac{4}{5}$ é o inverso de $\frac{5}{4}$ (e vice-versa) *ou* 0,8 é o inverso de 1,25 (e vice-versa).

0 é o único racional que não possui inverso.

Exercícios

6 Assinale *V* ou *F*:

a) $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$

b) $\frac{7}{3} - 1 \notin \mathbb{Q}$

c) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

d) $0{,}222\ldots \in \mathbb{Q}$

e) $0{,}\overline{9} \in \mathbb{Z}$

f) $-\frac{14}{7} \notin \mathbb{Q}$

7 Represente o racional *nove décimos* de dois modos diferentes.

8 Escreva na forma decimal cada uma das frações:

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{50}$ e) $\frac{1120}{200}$

b) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{30}$ f) $\frac{38}{60}$

9 Encontre a fração geratriz de cada dízima periódica:

a) $0,\overline{4}$ c) $1,\overline{81}$ e) $0,2\overline{34}$

b) 1,777... d) $18,\overline{1}$ f) $1,24\overline{15}$

10 (UF-CE) Se $\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{p}{q}$, sendo p e q números inteiros positivos relativamente primos, determine p + q.

11 Apresente de duas formas diferentes o resultado de $3 \cdot \left(0,\overline{1} + 2,2 - \frac{2}{3}\right)$.

12 Ache a fração geratriz do inverso de 1,5.

13 Encontre três números racionais compreendidos entre $0,\overline{8}$ e $\frac{97}{99}$.

14 Multiplique $0,5416\overline{6}$ por 24; a seguir, dê a representação decimal do racional $\frac{26}{48}$.

5 ○ O conjunto 𝕀

Assim como existem números decimais que podem ser escritos como frações — com numerador e denominador inteiros —, que são os números racionais de que acabamos de tratar, há os que não admitem tal representação. São os números decimais não exatos que possuem representação infinita, porém não periódica.

Vejamos alguns exemplos:

1. O número 0,15725312... não é dízima periódica, pois os infinitos algarismos após a vírgula não se repetem periodicamente.
2. O número 1,101112... também não comporta representação fracionária (com numerador e denominador inteiros), pois não é dízima periódica.
3. Os números $\sqrt{2}$ = 1,4142135..., $\sqrt{3}$ = 1,7320508..., e = 2,7182818... e π = 3,141592..., por não apresentarem representação infinita periódica, também não são números racionais.

Um número cuja representação decimal infinita não é periódica é chamado *número irracional*, e seu conjunto é representado por 𝕀.

6 ○ O conjunto ℝ

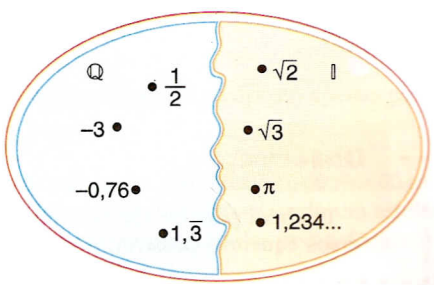
O conjunto formado pelos números racionais *e* pelos números irracionais é chamado *conjunto dos números reais* e é representado por ℝ.

Assim, temos:

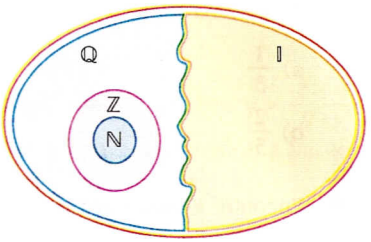
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ sendo } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$

↓

Se um número real é racional, não é irracional, e vice-versa.



Lembrando ainda que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, podemos construir o diagrama ao lado.



Além desses ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$), o conjunto dos números reais apresenta outros subconjuntos importantes:

- **1º** O conjunto dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

- **2º** O conjunto dos números reais não negativos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$$

- **3º** O conjunto dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

- **4º** O conjunto dos números reais não positivos:

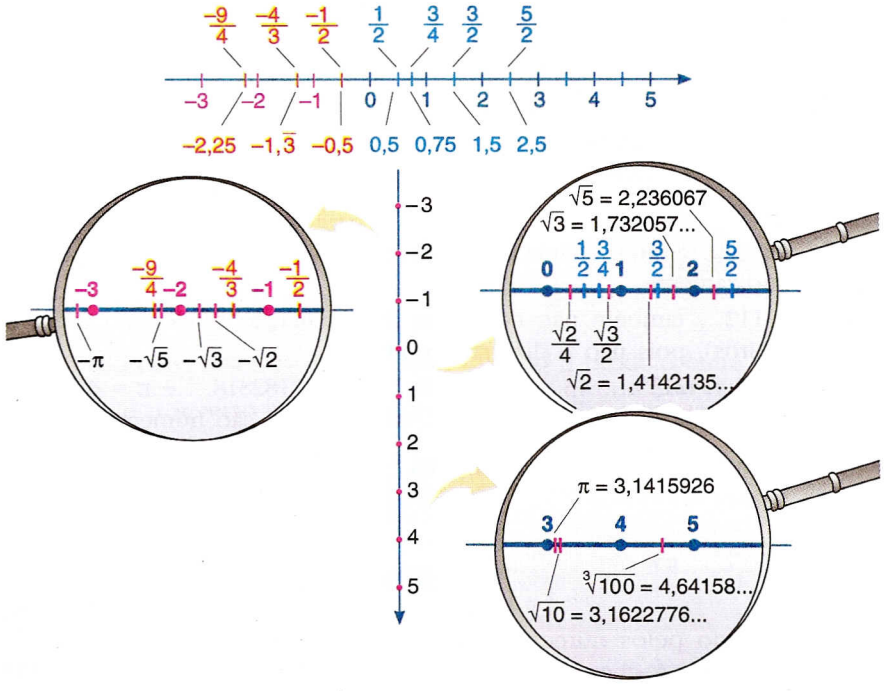
$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$$

- **5º** O conjunto dos números reais negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

Representação geométrica dos números reais

Retomemos a reta numerada, com alguns números racionais (inteiros ou não) já assinalados:



Observação

Também para os números reais utilizamos os conceitos de módulo, números opostos e números inversos (quando possível) apresentados para os outros conjuntos.

Exercícios

15 Disponha em ordem crescente os números reais:

a) $\frac{17}{18}$, 1, $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{18}{19}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $1,\overline{1}$.

b) $0,\overline{9}$, $\frac{98}{99}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{99}{98}$, $\frac{4\sqrt{3}}{7}$, 1, $\frac{\sqrt{10}}{3}$ e $\frac{\pi}{\sqrt{10}}$.

16 Destaque, entre os números apresentados no exercício anterior, dois pares de números inversos.

17 Efetue a divisão de:

a) 7 por $0,\overline{7}$.

b) $\frac{5}{11}$ por 6,25.

18 a) $\frac{\sqrt{50}}{5}$ é o dobro de qual número real?

b) $\frac{\sqrt{18}}{11}$ é o triplo de qual número real?

19 Seja $\frac{p}{q}$ a fração geratriz da dízima periódica $0,2\overline{4}$. A fração irredutível equivalente a $\frac{2q}{3p}$ representa outra dízima. Apresente-a, bem como sua fração geratriz.

20 Qual é o inverso de $0,7\overline{3}$? E de $-0,\overline{3}$?

21 Para facilitar os cálculos dos vestibulandos, um examinador, numa questão de trigonometria de um vestibular, escreveu a frase "Adote $\pi = \frac{22}{7}$, com boa aproximação". Qual foi a impropriedade cometida por ele?

22 (UF-MS, adaptado)

a) $A = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ é número inteiro?

b) $B = \sqrt[3]{-0,064}$ é número racional ou irracional?

23 (UF-AL) Assinale as afirmações verdadeiras (*V*) e as falsas (*F*), nas quais *n* é um número inteiro estritamente positivo.

a) O mínimo múltiplo comum entre 4n e 6n é 12n.

b) O número $n^2 + 7n + 7$ é sempre ímpar.

c) O número $n \cdot (n^2 - 1)$ é sempre divisível por 3.

24 Sendo $y = 1 : 0,1$ e $x = 2 : 0,1$, mostre que $A = \sqrt{\frac{x}{y}}$ e $B = \sqrt{\frac{x(y-1)}{y}}$ são irracionais, mas que $A \cdot B$ é racional.

25 Sendo $q = 5 \cdot 10^2$, obtenha o menor e o maior valor de *p* na fração irredutível $\frac{p}{q}$, de tal modo que $\pi < \frac{p}{q} < \sqrt{10}$.

26 Apresente um número real compreendido entre os números $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ e $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

27 Mostre que o número $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ é racional.

28 (UF-RJ) Determine um número inteiro cujo produto por 9 seja um número natural composto apenas pelo algarismo 1.

29 (PUC-SP) Um lojista dispõe de três peças de um mesmo tecido, cujos comprimentos são 48 m, 60 m e 80 m. Nas três peças o tecido tem a mesma largura. Deseja vender o tecido em retalhos iguais, cada um tendo a largura das peças e o maior comprimento possível, de modo a utilizar todo o tecido das peças. Quantos retalhos ele deverá obter?

7 ○ Intervalos reais

O conjunto dos números reais possui também subconjuntos, denominados *intervalos*, que são determinados por meio de desigualdades. Sejam os números reais a e b, com $a < b$.

▶ **1º** Intervalo aberto de extremos a e b é o conjunto $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Exemplo

$$]3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$

Note as "bolinhas vazias".

▶ **2º** Intervalo fechado de extremos a e b é o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Exemplo

$$[3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$$

Note as "bolinhas cheias".

▶ **3º** Intervalo aberto à direita (ou fechado à esquerda) de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

Exemplo

$$[3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 5\}$$

▶ **4º** Intervalo aberto à esquerda (ou fechado à direita) de extremos a e b é o conjunto

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Exemplo

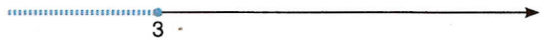
$$]3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$$

Existem ainda os intervalos infinitos:

▶ **5º** $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Exemplo

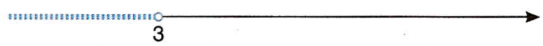
$$]-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$$



▶ **6º** $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Exemplo

$$]-\infty, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$



▶ **7º** $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$

Exemplo

$$[3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$$

▶ **8º** $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Exemplo

$$]3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$

Observação

Às vezes são utilizados ( ) em lugar de] [para indicar extremidades abertas nos intervalos:

$[a, b[= [a, b), \quad]a, b] = (a, b] \quad \text{e} \quad]a, b[= (a, b)$

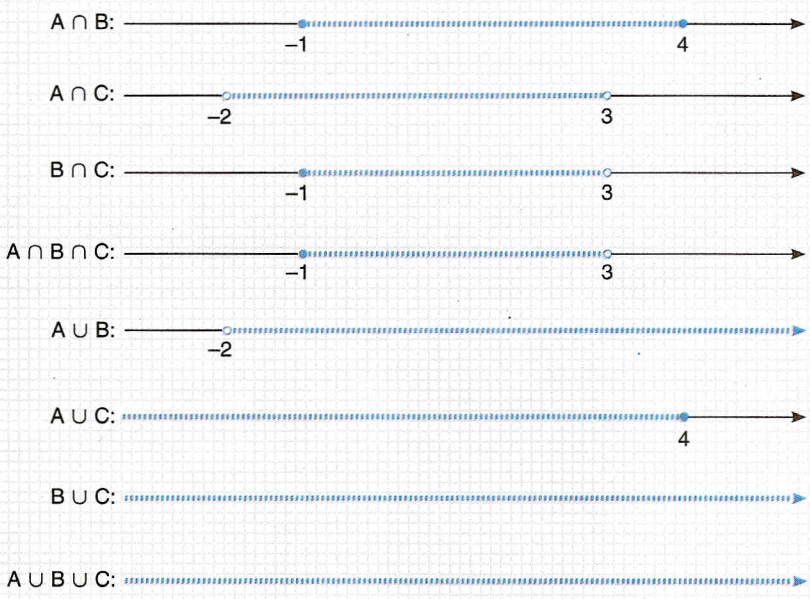
Na resolução de inequações e de outros problemas em que são necessárias operações como união, interseção, etc. entre intervalos, devemos utilizar a representação gráfica.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3

Dados os intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e $C =]-\infty, 3[$, podemos representá-los assim:

Daí, temos, por exemplo:



Exercícios

30 Faça a representação gráfica de cada um dos seguintes intervalos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 3\}$

d) $D = [1, 5[$

e) $E = (-2, 4]$

f) $F = (-\infty, -3]$

31 Descreva cada um dos conjuntos abaixo por meio de uma propriedade característica dos seus elementos:

a) $G = \left[-5, -\frac{5}{3}\right[$

b) $H =]-\infty, -2)$

c) $I =]3, +\infty[$

d) J:

e) K:

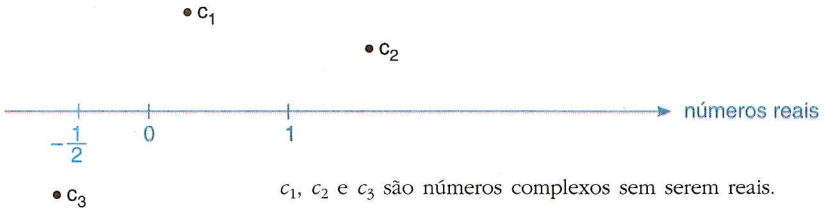
32 Determine $L \cup M$ e $L \cap M$, sendo $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$ e $M =]-3, 3[$.

33 Ache $S \cap T$, sendo $S = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e $T = \left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$.

8 Outro conjunto importante

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta numerada e os números reais, ou seja, a cada número real corresponde um ponto da reta, e vice-versa.

Há, porém, outros números, como por exemplo $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-5}$ e $\sqrt{-1}$, que *não são reais* e transcendem a reta numerada, isto é, não podem ser representados na reta.



c_1, c_2 e c_3 são números complexos sem serem reais.

Tais números são chamados *complexos* e constituem o conjunto C, que contém o conjunto dos reais e será objeto de estudo no capítulo 38.

Testes de vestibulares

1 (Unifor-CE) Considerando-se os conjuntos $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, e $\mathbb{Q}$, dos números racionais, qual dos números seguintes *não* pertence ao conjunto $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$?

a) $-\frac{2}{3}$
b) $-0{,}777\ldots$
c) 0
d) $\frac{3}{5}$
e) 2,0123

2 (UCDB-MT) Assinale a sentença verdadeira:

a) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = 0$
b) $0{,}323323332\ldots \in \mathbb{Q}$
c) $\mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{N}$
d) $-\sqrt{12} \notin \mathbb{R}$
e) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}_-$

3 (PUC-RJ) O valor de $\sqrt{2{,}777\ldots}$ é:

a) 1,2
b) 1,666...
c) 1,5
d) um número entre $\frac{1}{2}$ e 1
e) 3,49

4 (UFF-RJ) O número $\pi - \sqrt{2}$ pertence ao intervalo:

a) $\left[1, \frac{3}{2}\right]$
b) $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$
c) $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$
d) $(-1, 1)$
e) $\left[-\frac{3}{2}, 0\right)$

5 (U. E. Londrina-PR) Seja o número inteiro AB, no qual A e B são os algarismos das dezenas e das unidades, respectivamente.
Invertendo-se a posição dos algarismos A e B, obtém-se um número que excede AB em 27 unidades.
Se A + B é um quadrado perfeito, B é igual a:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

6 (UF-PI) Se $x = 1{,}333\ldots$ e $y = 0{,}1666\ldots$, então $x + y$ é igual a:

a) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{13}{9}$ e) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{68}{45}$ d) $\frac{4}{3}$

7 (Cefet-PR) São dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é ímpar$\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z}_+^* \mid x < 6\}$. O conjunto D, tal que $D = (A \cap B) - C$, é:

a) $\{-3, -2, -1, 0, 7, 9\}$ d) $\{-3, -1\}$

b) ϕ e) $\{1, 3\}$

c) $\{2, 4, 5\}$

8 (UTP-PR) O número $\frac{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ é:

a) irracional negativo.

b) natural.

c) racional mas não inteiro.

d) inteiro negativo.

e) n.d.a.

9 (Unifor-CE) Nos trabalhos científicos, números muito grandes ou muito próximos de zero são escritos em *notação científica*, que consiste em um número x, $1 < x < 10$, multiplicado por uma potência de 10. Escrevendo-se o número 0,0000052 em notação científica, obtém-se:

a) $5{,}2 \times 10^{7}$ d) $5{,}2 \times 10^{-7}$

b) $0{,}52 \times 10^{-7}$ e) 52×10^{-8}

c) $5{,}2 \times 10^{-6}$

10 (UF-SE) Se α e β são números racionais tais que $\alpha + \beta\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3$, então:

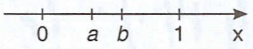
a) $\alpha - \beta = 2$ c) $\frac{\alpha}{\beta} = 2$ d) $\alpha\beta = 2$

b) $\alpha + \beta = 2$ e) $\alpha = \beta$

11 (Fepam-MG) Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que o inverso de $x - \sqrt{3}$ é $x + \sqrt{3}$, então x^2 vale:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

12 (PUC-MG) Na reta real da figura, estão representados os números 0, a, b e 1. O ponto P que corresponde ao número $\frac{b}{a}$ está:



a) à esquerda de 0.

b) entre 0 e a.

c) entre a e b.

d) entre b e 1.

e) à direita de 1.

13 (Unisant'Anna-SP) Se x e y são números reais tais que $x > y > 0$, é correto afirmar que:

a) $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ c) $-y < -x$

b) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ d) $x - 6 < y - 6$

e) $y^2 > x^2$

14 (Mackenzie-SP) Se k é um número real maior que zero, então $\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1} - k}$:

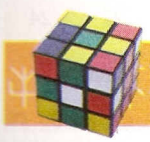
a) diminui quando k aumenta.

b) é menor que 0.

c) está entre 0 e k.

d) está entre k e $2k$.

e) é maior que $2k$.



Desafios

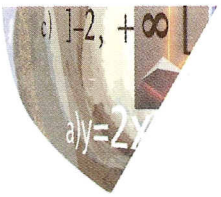
1 O novo Código de Trânsito de um país adota o sistema de pontuação em carteira para os motoristas; em caso de infringência às leis do trânsito, são atribuídos ao motorista 4 pontos quando se trata de infração leve, 5 pontos por infração grave e 7 pontos por infração gravíssima.

a) Se um motorista acumulou 37 pontos em sua carteira, quantas vezes foi autuado por infração gravíssima?

Agência Estado

b) Entre todas as pontuações de 0 a 100 pontos, quantas delas não podem ocorrer? Quais são?

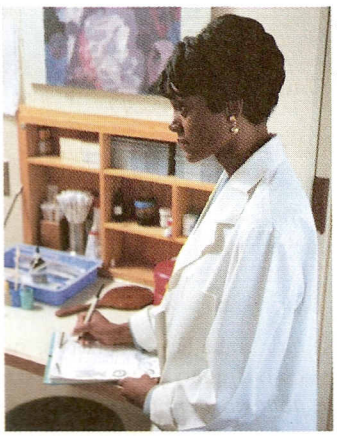
2 Mostre que o número $x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}$ é inteiro.



2 FUNÇÕES

1 Introdução

No estudo científico de muitos fatos é comum que se procure identificar grandezas mensuráveis e, em seguida, estabelecer as relações existentes entre essas grandezas. Vejamos alguns exemplos.


Photodisc

Exemplo 1

Quando quer fazer um estudo da variação da temperatura em certa cidade, o Instituto de Meteorologia mede a temperatura a intervalos regulares, por exemplo a cada 2 horas, e monta uma tabela que relaciona entre si as grandezas hora e temperatura. Vamos supor que a tabela seja assim:

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura	7°	5°	3°	2°	5°	12°	18°	20°	20°	15°	11°	8°	6°

A cada hora corresponde uma única temperatura. Dizemos, por isso, que a temperatura é *função* da hora.

Exemplo 2

Uma barraca de praia, em Fortaleza, vende copos de sucos naturais ao preço de R$ 0,80 cada. Para não ter de fazer contas a toda hora, o proprietário da barraca montou a seguinte tabela:

Número de copos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preço (R$)	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8,00

Nesse exemplo estão sendo medidas duas grandezas: o número de copos de suco e o respectivo preço. A cada quantidade de copos corresponde um único preço. Dizemos, por isso, que o preço é *função* do número de copos de suco. Aqui é possível achar uma fórmula que estabelece a relação de interdependência entre o preço (y) e o número de copos de suco (x):

$$y = 0{,}80 \cdot x$$

Exemplo 3

Para fretar um ônibus de excursão com 40 lugares, paga-se, ao todo, R$ 360,00. Quanto cada passageiro deverá pagar se a lotação do ônibus não for completa?

Para achar a quantia que cada um deverá desembolsar (y), basta dividir o preço total (R$ 360,00) pelo número de passageiros (x). A fórmula que relaciona y com x é:

$$y = \frac{360}{x}$$

Observe na tabela a correspondência entre x e y:

x	4	12	15	18	20	24	36	40
y	90,00	30,00	24,00	20,00	18,00	15,00	10,00	9,00

Exemplo 4

Um automóvel está percorrendo uma estrada à velocidade constante de 120 km/h (que equivale a 2 km/min).

O passageiro que vai ao lado do motorista começa a anotar, de minuto em minuto, a distância percorrida, que aparece no painel. O resultado pode ser observado na tabela abaixo.

Instante (min) (momento da leitura)	0	1	2	3	4	5	...
Distância (km)	0	2	4	6	8	10	...

A cada instante (x) corresponde uma única distância percorrida (y). Dizemos, por isso, que a distância é *função* do instante. A fórmula que relaciona y com x é:

$$y = 2x$$

Exercícios

1 A tabela relaciona o tempo gasto por um funcionário de uma empresa para digitar um certo número de páginas de um relatório:

Número de páginas	Tempo (em minutos)
1	15
2	30
3	45
4	60

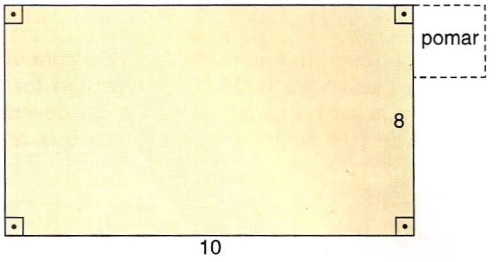
a) O tempo (t) de serviço é função do número de páginas digitadas (n)? Encontre a lei que relaciona t e n.
b) Em quanto tempo serão digitadas 20 páginas?
c) Se o funcionário trabalhar 8 horas, será possível concluir um trabalho de digitação de 35 páginas? Explique.

2 Uma videolocadora lançou uma promoção que consiste no pagamento de uma taxa mensal fixa e um adicional de R$ 2,00 por qualquer fita alugada. A tabela seguinte informa a conta mensal de quatro clientes.

Clientes	Número de fitas alugadas	Valor mensal pago (em reais)
A	3	20,00
B	8	30,00
C	12	38,00
D	20	54,00

a) Qual é o valor da taxa fixa cobrada?
b) Como se expressa o valor das despesas mensais (y) de um cliente que alugou x fitas no mês?
c) Com R$ 71,00, qual é o número máximo de fitas que podem ser alugadas?

3 Uma casa ocupa um terreno retangular de 10 m por 8 m. Seu proprietário decidiu comprar um lote quadrado a fim de fazer um pomar, conforme indica a figura (o lado do quadrado não pode superar a largura do terreno).



a) Construa uma tabela que forneça o valor total da área do terreno, quando o lado do lote comprado for de 2 m, 3,5 m, 5 m e 6 m.

b) Qual será a área A do terreno quando o lado do lote for de x metros? ($x \leqslant 8$)

c) Qual é o valor da área máxima que o terreno pode ter?

4 (Cefet-MG, adaptado) Uma bomba de água é ligada para encher uma piscina de 4 600 litros, inicialmente vazia. A tabela informa o volume de água na piscina em alguns instantes:

Tempo (em minutos)	Volume (em litros)
1	23
2	46
3	69
4	92
5	115

a) Qual é a vazão de água lançada por essa bomba, em litros por minuto?

b) Em quanto tempo a piscina estará cheia?

c) Como expressamos o volume (v) de água necessário para *encher* a piscina após t minutos de funcionamento da bomba?

5 Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra.

a) Qual é a população de bactérias após 2 horas do início da experiência? E após 4 horas?

b) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (n) em função do tempo (t).

c) Dê uma estimativa do número de bactérias após 1 dia de observação. (Use a aproximação: $2^{10} \sim 10^3$.)

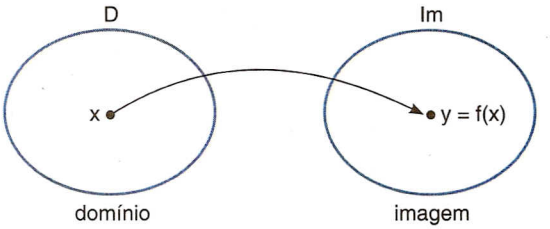
2 ○ Definição

Em Matemática, se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é uma **função** de x.

O conjunto D de valores que podem ser atribuídos a x é chamado *domínio* da função. A variável x é chamada *variável independente*.

O valor de y, correspondente a determinado valor atribuído a x, é chamado *imagem* de x pela função e é representado por $f(x)$. A variável y é chamada *variável dependente*, porque y assume valores que dependem dos correspondentes valores de x.

O conjunto *Im* formado pelos valores que y assume, em correspondência aos valores de x, é chamado *conjunto imagem* da função. Esquematicamente, temos:



3 ○ Funções definidas por fórmulas

Existe um interesse especial no estudo de funções em que y pode ser calculado a partir de x por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei).

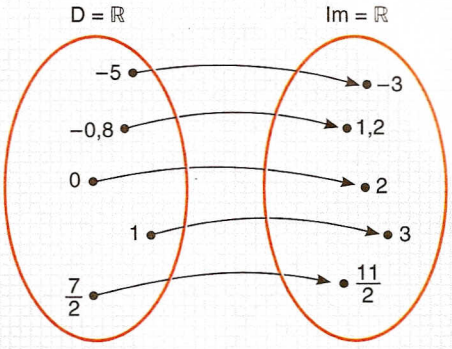
Exemplo 5

A lei de correspondência que associa cada número real x ao número y, sendo y a soma de x com 2, é uma função definida pela fórmula $y = x + 2$, ou $f(x) = x + 2$.

O domínio e o conjunto imagem dessa função são iguais a $\mathbb{R}$.

Nessa função temos:

- para $x = 1$, vem $y = 1 + 2 = 3$; dizemos que $f(1) = 3$.
- a imagem de $x = -5$ é $f(-5) = -5 + 2 = -3$.
- $x = \frac{7}{2}$ corresponde a $y = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}$.
- $y = 1{,}2$ é a imagem de $x = -0{,}8$.



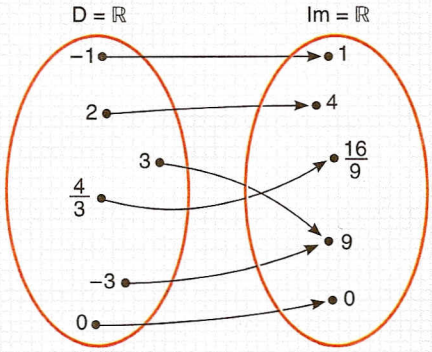
Exemplo 6

A regra que associa a cada número real x o número y, sendo y o quadrado de x, é $y = x^2$, ou $f(x) = x^2$.

Trata-se de uma função de domínio $\mathbb{R}$ e conjunto imagem iguais a $\mathbb{R}_+$.

Nessa função temos:

- para $x = 2$, vem $y = 2^2 = 4$. Dizemos que $f(2) = 4$.
- a imagem de -1 é $f(-1) = (-1)^2 = 1$.
- para $x = \frac{4}{3}$, vem $y = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$; então $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}$.
- $y = 9$ é imagem de $x = 3$ ou de $x = -3$.



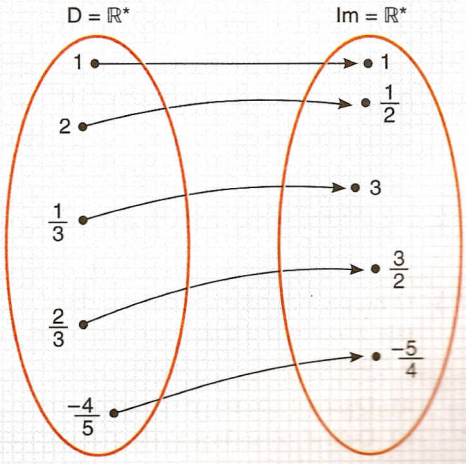
Exemplo 7

A lei $y = \frac{1}{x}$ associa a cada x real diferente de 0 o real y tal que $y = \frac{1}{x}$.

Trata-se de uma função cujo domínio é $\mathbb{R}^*$. Pode-se mostrar que seu conjunto imagem é $\mathbb{R}^*$.

Nessa função temos:

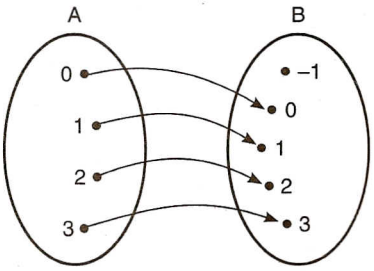
- para $x = 2$, vem $y = \frac{1}{2}$.
- a imagem de $x = \frac{1}{3}$ é $y = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.
- $x = \frac{2}{3}$ está em correspondência com $y = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.
- $y = -\frac{5}{4}$ é a imagem de $x = -\frac{4}{5}$.



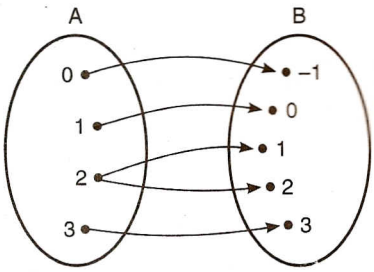
Exercícios

6 Verifique se cada um dos esquemas abaixo representam, ou não, uma função de A = {0, 1, 2, 3} em B = {–1, 0, 1, 2, 3}. Justifique sua resposta.

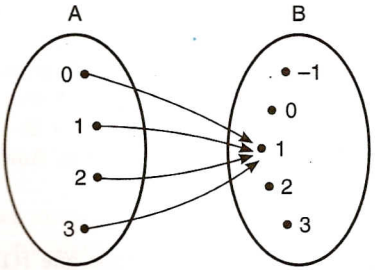
a)



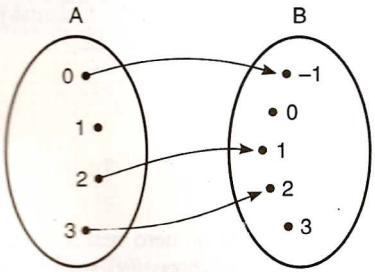
b)



c)



d)



7 Sejam A = {2, 4, 8, 12} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. A lei que associa cada elemento de *A* a sua metade, em *B*, define uma função? Represente num diagrama.

8 Sejam A = {–1, 0, 1, 2} e B = {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4}. Em cada caso, verifique se a lei dada define uma função de *A* com valores em *B*:

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = 2x + 1$

9 Seja *f* uma função com domínio nos naturais, dada por $f(n) = 3n + 4$.

a) Calcule f(2) e f(10). b) Existe f(–1)?

10 Seja *f* uma função com domínio real, dada pela lei $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Calcule:

a) f(0) b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ c) f(–1) d) $f(\sqrt{5})$

11 Seja *f* uma função de domínio nos reais, definida por $f(x) = -2x + m$, em que *m* é um número real fixo. Sabendo que f(3) = –8, determine:

a) o valor de m b) f(–5) c) o valor de *x* tal que f(x) = 0

12 Seja a função real definida por $f(x) = \frac{3x - 4}{7}$. Qual é o elemento do domínio que tem $\frac{2}{3}$ como imagem?

13 O número de alunos matriculados em uma escola de esportes é função do tempo, e a lei que relaciona tais grandezas é dada por $n(t) = 4t^2 - t + 50$, em que n(t) é o número de alunos dessa escola daqui a *t* meses.

a) Quantos alunos essa escola terá daqui a dois meses?

b) Qual é o acréscimo de alunos registrado do sexto para o sétimo mês?

14 Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = -3x + 2$ e $g(x) = 2x - 4$. Determine:

a) $f(2) + g(1)$ b) $\frac{f(0) + g(5)}{f(-2)}$ c) o valor de x tal que $f(x) = g(x)$

15 (Unicamp-SP) O preço unitário de um produto é dado por

$$p = \frac{k}{n} + 10, \text{ para } n \geq 1,$$

sendo k uma constante e n o número de unidades adquiridas.

a) Encontre o valor da constante k, sabendo-se que, quando foram adquiridas 10 unidades, o preço unitário foi de R$ 19,00.

b) Com R$ 590,00, quantas unidades do referido produto podem ser adquiridas?

16 A lei $f(x) = 2x^2 - 12x + 25$ representa o número de multas anuais (em milhares), indicado por $f(x)$, que serão aplicadas daqui a x anos, em uma certa cidade.

a) Quantas multas são aplicadas atualmente nessa cidade?

b) Quantas multas serão aplicadas daqui a 2 anos? E daqui a 5 anos?

c) Em quanto tempo serão aplicadas 57 000 multas?

17 (UMC-SP, adaptado) A produção de uma fábrica de televisores varia, mês a mês, com a fórmula

$$P(m) = 25(m - 3)^2 + 300,$$

em que $m = 1, 2, 3, \ldots$ corresponde, respectivamente, aos meses de janeiro, fevereiro, março, etc. Determine:

a) o número de televisores produzidos em março, junho e setembro, respectivamente;

b) os meses em que são produzidos 400 televisores.

4 Domínio e contradomínio

Normalmente, para que uma função f esteja bem caracterizada, é necessário que se conheça a lei de correspondência que associa x (variável independente) a y (variável dependente), além do domínio de f.

Muitas vezes se faz referência a uma função f dizendo apenas qual é a lei de correspondência. Quando não é dado explicitamente o domínio D de f, deve-se subentender que D é formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de x na lei de correspondência $y = f(x)$, de modo que, efetuados os cálculos, resulte um y real.

Vejamos alguns exemplos:

1. O domínio da função definida pela lei $y = 2x - 1$ é $\mathbb{R}$, pois, qualquer que seja o valor de x (real), o número $2x - 1$ também é real.

2. O domínio da função definida pela lei $y = \frac{x^2 - 5}{x - 2}$ é $\mathbb{R} - \{2\}$, pois, para todo x real diferente de 2, o número $\frac{x^2 - 5}{x - 2}$ é real.

3. O domínio da função $y = \sqrt{x}$ é $\mathbb{R}_+$, pois só para valores negativos de x é que $\sqrt{x}$ não é real.

4. A função $y = \frac{1}{x - 2} + \sqrt{x - 1}$ tem domínio $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ e } x \neq 2\}$, pois y só é real se $x - 1 \geq 0$ e $x - 2 \neq 0$.

Quando uma função é dada por uma lei de correspondência $y = f(x)$, às vezes não é tão simples estabelecer o seu conjunto imagem. Nesses casos, é comum apresentar apenas o conjunto E, no qual poderão estar os valores de y. Esse conjunto E é chamado *contradomínio* de f.

Por exemplo, na função f, dada pela lei $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$, o domínio é $\mathbb{R} - \{1, -1\}$, pois $x^2 - 1 \neq 0$; para cada x do domínio, y é um número real que pode assumir valores não tão facilmente determináveis. Nesse caso, dizemos que f é uma função de $\mathbb{R} - \{1, -1\}$ em $\mathbb{R}$, em que $\mathbb{R}$ é o contradomínio de f, e indicamos por $f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$.

Em geral, a notação $f: A \to B$ representa uma função com domínio dado pelo conjunto A e contradomínio dado por B.

Exercícios

18 Determine a notação de cada uma das seguintes funções reais:

a) f associa a cada número real seu dobro.
b) g associa cada número real a seu quadrado.
c) b associa cada número real a seu triplo menos 1.

19 (EEM-SP) Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ satisfaz à seguinte propriedade: $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$.

a) Determine $f(1)$.
b) Sabendo-se que $f(2) = 1$, determine $f(8)$.

20 Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 4x - 5$
b) $g(x) = -x^2 - 7x + 5$
c) $h(x) = \frac{1}{x - 1}$
d) $f(x) = \sqrt{x + 5}$

21 Estabeleça o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x - 2}$
b) $g(x) = \frac{5x}{\sqrt[3]{x}}$
c) $h(x) = \frac{2}{\sqrt{2x - 1}}$

22 Determine o domínio da função cuja lei é $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 3}$.

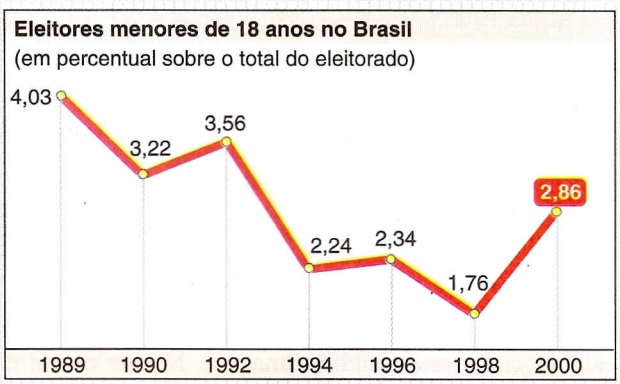
5 Gráficos

Vamos observar alguns gráficos retirados de jornais ou revistas, a partir dos quais podemos descobrir algumas propriedades das funções que eles representam.

Exemplo 8

Examinando o gráfico, podemos dizer que:

- em 1989, os eleitores menores eram 4,03% do eleitorado;
- em 1992, os eleitores menores eram 3,56% do eleitorado;
- de 1996 a 1998, o eleitorado dos menores decresceu (ou caiu) de 2,34% para 1,76%;
- de 1998 a 2000, esse eleitorado cresceu (ou subiu) de 1,76% para 2,86%.

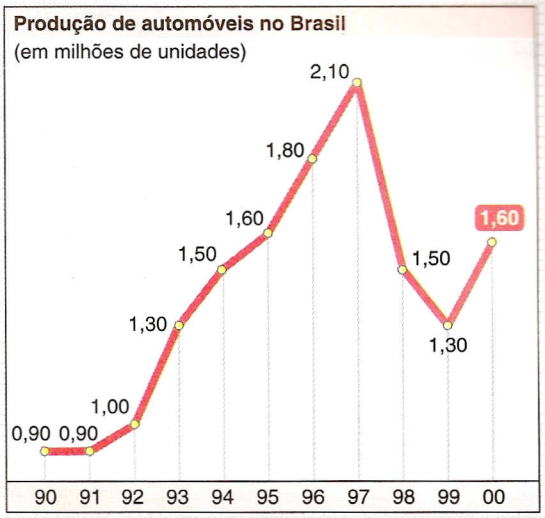


Fonte: *Folha de S.Paulo*, 17/9/2000.

Exemplo 9

Examinando o gráfico, podemos dizer que:

- a produção máxima ocorreu em 1997 (cerca de 2,10 milhões);
- a produção mínima ocorreu em 1990 e 1991 (cerca de 0,90 milhão);
- a produção cresceu continuamente de 1991 a 1997;
- a produção decresceu de 1997 a 1999 e retomou o crescimento de 1999 a 2000.

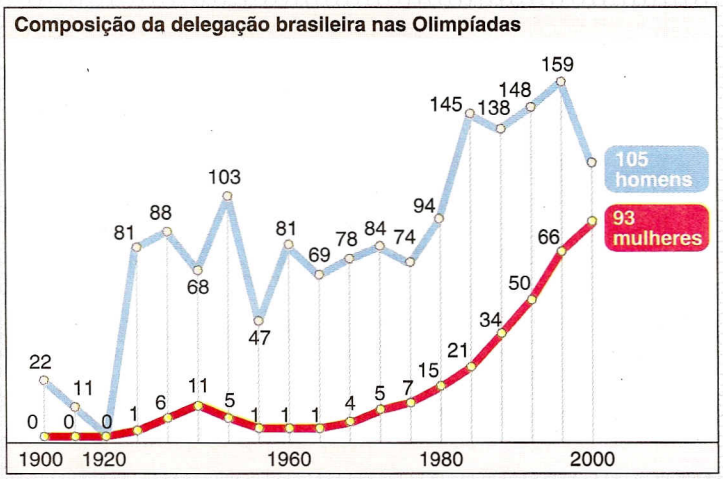


Fonte: *Folha de S. Paulo*, 7/12/2000.

Exemplo 10

Observando o gráfico, podemos dizer que:

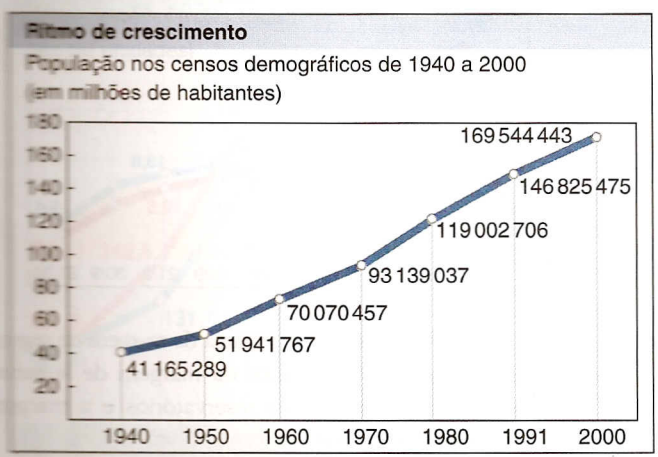
- o número de homens na delegação sempre foi superior ao de mulheres;
- o número de mulheres na delegação cresceu continuamente de 1960 a 2000;
- em 2000 o número de homens (105) e o número de mulheres (93) são próximos;
- de 1980 a 2000 a relação entre o número de homens e o de mulheres passou de cerca de 6:1 para cerca de 1,1:1.



Fonte: *Folha de S. Paulo*, 12/9/2000.

Exercícios

23



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 22/12/2000.

a) Identifique as variáveis envolvidas, destacando a dependente.
b) Qual a diferença entre a população brasileira registrada no censo de 2000 e a população registrada no censo de 1970?
c) A função representada é crescente?
d) Podemos dizer de modo exato que a população chegou a triplicar entre 1940 e 1980?

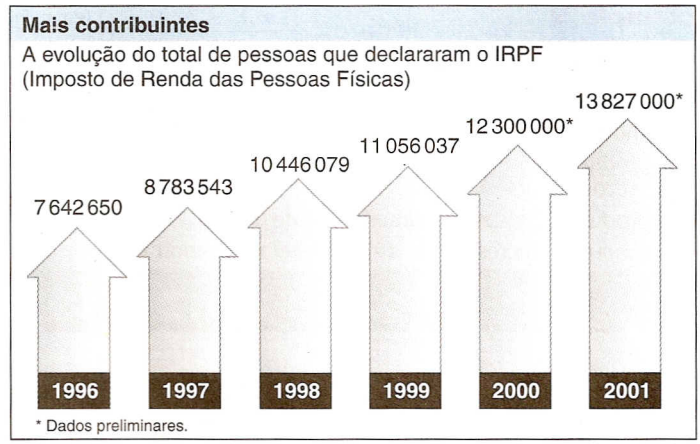
24 Assinale *V* ou *F*, justificando:

a) O gráfico ao lado representa uma função.

b) A cada ano aumenta o número de pessoas que declaram o imposto de renda.

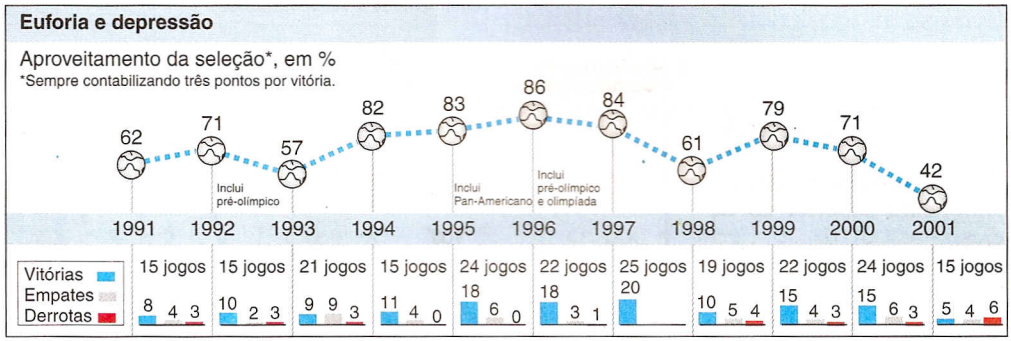
c) De 1997 a 1998 houve um acréscimo de mais de 1,5 milhão de declarações.

d) Se, a partir de 2001, o número de pessoas que declaram imposto de renda crescer à proporção de 1,8 milhão ao ano, em 2005 esse número ultrapassará 22 milhões.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 3/11/2001.

25



Fonte: *Folha de S. Paulo*, 29/7/2001.

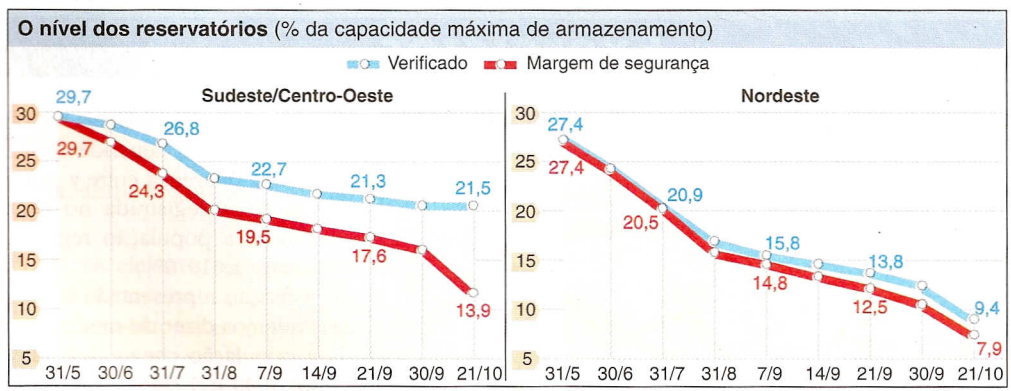
a) Em que períodos o aproveitamento da seleção foi crescente?

b) Em que anos foram registrados o melhor e o pior aproveitamento? Quais foram os valores máximo e mínimo registrados?

c) Em que anos o aproveitamento manteve-se acima de 65%?

d) Se em 1997 a seleção venceu 20 jogos, quantos jogos empatou e quantos jogos perdeu?

26 Acompanhe os gráficos referentes à crise energética de 2001 e, a seguir, assinale *V* ou *F* nas afirmações abaixo, justificando as falsas.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 23/10/2001.

a) Na Região Nordeste a capacidade dos reservatórios sempre esteve muito próxima da margem de segurança.

b) Em nenhuma das regiões a capacidade dos reservatórios ficou abaixo da margem de segurança.

c) No Sudeste e no Centro-Oeste, a diferença entre a capacidade dos reservatórios e a margem de segurança ficou praticamente constante nas datas consideradas.

d) Após 31 de maio, a data de 7 de setembro representou a situação mais crítica dos reservatórios no Nordeste.

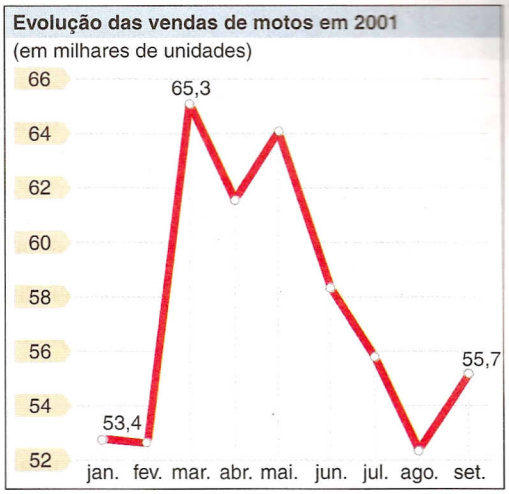
27 Com base no gráfico ao lado, responda:

a) Em que meses do ano foram vendidas mais de 58 000 motos?

b) Em que mês as vendas atingiram seu mínimo? E seu máximo?

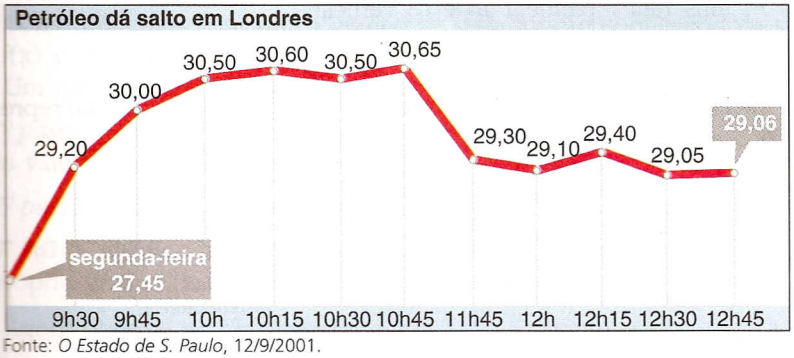
c) Considerando dois meses consecutivos, determine o período em que ocorreu a maior queda na venda de motos e dê uma estimativa para tal queda.

d) Compare o número de motos vendidas no primeiro trimestre com a quantidade vendida no segundo trimestre.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 10/10/2001.

28



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 12/9/2001.

O gráfico mostra a variação do preço do barril de petróleo na manhã de terça-feira de 11 de setembro de 2001, quando foram realizados os atentados terroristas em Nova Iorque e Washington.

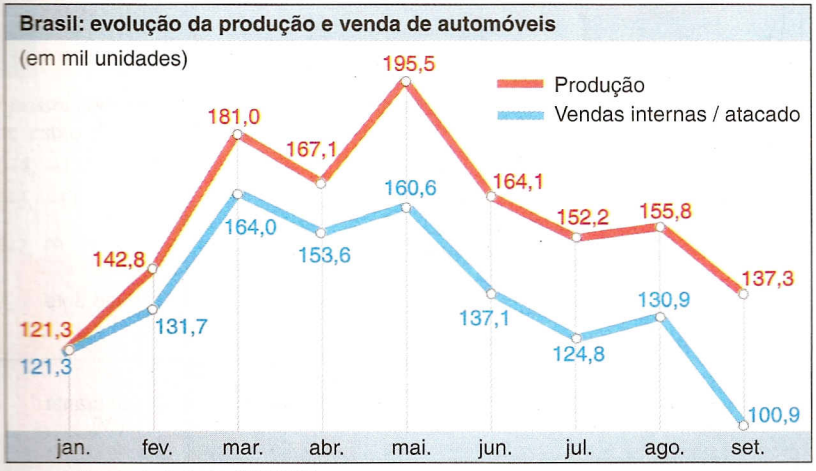
a) Qual foi a cotação de abertura do barril?

b) Qual foi a cotação máxima registrada nesse dia?

c) Entre que horários consecutivos foi registrada queda na cotação do barril?

d) Pode-se afirmar que o aumento percentual na cotação do barril (levando-se em consideração a cotação de segunda-feira e a do fechamento de terça-feira) foi superior a 5%?

29



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 5/10/2001.

a) Em que períodos a produção de automóveis cresceu?

b) Em que mês o número de veículos não vendidos foi maior? Qual foi esse número?

c) No período considerado, faça um gráfico correspondente à quantidade de veículos que permaneceram em estoque.

6 ○ Noções básicas de plano cartesiano

Um *par ordenado* de números é o conjunto formado por dois números em certa ordem. Usa-se a notação (a, b) para indicar o par ordenado em que *a* é o primeiro elemento e *b* é o segundo. Vejamos alguns exemplos:

1. (1, 3) é o par ordenado em que o primeiro elemento é 1 e o segundo é 3.
2. (3, 1) é o par ordenado em que o primeiro elemento é 3 e o segundo é 1.

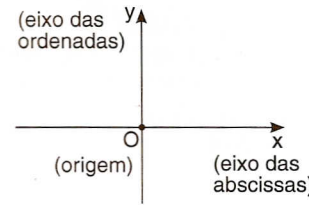
Note que os pares (1, 3) e (3, 1) diferem entre si pela ordem de seus elementos.

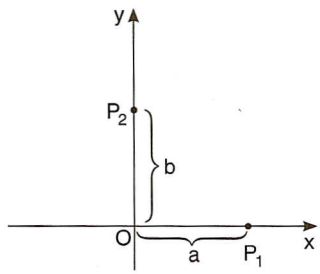
Existe uma maneira geométrica para representarmos o par ordenado (a, b):

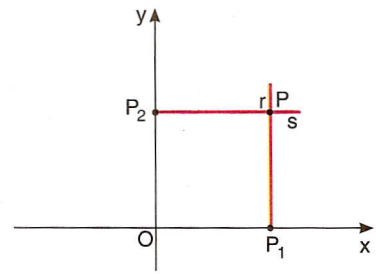
- *1º passo:* desenhamos dois eixos perpendiculares e usamos a sua interseção *O* como origem para cada um deles;
- *2º passo:* marcamos no eixo horizontal o ponto P_1, correspondente ao valor de *a*;
- *3º passo:* marcamos no eixo vertical o ponto P_2, correspondente ao valor de *b*;
- *4º passo:* traçamos por P_1 uma reta *r* paralela ao eixo vertical;
- *5º passo:* traçamos por P_2 uma reta *s* paralela ao eixo horizontal;
- *6º passo:* destacamos a interseção das retas *r* e *s* chamando-a de *P*, que é o ponto que representa graficamente o par ordenado (a, b).

Nomenclatura

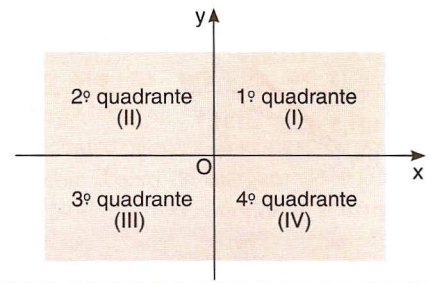
- O eixo horizontal (Ox) é o *eixo das abscissas*.
- O eixo vertical (Oy) é o *eixo das ordenadas*.
- O ponto *O* (interseção de Ox com Oy) é a *origem*.
- O plano que contém Ox e Oy é o *plano cartesiano*.



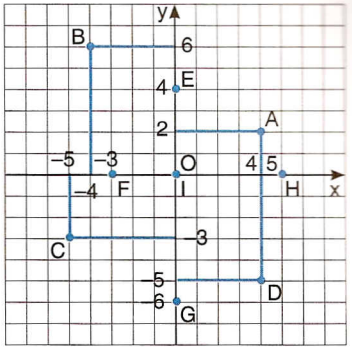




Cada uma das quatro partes em que fica dividido o plano pelos eixos cartesianos chama-se *quadrante*. A numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas.



30 Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano ao lado.



31 Assinale no plano cartesiano os pontos A(2, −3), B(0, −4), C(−4, −5), D(−1, 0), E(0, 5), F(5, 4), G(3, 0), H(−3, 2), $I\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

32 Os pares ordenados (x + 2y, 2x − y) e (5, −3) são iguais. Determine x e y.

33 O ponto N de coordenadas (m − 2, 5) pertence ao eixo das ordenadas. Determine m.

7 ○ Construção de gráficos

Como podemos construir o gráfico de uma função conhecendo a sua lei de correspondência y = f(x) e seu domínio D?

Um método bem simples é apresentado. Vejamos.

- *1º passo:* construímos uma tabela na qual aparecem os valores de x (variável independente) e os valores do correspondente y, calculados através da lei y = f(x).
- *2º passo:* representamos cada par ordenado (a, b) da tabela por um ponto do plano cartesiano.
- *3º passo:* ligamos os pontos construídos no passo anterior por meio de uma curva, que é o próprio gráfico da função y = f(x).

Agora observe os exemplos a seguir.

Exemplo 11

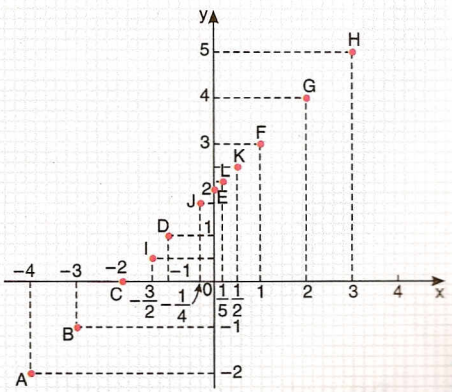
Vamos construir o gráfico da função y = x + 2 com domínio R.

- *1º passo:* damos a x alguns valores inteiros (por exemplo: −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3) e alguns valores fracionários $\left(\text{por exemplo: } -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$, e calculamos y = x + 2. Teremos a tabela:

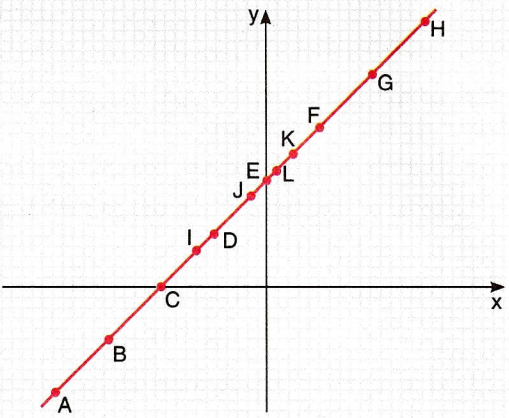
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
y	−2	−1	0	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{5}$

- *2º passo:* representamos os pares ordenados que estão nessa tabela por pontos:

A(−4, −2)
B(−3, −1)
C(−2, 0)
D(−1, 1)
E(0, 2)
F(1, 3)
G(2, 4)
H(3, 5)
$I\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$J\left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$
$K\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$
$L\left(\frac{1}{5}, \frac{11}{5}\right)$



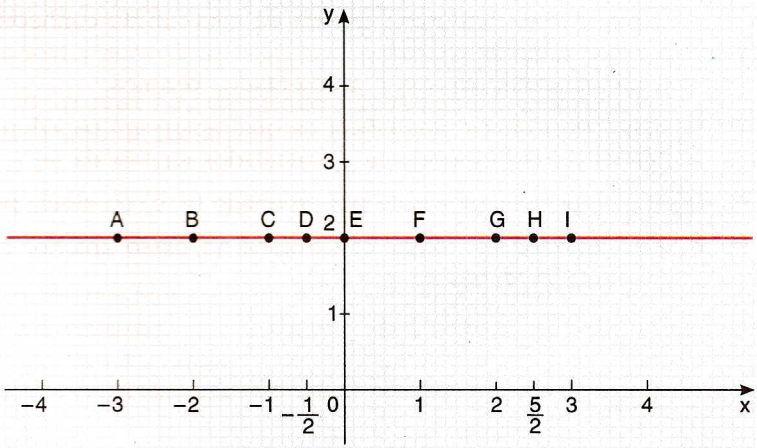
▶ *3º passo:* desenhamos a curva "provável" que contém os pontos que satisfazem a lei y = x + 2. É uma reta.



Exemplo 12

Vamos construir o gráfico da função y = 2 para todo x real.

x	y	Ponto
−3	2	A
−2	2	B
−1	2	C
$-\frac{1}{2}$	2	D
0	2	E
1	2	F
2	2	G
$\frac{5}{2}$	2	H
3	2	I

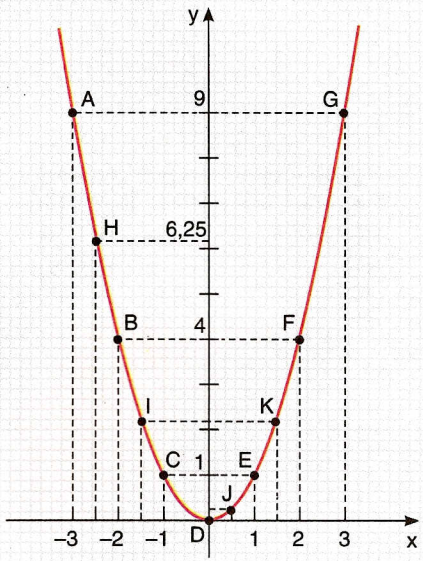


Esse é um exemplo de *função constante*. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

Exemplo 13

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2$ com domínio $\mathbb{R}$.

x	y	Ponto
−3	9	A
−2	4	B
−1	1	C
0	0	D
1	1	E
2	4	F
3	9	G
−2,5	6,25	H
−1,5	2,25	I
0,5	0,25	J
1,5	2,25	K



Essa curva é chamada *parábola*.

Exercícios

34 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $y = x$ b) $y = x + 3$ c) $y = -2x$ d) $y = -2$

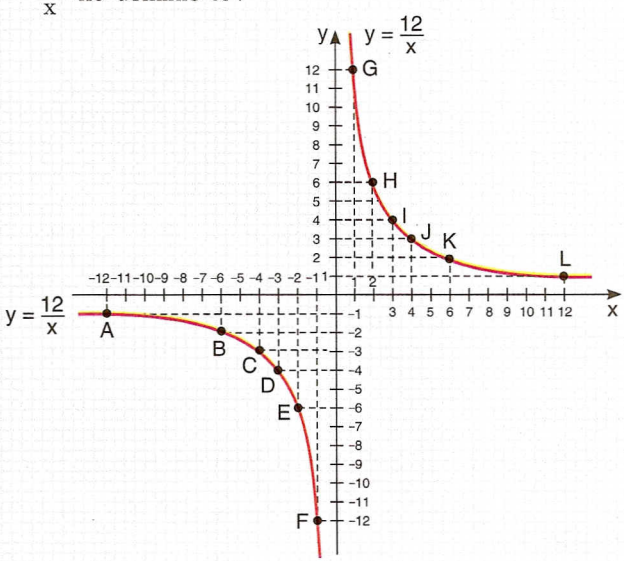
35 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $y = 2x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = x^2 - 1$ d) $y = x^2 - 2x$

Exemplo 14

Vamos construir o gráfico da função $y = \frac{12}{x}$ no domínio $\mathbb{R}^*$.

x	y	Ponto
−12	−1	A
−6	−2	B
−4	−3	C
−3	−4	D
−2	−6	E
−1	−12	F
1	12	G
2	6	H
3	4	I
4	3	J
6	2	K
12	1	L



Essa curva é chamada *hipérbole*.

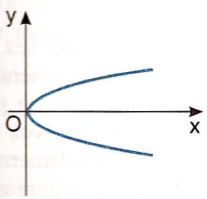
Exercícios

36 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções:

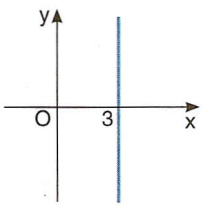
a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{1}{x - 1}$ c) $y = x^3$

37 Explique por que os gráficos seguintes *não* representam funções.

a)



b)



38 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{x - 2}$

8 ○ Análise de gráficos

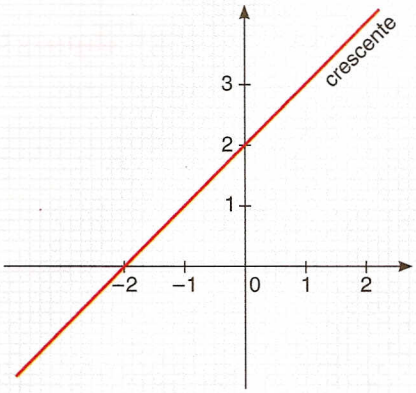
Muitas informações a respeito do comportamento de uma função podem ser obtidas a partir do seu gráfico.

Através dele, podemos ter uma visão do crescimento (ou decrescimento) da função, dos valores máximos (ou mínimos) que ela assume, de eventuais simetrias, do comportamento para valores de x muito grandes, etc.

Agora vamos analisar os gráficos já apresentados e observar os comportamentos das respectivas funções.

Exemplo 15

Observemos o gráfico da função $y = x + 2$.



Já vimos que esse gráfico é uma reta.

Quanto maior o valor dado a x, maior será o valor do correspondente $y = x + 2$. Dizemos, por isso, que essa função é *crescente*.

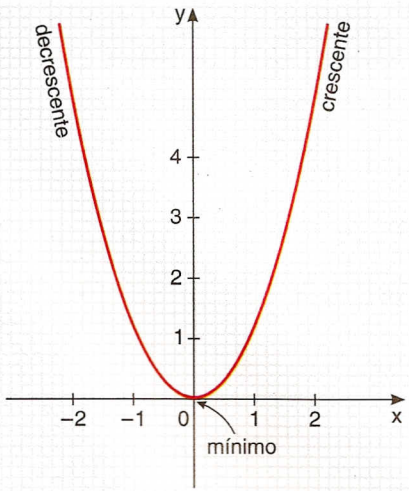
Quando os valores dados a x são cada vez maiores e positivos, os valores de $y = x + 2$ crescem ilimitadamente, e y pode tornar-se maior que qualquer número em que se pense. Basta, para isso, escolher um x suficientemente grande. Por exemplo, se quisermos $y > 1\,000\,000$, basta tomarmos $x > 999\,998$.

Por outro lado, quando os valores dados a x são cada vez menores e negativos, os valores de $y = x + 2$ decrescem ilimitadamente, e y pode tornar-se menor que qualquer número em que se pense. Basta, para isso, escolher um x suficientemente pequeno. Por exemplo, se quisermos $y < -2\,000\,000$, basta tomarmos $x < -2\,000\,002$.

Desse modo, o conjunto imagem dessa função é $Im = \mathbb{R}$.

Exemplo 16

Observemos o gráfico da função $y = x^2$.



Já vimos que esse gráfico é uma parábola.

Para $x \geqslant 0$, quanto maior o valor dado a x, maior será o valor do correspondente $y = x^2$.

Para $x \leqslant 0$, quanto maior o valor dado a x, menor será o valor do correspondente $y = x^2$.

Dizemos, então, que:

- para $x \geqslant 0$, essa função é *crescente*.
- para $x \leqslant 0$, essa função é *decrescente*.

Para $x = 0$, temos $y = 0$, e para $x \neq 0$, temos $y > 0$. Dizemos, por isso, que $x = 0$ é um ponto de *mínimo* da função.

Observe que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.

Quando os valores dados a x são cada vez maiores e positivos, os valores de $y = x^2$ crescem ilimitadamente, e y pode tornar-se maior que qualquer número em que se pense.

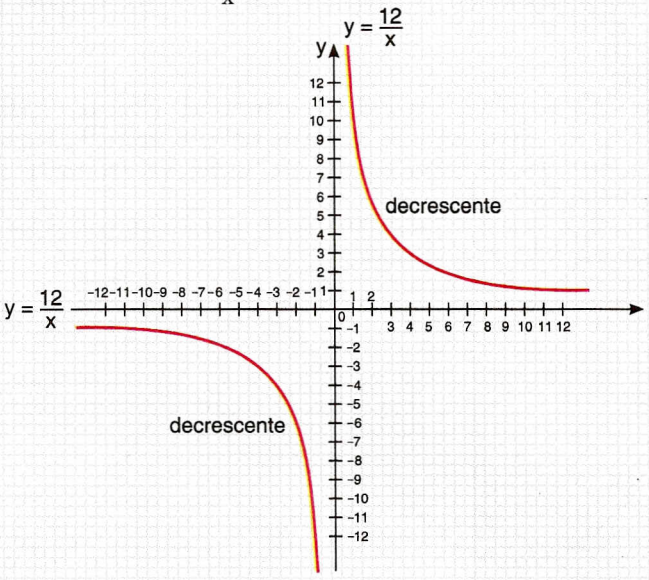
Quando os valores dados a x são cada vez menores e negativos, os valores de $y = x^2$ crescem ilimitadamente, e y pode tornar-se maior que qualquer número em que se pense.

Notamos também que $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$ e $f(-2) = 4$, $f(3) = 9$ e $f(-3) = 9$, etc.

De modo geral, $f(x) = x^2$ e $f(-x) = (-x)^2 = x^2$; portanto, $f(x) = f(-x)$ para todo x. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao eixo y.

Exemplo 17

Observemos o gráfico da função $y = \frac{12}{x}$, com $x \neq 0$.



Já vimos que esse gráfico é uma hipérbole.

Para $x > 0$, essa função é decrescente, e para $x < 0$ ela também é decrescente.

Para os valores de x positivos e próximos de zero, os valores dos correspondentes y crescem ilimitadamente.

Vejamos a tabela:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
y	120	1 200	12 000	120 000	1 200 000

Para os valores de x negativos e próximos de zero, os valores dos correspondentes y decrescem ilimitadamente. Vejamos a tabela:

x	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001	−0,00001
y	−120	−1 200	−12 000	−120 000	−1 200 000

Quando x assume valores positivos cada vez maiores, os valores dos correspondentes y são positivos e cada vez menores, aproximando-se de zero. Vejamos a tabela:

x	10	100	1 000	10 000	100 000
y	1,2	0,12	0,012	0,0012	0,00012

Quando x assume valores negativos cada vez menores, os valores dos correspondentes y são negativos e cada vez mais próximos de zero. Vejamos a tabela:

x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000
y	−1,2	−0,12	−0,012	−0,0012	−0,00012

Os passos anteriores mostram que Im = $\mathbb{R}^*$.

Notamos também que f(1) = 12 e f(−1) = −12; f(2) = 6 e f(−2) = −6; f(3) = 4 e f(−3) = −4; etc.

De modo geral, $f(x) = \frac{12}{x}$ e $f(-x) = \frac{12}{(-x)} = -\frac{12}{x} = -f(x)$; logo, $f(x) = -f(-x)$ para todo x; portanto, o gráfico é simétrico em relação à origem.

Resumo

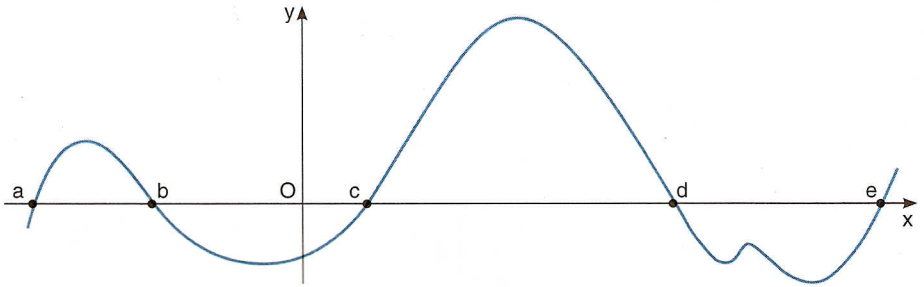
Analisando o gráfico de uma função qualquer y = f(x), podemos descobrir algumas propriedades notáveis. Vejamos:

1ª) *O sinal da função*

Os pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox apresentam ordenadas y = 0, ou seja, suas abscissas x_0 são tais que $f(x_0) = 0$. Essas abscissas x_0 são os *zeros* ou *raízes* da função *f*.

Os pontos do gráfico situados acima do eixo Ox apresentam ordenadas $y > 0$, ou seja, suas abscissas x_0 acarretam $f(x_0) > 0$.

Já os pontos do gráfico situados abaixo do eixo Ox apresentam ordenadas $y < 0$, ou seja, suas abscissas x_0 acarretam $f(x_0) < 0$. Vejamos:



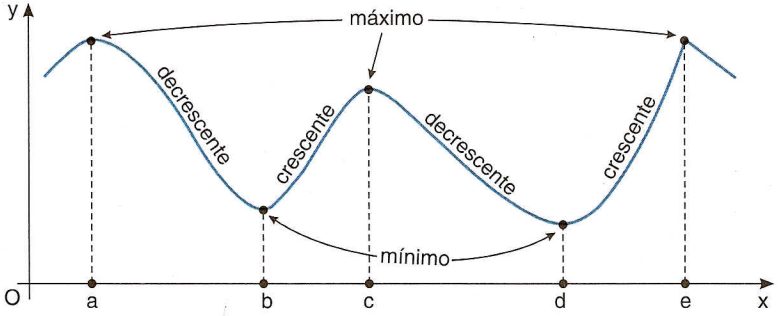
Nesse exemplo, temos:

- f(a) = 0, f(b) = 0, f(c) = 0, f(d) = 0 e f(e) = 0 (*a*, *b*, *c*, *d*, e *e* são as raízes).
- $f(x) > 0$ para $a < x < b$, para $c < x < d$ ou para $x > e$.
- $f(x) < 0$ para $x < a$, para $b < x < c$ ou para $d < x < e$.

2ª) Se, para quaisquer valores x_1 e x_2 de um conjunto *A* (contido no domínio *D*), com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$, então *f* é *crescente* em *A*.

3ª) Se, para quaisquer valores x_1 e x_2 de um conjunto *A*, com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$, então *f* é *decrescente* em *A*.

Observe:



Nesse exemplo, *f* é crescente nos intervalos $b < x < c$ e $d < x < e$, ao passo que *f* é decrescente nos intervalos $a < x < b$ e $c < x < d$.

4ª) Seja *A* um subconjunto do domínio *D* e seja $x_0 \in A$.

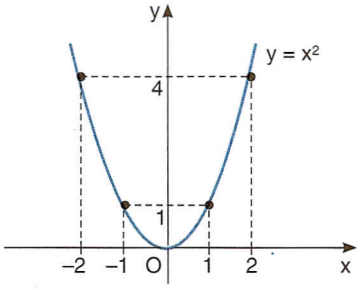
Se, para todo *x* pertencente a *A*, temos $f(x) \geq f(x_0)$, então x_0 é o ponto de *mínimo* de *f* em *A*, e $f(x_0)$ é o *valor mínimo* de *f* em *A*.

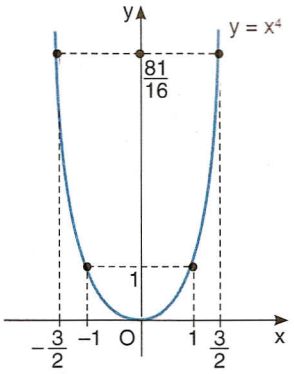
Se, para todo *x* pertencente a *A*, temos $f(x) \leq f(x_0)$, então x_0 é o ponto de *máximo* de *f* em *A*, e $f(x_0)$ é o *valor máximo* de *f* em *A*.

No exemplo anterior:

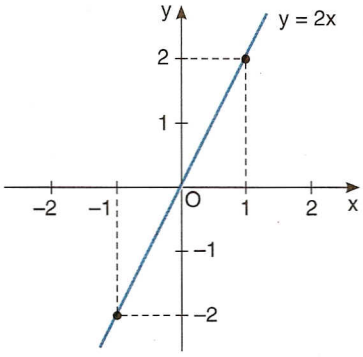
- *a*, *c* e *e* são pontos de máximo.
- *b* e *d* são pontos de mínimo.

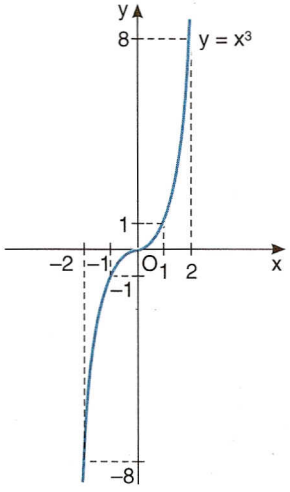
5ª) Se f(–x) = f(x) para todo x, então f tem o gráfico simétrico em relação ao eixo y. Nesse caso, dizemos que f é uma *função par*.





6ª) Se f(–x) = –f(x) para todo x, então f tem o gráfico simétrico em relação à origem. Nesse caso, dizemos que f é uma *função ímpar*.

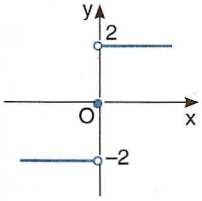




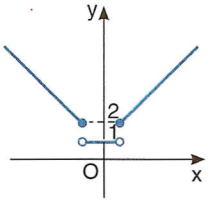
Exercícios

39 Determine a imagem de cada uma das funções representadas pelos gráficos abaixo:

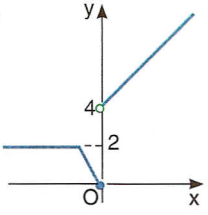
a)



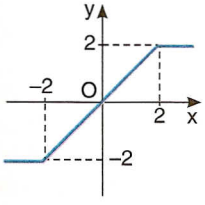
c)



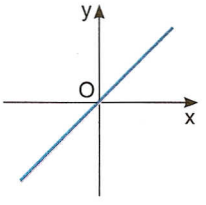
e)



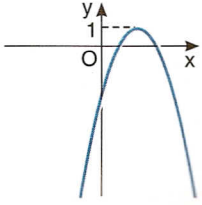
b)



d)

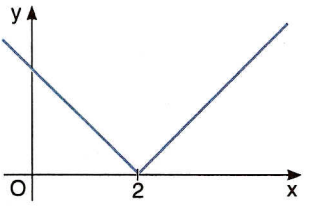


f)

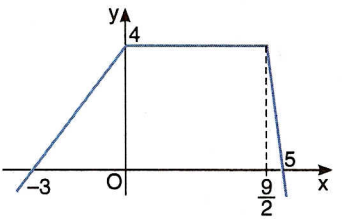


40 Em cada caso, o gráfico representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Especifique os intervalos em que a função é crescente, decrescente ou constante:

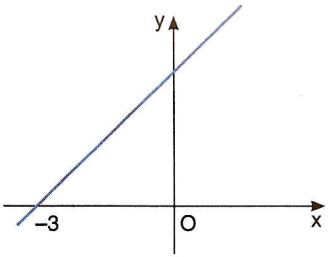
a)



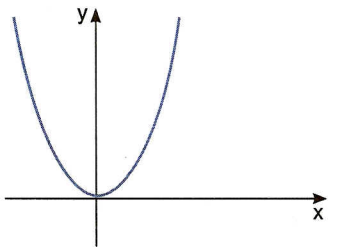
b)



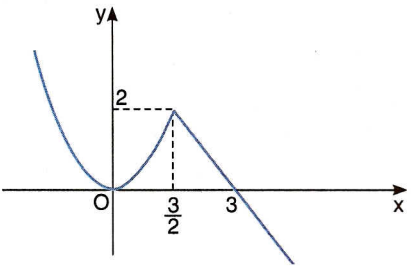
c)



d)



41 O gráfico representa uma função f definida em $\mathbb{R}$. Assinale V ou F nas sentenças seguintes, justificando as falsas:



a) $f(2) = \frac{3}{2}$

b) $f(4) > f(-1)$

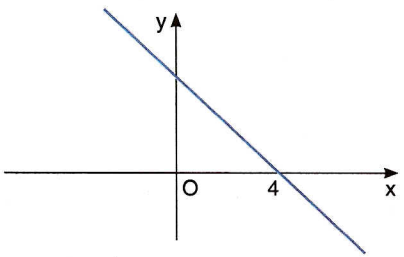
c) f é decrescente para $x \leq 0$ ou $x \geq \frac{3}{2}$.

d) As raízes de f são 0 e 3.

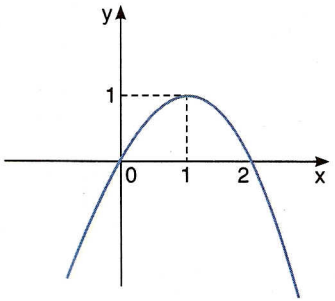
e) $f(-2) + f(2) = 0$

42 Estude o sinal de cada uma das funções cujos gráficos estão representados abaixo, destacando a(s) raiz(ízes), quando houver:

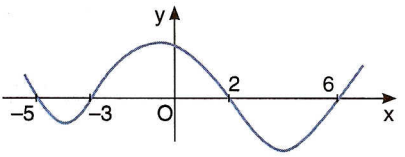
a)



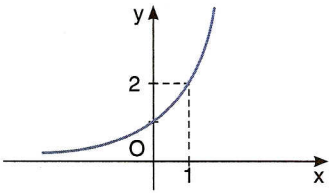
b)



c)



d)



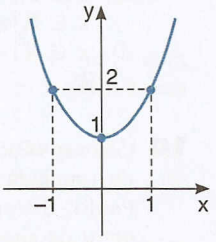
43 Assinale *P* se a função é par, *I* se a função é ímpar, ou *0* se a função não é par nem ímpar:

a) $f(x) = 2x$

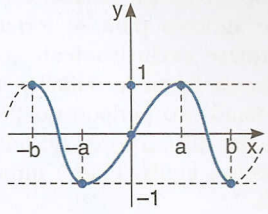
b) $f(x) = 3x^2$

c) $f(x) = 3x + 5$

d)

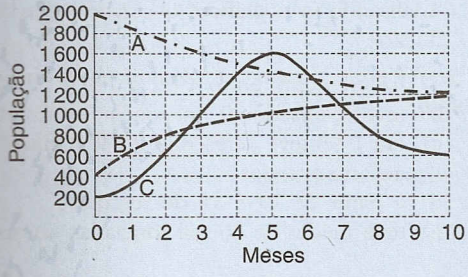


e)



Testes de vestibulares

1 (UF-ES) Num tanque, as variações na população de espécies de peixes *A*, *B* e *C* são descritas, no período de 10 meses, pelos gráficos abaixo:



Assinale a alternativa *correta*:

a) No período de 0 a 2 meses, a população *B* manteve-se menor que a *C*.

b) No quinto mês, havia menos de 3500 peixes nesse tanque.

c) No período de 0 a 5 meses, as populações *B* e *C* mantiveram-se crescentes.

d) A população *C* atingiu o seu máximo no terceiro mês.

e) No período de 3 a 7 meses, a população *B* manteve-se maior que a *A*.

2 (Uneb-BA) Para uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que satisfaz as condições

I. $f(x + y) = f(x) + f(y)$

II. $f(1) = 3$,

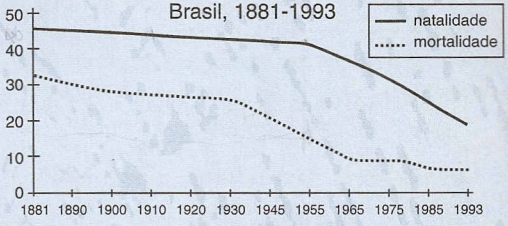
o valor de $f(3)$ é igual a:

a) 1 c) 6 e) 27

b) 3 d) 9

3 (UF-RS) A taxa de crescimento natural de uma população é igual à diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade, cujas evoluções estão representadas no gráfico a seguir.

Evolução das taxas de natalidade e mortalidade (por mil)
Brasil, 1881-1993



Fontes: Censos demográficos e PNADs.
Fonte: Unicef. *A infância brasileira nos anos 90*. Brasília, nov. 1998.

Entre as opções abaixo, a maior taxa de crescimento natural da população ocorreu no ano de:

a) 1881 c) 1930 e) 1993

b) 1900 d) 1955

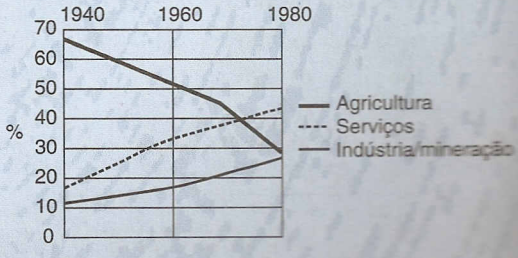
4 (UFF-RJ) Uma função real *f* de variável real é tal que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e $f(x + 1) = x\, f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O valor de $f\left(\frac{7}{2}\right)$ é:

a) π c) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e) $\frac{\pi\sqrt{7}}{15}$

b) $7\sqrt{\pi}$ d) $\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

5 (Enem-MEC) O gráfico mostra a porcentagem da força de trabalho brasileira em 40 anos, com relação aos setores agrícola, de serviços e industrial/mineral.



A leitura do gráfico permite constatar que:

a) Em 40 anos, o Brasil deixou de ser essencialmente agrícola para se tornar uma sociedade quase exclusivamente industrial.
b) A variação da força de trabalho agrícola foi mais acentuada no período de 1940 a 1960.
c) Por volta de 1970, a força de trabalho agrícola tornou-se equivalente à industrial e de mineração.
d) Em 1980, metade dos trabalhadores brasileiros constituía a força de trabalho do setor agrícola.
e) De 1960 a 1980, foi equivalente o crescimento percentual de trabalhadores nos setores industrial/mineral e de serviços.

6 (UF-CE) Considere a função real definida por $f(x) = \frac{2x + 3}{\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}}$, $x \neq -\frac{3}{2}$.

Então o valor da soma $1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \ldots + 20 \cdot f(20)$ é:

a) 120 c) 210 e) 1 260
b) 600 d) 620

7 (Unisinos-RS) Suponha que o número de carteiros necessários para distribuir, em cada dia, as correspondências entre as residências de um bairro seja dado pela função $f(x) = \frac{22x}{500 + 2x}$, em que x é o número de residências e $f(x)$ é o número de carteiros.

Se foram necessários 6 carteiros para distribuir, em um dia, estas correspondências, o número de residências desse bairro, que as receberam, é:

a) 300 c) 400 e) 460
b) 340 d) 420

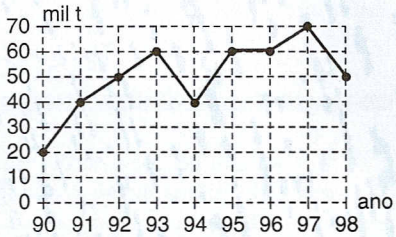
8 (UFSM-RS) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t) = at^2 + b$, sendo $v(t)$ o número de elementos vivos no tempo t (meses). Sabendo-se que o último frango morreu quando $t = 12$ meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estava viva no 10º mês é:

a) 80 c) 120 e) 300
b) 100 d) 220

9 (UPF-RS) O domínio da função $f(x) = \frac{\sqrt{x + 5}}{x^2 + 3x - 18}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \geq x \geq 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5 \text{ e } x < 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5 \text{ e } x \neq 3\}$
e) $\mathbb{R}^*$

10 (Vunesp-SP) O gráfico representa, em milhares de toneladas, a produção, no Estado de São Paulo, de um determinado produto agrícola entre os anos de 1990 e 1998.



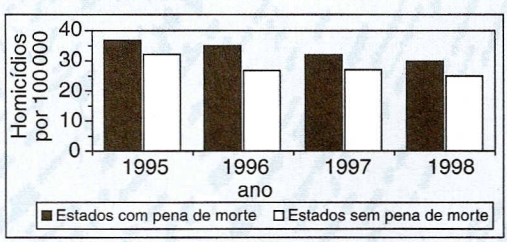
Analisando-se o gráfico, observa-se que a produção:

a) foi crescente entre 1992 e 1995.
b) teve média de 40 mil toneladas ao ano.
c) em 1993 teve acréscimo de 30% em relação ao ano anterior.
d) a partir de 1995 foi decrescente.
e) teve média de 50 mil toneladas ao ano.

11 (UF-PI) Se $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, $p = 10^8$ e $q = 10^{10}$, então o valor de $\frac{f(p) - f(q)}{q - p}$ é:

a) 10^8 c) $\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$
b) 10^{10} d) $-\frac{2}{3}$

12 (Enem-MEC) O gráfico compara o número de homicídios por grupo de 100 000 habitantes entre 1995 e 1998 nos EUA, em Estados com e sem pena de morte.



Fonte: Revista *Carta Capital*, 6/12/2000.

Com base no gráfico, pode-se afirmar que:

a) a taxa de homicídios cresceu apenas nos Estados sem pena de morte.

b) nos Estados com pena de morte a taxa de homicídios é menor que nos Estados sem pena de morte.
c) no período considerado, os Estados com pena de morte apresentaram taxas maiores de homicídios.
d) entre 1996 e 1997, a taxa de homicídios permaneceu estável nos Estados com pena de morte.
e) a taxa de homicídios nos Estados com pena de morte caiu pela metade no período considerado.

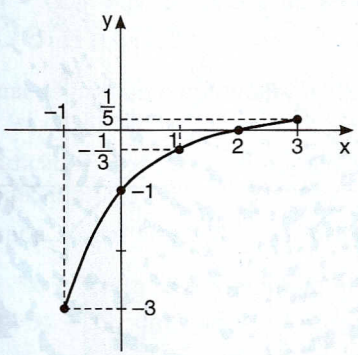
13 (UFF-RJ) Uma fábrica utiliza dois tanques para armazenar combustível.
Os níveis de combustível, H_1 e H_2, em cada tanque, são dados pelas expressões:

$H_1(t) = 150\ t^3 - 190\ t + 30$ e
$H_2(t) = 50\ t^3 + 35\ t + 30$,

sendo t o tempo em hora.
O nível de combustível de um tanque é igual ao do outro no instante inicial (t = 0) e, também, no instante:

a) t = 0,5 h
b) t = 1,0 h
c) t = 1,5 h
d) t = 2,0 h
e) t = 2,5 h

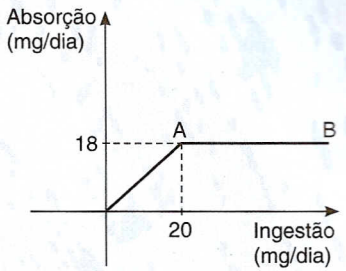
14 (Fuvest-SP) A figura a seguir representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \frac{x + a}{bx + c}$ para $-1 \leq x \leq 3$.



Pode-se concluir que o valor de b é:

a) –2
b) –1
c) 0
d) 1
e) 2

15 (UF-MG) Observe o gráfico, em que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo das abscissas.



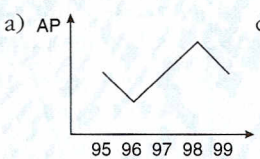
Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia.
A única afirmativa *falsa* relativa ao gráfico é:

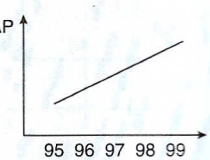
a) A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.
b) A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.
c) Para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.
d) Para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

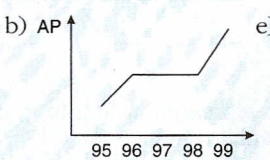
16 (Enem-MEC) O quadro a seguir apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores entre 1995 e 1999.

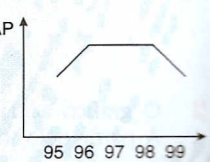
	Safra				
	1995	1996	1997	1998	1999
Produção (em mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade (em kg/hectare)	1 500	2 500	2 500	2 500	4 000

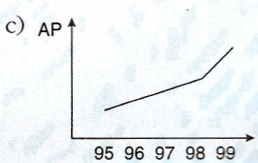
O gráfico que melhor representa a área plantada (AP) no período considerado é:

a) 

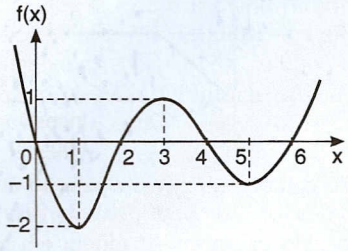
d) 

b) 

e) 

c) 

17 (Funrei-MG) Na figura abaixo, está representado o gráfico de uma função real de variável real y = f(x):



Considerando os elementos desse gráfico, analise as afirmativas seguintes:

I. A função f em questão possui exatamente 3 raízes reais.

II. A função f é crescente no intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{3}\right]$.

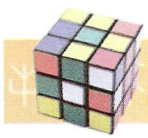
III. A função f é decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3}, \frac{9}{2}\right]$.

IV. $f(3) + f(1) < f(2) + f(5)$.

V. $f\left(\frac{19}{3}\right) + f\left(-\frac{19}{3}\right) = 0$.

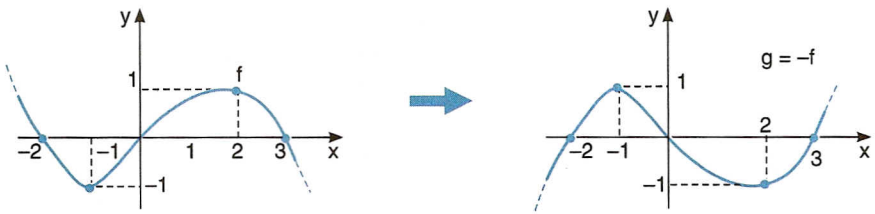
De acordo com esses dados, a alternativa correta é:

a) Todas as afirmativas são falsas.
b) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Apenas a afirmativa V é falsa.
d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.



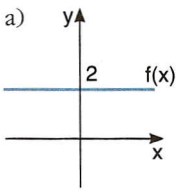
Desafios

1 Observe o gráfico da função real f. A partir dele, é possível obter o gráfico da função g, tal que $g(x) = -f(x)$. Basta notar que a imagem de um número real x obtida pela aplicação de g é *oposta* à imagem desse mesmo x obtida pela aplicação da f. Acompanhe (lembre que, se x_0 é *raiz*, então $f(x_0) = 0$):

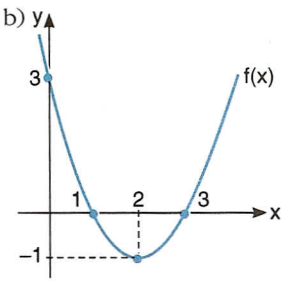


Esse mesmo raciocínio permitiria obter, sem dificuldade, os gráficos de 1 + f(x) (a imagem de cada elemento x ficaria aumentada de 1 unidade), 3 · f(x), f(x) – 2, etc.
Agora, em cada item abaixo, faça um esboço dos gráficos de g e h, tais que $g(x) = f(x) + 2$ e $h(x) = -f(x)$, a partir do gráfico de f.

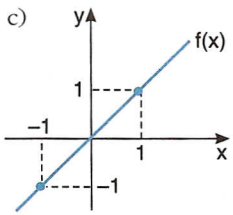
a)



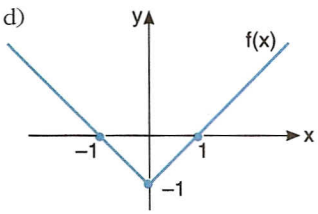
b)



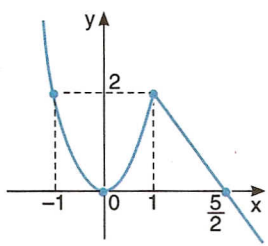
c)

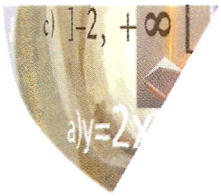


d)



2 O gráfico ao lado representa a função g, dada por $g(x) = -2f(x) + 1$. A partir dele, obtenha o gráfico de f.





3

FUNÇÃO AFIM

1 ○ Introdução

Photodisc

Uma conta telefônica apresenta apenas duas parcelas: a referente à assinatura, que custa R$ 25,00, e a referente aos pulsos, que representam o tempo de uso da linha para fazer ligações locais ao custo de R$ 0,08 cada.

Qual o valor da conta para 100 pulsos?

$$v = \text{pulsos} + \text{assinatura} = R\$\ 0{,}08 \cdot 100 + R\$\ 25{,}00 =$$
$$= R\$\ 8{,}00 + R\$\ 25{,}00 = R\$\ 33{,}00$$

Se o consumo fosse de 200 pulsos, qual seria o valor da conta?

$$v = R\$\ 0{,}08 \cdot 200 + R\$\ 25{,}00 = R\$\ 16{,}00 + R\$\ 25{,}00 = R\$\ 41{,}00$$

Podemos notar que, para cada número x de pulsos, há um certo valor $v(x)$ da conta telefônica. O valor de $v(x)$ é uma função de x:

$$v(x) = 0{,}08 \cdot x + 25,$$

que é um exemplo de *função polinomial do 1º grau* ou *função afim*.

2 ○ Definição

Chama-se *função polinomial do 1º grau*, ou *função afim*, a qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais dados e $a \neq 0$.

Na função $f(x) = ax + b$, o número a é chamado de coeficiente de x e o número b é chamado termo constante.

Vejamos alguns exemplos de funções polinomiais do 1º grau:

1. $f(x) = 5x + 7$, em que $a = 5$ e $b = 7$
2. $f(x) = -3x - 11$, em que $a = -3$ e $b = -11$
3. $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{5}$, em que $a = \frac{1}{4}$ e $b = -\frac{3}{5}$
4. $f(x) = 2x$, em que $a = 2$ e $b = 0$

3 ○ Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy.

Exemplo 1

Vamos construir o gráfico da função $y = 2x - 3$.

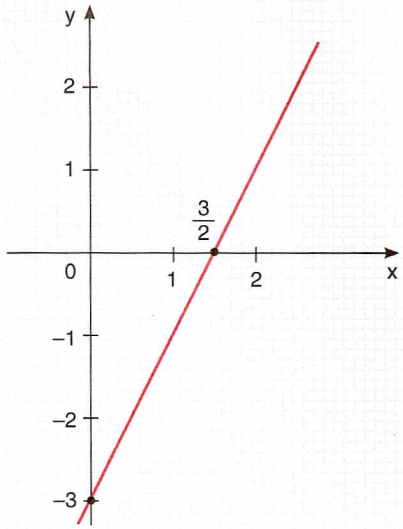
Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua.

Para $x = 0$, temos $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$; portanto, um ponto é $(0, -3)$.

Para $y = 0$, temos $0 = 2x - 3$; portanto, $x = \frac{3}{2}$ e outro ponto é $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Marcamos esses dois pontos no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta.

x	y
0	–3
$\frac{3}{2}$	0



Exemplo 2

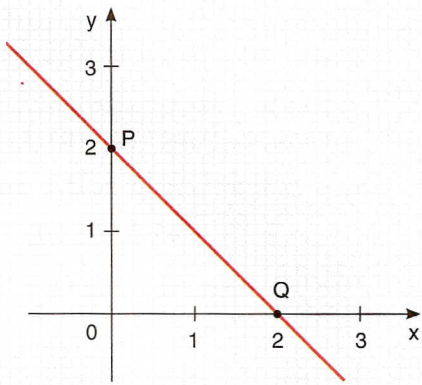
Vamos construir o gráfico da função $y = -x + 2$.

Para $x = 0$, temos $y = -0 + 2 = 2$; portanto, um ponto é $P(0, 2)$.

Para $y = 0$, temos $0 = -x + 2$; portanto, $x = 2$ e outro ponto é $Q(2, 0)$.

x	y
0	2
2	0

A lei $y = -x + 2$ também é chamada *equação da reta* $\overleftrightarrow{PQ}$.



Exemplo 3

Vejamos como obter a equação da reta que passa pelos pontos $A(-2, 1)$ e $B(3, 4)$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ tem equação $y = ax + b$. Precisamos determinar a e b.

Como $(-2, 1)$ pertence à reta, temos:

$$1 = a(-2) + b, \text{ ou seja, } -2a + b = 1$$

Como $(3, 4)$ pertence à reta, temos:

$$4 = a(3) + b, \text{ ou seja, } 3a + b = 4$$

Assim, a e b satisfazem o sistema

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 3a + b = 4 \end{cases},$$

cuja solução é $a = \frac{3}{5}$ e $b = \frac{11}{5}$.

Portanto, a equação procurada é:

$$y = \frac{3}{5} \cdot x + \frac{11}{5}$$

Exercícios

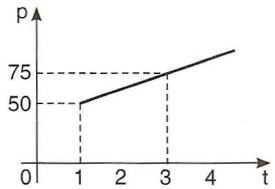
1 Construa os gráficos das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = x + 2$
b) $y = -x + 1$
c) $y = 2x - 1$
d) $y = x$
e) $y = -2x$

2 O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 560,00. Para aumentar sua receita, ele faz plantões noturnos em uma boate, onde recebe R$ 60,00 por noite de trabalho.

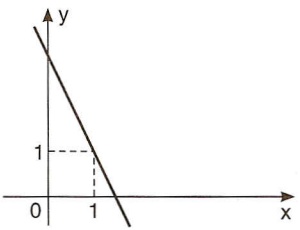
a) Se em um mês o segurança fizer 3 plantões, que salário receberá?
b) Qual é o salário final y quando ele realiza x plantões?
c) Represente graficamente a função obtida no item anterior, lembrando que seu domínio é o conjunto dos números *naturais*.

3 (UC-GO) Um pecuarista mede o desenvolvimento de um bezerro em quilogramas, todos os meses. Ligando os pontos por ele observados num gráfico obtém-se a figura ao lado. Mantida essa relação entre o tempo (t), medido em meses, e o "peso" p, medido em kg, qual será o "peso" do bezerro no 6º mês?



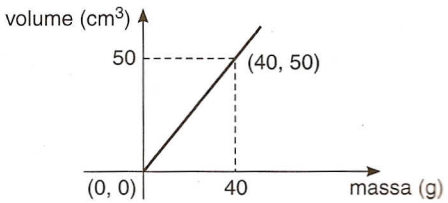
4 A função f, definida por $f(x) = -2x + m$, está representada ao lado.

Qual é o valor de $\frac{f(-1) + f(0)}{f(2)}$?

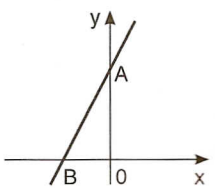


5 (Vunesp-SP) Apresentamos ao lado o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0 °C.
Baseado nos dados do gráfico, determine:

a) a lei da função apresentada no gráfico;
b) qual é a massa (em gramas) de 30 cm^3 de álcool.



6 (PUC-MG)
A reta representada no gráfico tem equação $5x - 2y + 10 = 0$ e intercepta os eixos cartesianos nos pontos A e B. Qual é a medida da área do triângulo OBA, em unidades de área?



7 Leia o texto abaixo e, em seguida, responda às questões:

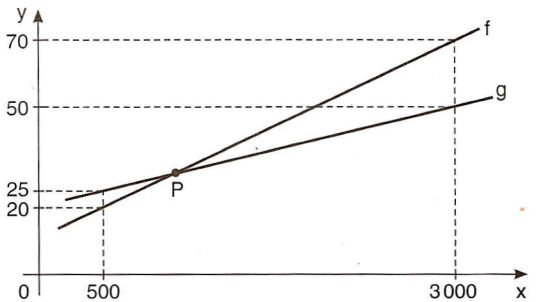
> Na última terça-feira, São Paulo voltou a mergulhar em seu pesadelo recorrente. A greve de metroviários, uma insistente chuva fina e a suspensão pelo segundo dia consecutivo do rodízio de veículos fizeram com que o paulistano ficasse parado em um congestionamento que, às 19 horas, chegou a 215 quilômetros de extensão. É o segundo maior índice de lentidão registrado pela Companhia de Engenharia de Tráfego (CET).
>
> Ano após ano, a situação se agrava. A CET estima que a monstruosa frota registrada na capital — 5,2 milhões de veículos, ou um para cada dois moradores — cresça na proporção de 500 carros por dia.
>
> (*Veja São Paulo*, 4/7/2001.)

a) De acordo com a notícia, como se expressa a frota de veículos v que haverá na cidade de São Paulo daqui a t anos (contados a partir da data da notícia)? Considere que um mês tem 30 dias.
b) Mantido tal crescimento, daqui a quantos meses a frota alcançará 6,1 milhões de veículos?

8 Há muitos anos, uma professora do ensino fundamental adotava o seguinte critério como nota de participação no bimestre: todo aluno começava com 10; quando ele deixava de fazer uma tarefa ou apresentava um comportamento inadequado em aula, recebia um "negativo", perdendo 0,4 na nota.

a) Qual seria a nota de participação de um aluno que recebesse 7 "negativos" no bimestre?
b) Em geral, como se expressaria a nota n de participação de um aluno que recebesse x "negativos"?
c) Se a prova tivesse peso 2 e a participação tivesse peso 1, quantos "negativos", no máximo, poderia receber um aluno que tirasse 5,0 na prova e necessitasse de média 6,0?

Para responder às questões de números 9 e 10 considere os dados que seguem.
Na figura abaixo têm-se os gráficos de duas funções do 1º grau, f e g, que se interceptam no ponto P.



9 (Puccamp-SP, adaptado) Quais são as coordenadas do ponto P?

10 (Puccamp-SP, adaptado) A capacidade térmica de um corpo (C) é definida como a razão entre a variação da quantidade de calor recebida pelo corpo e a variação da temperatura no intervalo considerado. Se os valores de f e g representam as temperaturas de dois corpos F e G, respectivamente, enquanto x representa a quantidade de calor por eles recebida, qual é a razão $\frac{C_F}{C_G}$ entre as capacidades térmicas de F e G?

4 Coeficientes da função afim

Já vimos que o gráfico da função afim $y = ax + b$ é uma reta.

O *coeficiente de x*, a, é chamado *coeficiente angular* da reta e, como veremos adiante, a está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox.

O *termo constante*, b, é chamado *coeficiente linear* da reta. Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy.

Exercícios

11 Identifique o coeficiente angular (a) e o coeficiente linear (b) de cada uma das seguintes funções do 1º grau:

a) $y = 2x - 5$
b) $y = \frac{-x + 1}{2}$
c) $y = \sqrt{2}\,x$
d) $y = (x - 1)^2 - x^2$

12 (FGV-SP) A receita mensal de vendas de uma empresa (y) relaciona-se com os gastos mensais com propaganda (x) por meio de uma função do 1º grau. Quando a empresa gasta R$ 10 000,00 por mês de propaganda, sua receita naquele mês é de R$ 80 000,00; se o gasto mensal com propaganda for o dobro daquele, a receita mensal cresce 50% em relação àquela.

a) Qual é a receita mensal se o gasto mensal com propaganda for de R$ 30 000,00?
b) Obtenha a expressão de y em função de x.

5 ○ Zero e equação do 1º grau

Chama-se *zero* ou *raiz* da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, o número real x tal que $f(x) = 0$.

Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Então, a *raiz* da função $f(x) = ax + b$ é a solução da equação do 1º grau $ax + b = 0$, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

Vejamos alguns exemplos.

1. Obtenção do *zero* da função $f(x) = 3x + 7$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

2. Cálculo da *raiz* da função $g(x) = -2x + 11$.

$$g(x) = 0 \Rightarrow -2x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{2}$$

3. Cálculo da abscissa do ponto em que o gráfico da função $h(x) = -3x - 5$ corta o eixo dos x. Nesse ponto devemos ter $h(x) = 0$ e daí:

$$-3x - 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

Exercícios

13 Resolva as seguintes equações de 1º grau:

a) $13(2x - 3) - 5(2 - x) = 5(-3 + 6x)$

b) $3(x + 2) = 2(x - 7) + x + 20$

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3x}{5} - \frac{2}{5}$

d) $\frac{2x - 3}{5} - \frac{11 - x}{3} = \frac{29}{30}$

e) $1 + \frac{5x - 36}{4} + \frac{2 - x}{2} = 2 + \frac{x - 12}{2}$

f) $-x + 4(2 - x) = -2x - (10 + 3x)$

14 (Unicap-PE) Elon, aluno adepto das brincadeiras com números, foi indagado sobre a idade de sua irmã. Eis a sua resposta: "Há oito anos, a idade dela era um quarto da idade que terá daqui a um ano". Qual a idade, em anos, da irmã de Elon?

15 (UF-PB) Uma herança foi dividida entre a viúva, a filha, o filho e o cozinheiro. A filha e o filho ficaram com a metade, distribuída na proporção de 4 para 3, respectivamente. A viúva ganhou o dobro do que coube ao filho, e o cozinheiro, R$ 500,00. Calcule o valor da herança.

16 Determine a raiz de cada uma das seguintes funções:

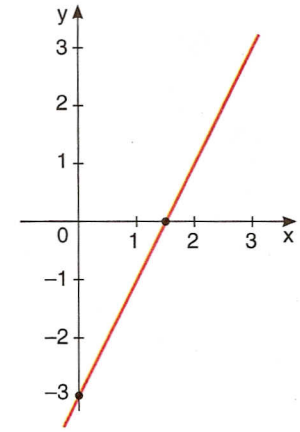
a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = -3x$ c) $f(x) = -x + 3$ d) $f(x) = (x - 1)^2 - (x + 2)^2$

17 Qual é a lei que define uma função afim de coeficiente angular igual a -2 e raiz igual a 3?

18 (UE-PA) Um executivo muito previdente distribui seus vencimentos mensais da seguinte maneira: $\frac{1}{8}$ para plano de saúde; $\frac{1}{4}$ para poupança; $\frac{1}{6}$ para alimentação e moradia e os R$ 6 600,00 restantes para lazer. Quanto o executivo poupa mensalmente?

6 ○ Crescimento e decrescimento

Consideremos a função do 1º grau $y = 2x - 3$. Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:



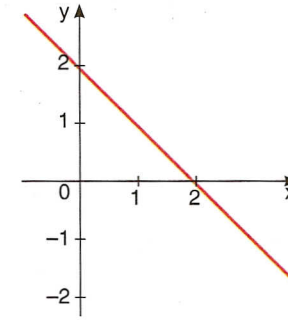
x aumenta

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−9	−7	−5	−3	−1	1	3	5

y aumenta

Notemos que, quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de y também aumentam. Dizemos, então, que a função $y = 2x - 3$ é *crescente*. Observe novamente seu gráfico.

Consideremos a função $y = -x + 2$. Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:



x aumenta

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	5	4	3	2	1	0	−1	−2

y diminui

Notemos que, quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de y diminuem. Dizemos, então, que a função $y = -x + 2$ é *decrescente*. Observe novamente seu gráfico.

Regra geral:

a função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é crescente quando o coeficiente de x é positivo ($a > 0$);

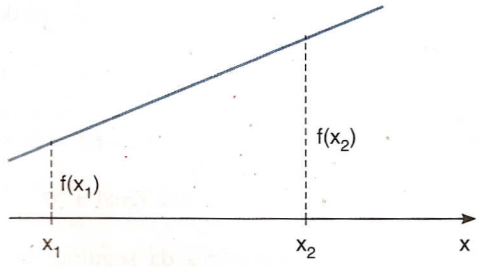
a função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é decrescente quando o coeficiente de x é negativo ($a < 0$).

Justificativa:

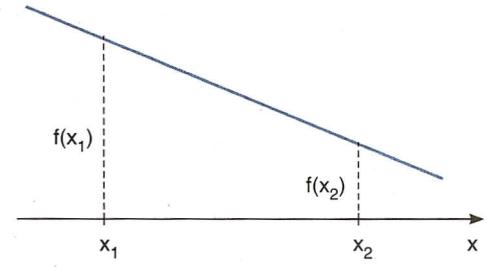
- para $a > 0$: se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$. Daí, $ax_1 + b < ax_2 + b$, de onde vem $f(x_1) < f(x_2)$.
- para $a < 0$: se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$. Daí, $ax_1 + b > ax_2 + b$, de onde vem $f(x_1) > f(x_2)$.

Resumo

Se $f(x) = ax + b$, temos:



f é crescente quando $a > 0$



f é decrescente quando $a < 0$

Exemplo 4

Vamos discutir, em função do parâmetro m, a variação (decrescente, constante, crescente) da função $y = (m - 1)x + 5$.

Quando, em uma expressão algébrica, existe uma variável principal e outras variáveis secundárias, estas são chamadas *parâmetros*. Na expressão $(m - 1)x + 5$, a variável principal é x, e m é um parâmetro.

O coeficiente de x nessa equação é $m - 1$. Assim, temos:

- a função é decrescente se $m - 1 < 0$, ou seja, se $m < 1$;
- a função é constante se $m - 1 = 0$, ou seja, se $m = 1$;
- a função é crescente se $m - 1 > 0$, ou seja, se $m > 1$.

Exercícios

19 Avalie se cada uma das funções abaixo é crescente ou decrescente em $\mathbb{R}$:

a) $y = 3x + 2$
b) $y = x - 10$
c) $y = -2x - 3$
d) $y = 3 - x$
e) $y = \sqrt{3}\,x$
f) $y = -1 - \sqrt{2}\,x$

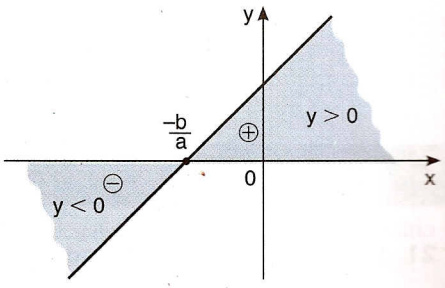
20 Discuta, em função do parâmetro m, a "variação" (crescente, decrescente ou constante) de cada uma das funções abaixo:

a) $y = (m + 2)x - 3$
b) $y = (4 - m)x + 2$

7 Sinal

Estudar o sinal de uma função qualquer $y = f(x)$ é determinar os valores de x para os quais y é positivo, os valores de x para os quais y é zero e os valores de x para os quais y é negativo.

Consideremos uma função afim $y = f(x) = ax + b$ e estudemos seu sinal. Já vimos que essa função se anula para $x = -\frac{b}{a}$ (raiz). Há dois casos possíveis:



1º) $a > 0$ (a função é crescente)

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$$

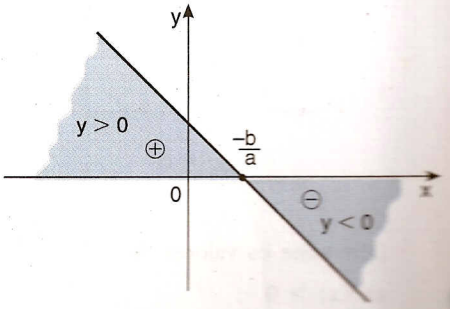
Conclusão: y é positivo para valores de x maiores que a raiz; y é negativo para valores de x menores que a raiz.

2º) $a < 0$ (a função é decrescente)

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

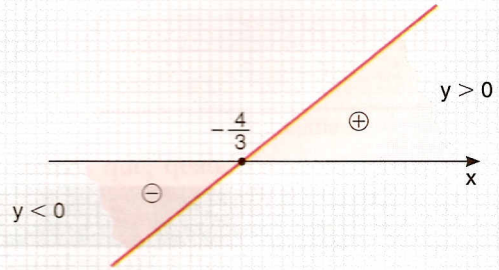
Conclusão: y é positivo para valores de x menores que a raiz; y é negativo para valores de x maiores que a raiz.



Exemplo 5

Vamos estudar o sinal da função $y = 3x + 4$.

Essa função polinomial do 1º grau apresenta $a = 3 > 0$ e raiz $x = -\frac{4}{3}$. Seu gráfico é crescente e corta o eixo Ox no ponto $-\frac{4}{3}$.

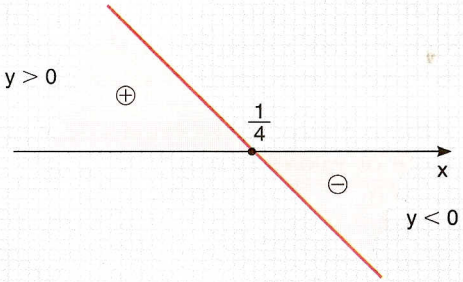


Sinal
$y > 0 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$
$y < 0 \Rightarrow x < -\frac{4}{3}$

Exemplo 6

Vamos estudar o sinal da função $y = -4x + 1$.

Essa função do 1º grau apresenta $a = -4 < 0$ e raiz $x = \frac{1}{4}$. Seu gráfico é decrescente e corta o eixo Ox no ponto $\frac{1}{4}$.



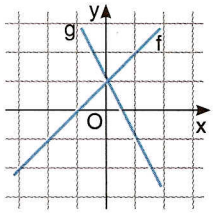
Sinal
$y > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{4}$
$y < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$

Exercícios

21 Estude o sinal de cada uma das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = -3x + 2$ c) $y = 5x$ d) $y = 3 - \frac{x}{2}$

22 Ao lado são dados os gráficos de duas funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$.



Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:

a) $f(x) > 0$ b) $g(x) < 0$ c) $f(x) \cdot g(x) = 0$

8 ○ Inequações

Vamos resolver inequações do 1º grau e algumas inequações nas quais pode ser aplicado o estudo de sinal da função afim.

Exemplo 7

Vejamos como resolver a inequação $3(x - 1) + 4 \leq x + 5$.

- *1º passo:* desenvolvemos os parênteses:

$$3x \underbrace{- 3 + 4}_{+1} \leq x + 5$$

- *2º passo:* passamos todos os termos que contêm a incógnita x para o 1º membro:

$$3x - x + 1 \leq 5$$

- *3º passo:* passamos todas as constantes para o 2º membro:

$$3x - x \leq 5 - 1$$
$$2x \leq 4$$

- *4º passo:* dividimos os dois membros pelo coeficiente de x:

$$x \leq \frac{4}{2}$$
$$x \leq 2$$
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$$

Exemplo 8

Vamos resolver a inequação $2 \leq 3x + 1 < x + 7$.
De fato são duas inequações simultâneas:

$$2 \leq 3x + 1 \quad \text{(I)} \quad \text{e} \quad 3x + 1 < x + 7 \quad \text{(II)}$$

Vamos resolver (I):

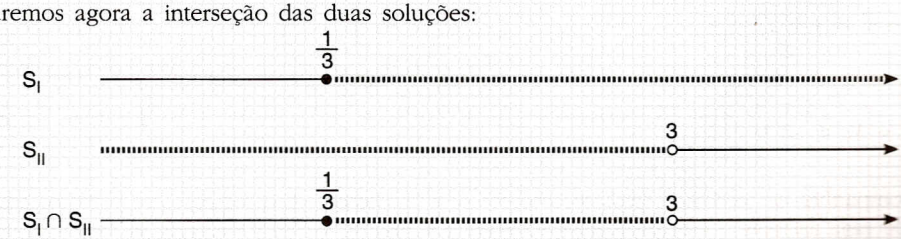
$$2 \leq 3x + 1 \Rightarrow -3x \leq 1 - 2 \Rightarrow -3x \leq -1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \quad (S_I)$$

(Observemos que, ao dividir ambos os membros por um número negativo, devemos inverter o sentido da desigualdade.)

Vamos resolver (II):

$$3x + 1 < x + 7 \Rightarrow 3x - x < 7 - 1 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \quad (S_{II})$$

Procuremos agora a interseção das duas soluções:

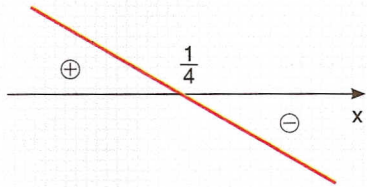


$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x < 3\right\}$$

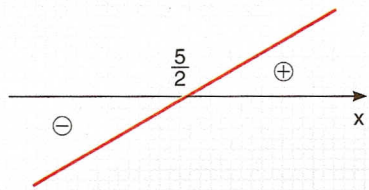
Exemplo 9

Resolvamos a inequação-produto $(1 - 4x)(2x - 5) \leqslant 0$.

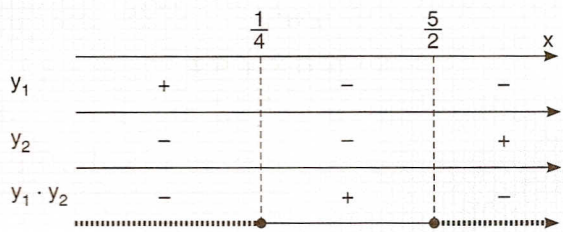
Façamos $y_1 = 1 - 4x$ e estudemos o sinal de y_1. Temos $a = -4 < 0$ e raiz $x = \frac{1}{4}$. Então:



Façamos $y_2 = 2x - 5$ e estudemos o sinal de y_2. Temos $a = 2 > 0$ e raiz $x = \frac{5}{2}$. Então:



Estudemos o sinal do produto $y_1 \cdot y_2$:



A inequação pergunta: "Para que valores de x temos $y_1 \cdot y_2 \leqslant 0$?".

Resposta: $x \leqslant \frac{1}{4}$ ou $x \geqslant \frac{5}{2}$

Exercícios

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $3x - 4 \leqslant x + 5$

b) $19 - 17x < -4 + x$

c) $2(x + 3) < -2(3x + 1)$

d) $x - \frac{1}{2} \geqslant \frac{3}{2} + 2x$

e) $\frac{x}{3} + \frac{x - 1}{2} + x \leqslant \frac{x - 2}{5} - \frac{x - 3}{4}$

24 Uma companhia de telefones celulares oferece a seus clientes duas opções: na primeira opção, cobra R$ 38,00 pela assinatura mensal e mais R$ 0,60 por minuto de conversação; na segunda, não há taxa de assinatura, mas o minuto de conversação custa R$ 1,10.

a) Qual é a opção mais vantajosa para 1 hora de conversação mensal?

b) A partir de quanto tempo deve-se optar pela primeira opção?

25 **ALINE** — Adão Iturrusgarai

(*Folha de S. Paulo*, 17/11/2001.)

Suponha que Aline tenha se comprometido a fazer depósitos mensais de R$ 40,00 para cobrir o "rombo" na sua conta corrente e, depois, criar uma poupança. O gerente do banco decidiu não mais cobrar juros sobre o saldo devedor a partir dessa data. (Despreze os centavos.)

a) Após n meses, qual será o saldo da conta de Aline?
b) Em quanto tempo seu saldo será de R$ 188,00?
c) Quantos meses serão necessários para Aline "sair do vermelho"?

26 (UF-SE) Na fabricação de um lote de peças de certo produto, o custo total é igual à soma de um valor fixo de R$ 400,00 com o custo de produção unitário de R$ 0,50. Se o preço unitário de venda dessas peças for de R$ 0,85, qual é o número mínimo de peças que devem ser fabricadas e vendidas para que se comece a ter lucro?

27 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $-2 < 3x - 1 < 4$
b) $-3 < -x < 1$
c) $-4 < 4 - 2x \leq 3$
d) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

28 Resolva, em $\mathbb{R}$, os seguintes sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2 \geq 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$

29 Uma churrascaria cobra, no almoço, R$ 12,00 por pessoa. Após as 15 h, esse valor cai para R$ 9,00. Estima-se que o custo *total* de um almoço seja de R$ 7,00 por pessoa. Em certo dia, 100 clientes almoçaram na churrascaria, sendo que x deles compareceram até as 15 h.

a) Determine a expressão que define o lucro L obtido nesse dia em função de x.
b) Determine o intervalo de variação de x a fim de que $300 < L < 400$.

30 (FGV-SP) Uma empresa B tem hoje um saldo devedor de R$ 300 000,00 e uma outra empresa C tem hoje um saldo devedor de R$ 250 000,00. O saldo devedor de B diminui R$ 6 000,00 por mês e o de C diminui R$ 2 500,00 por mês. A partir de quantos meses (contados de hoje) o saldo devedor de B ficará menor que o de C?

31 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações-produto:

a) $(3x + 3)(5x - 3) > 0$
b) $(4 - 2x)(5 + 2x) < 0$
c) $(6x - 1)(2x + 7) \leq 0$

32 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

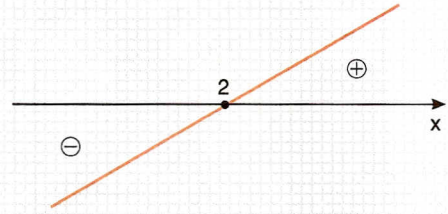
a) $(5x + 2)(2 - x)(4x + 3) > 0$
b) $(3x + 2)(-3x + 4)(x - 6) < 0$
c) $(1 - x) \cdot (x - 1) > 0$
d) $(2x - 1) \cdot (1 - 2x) < 0$

33 Quantos e quais números *inteiros* satisfazem a desigualdade $(2x - 1) \cdot (-x + 3) > 0$?

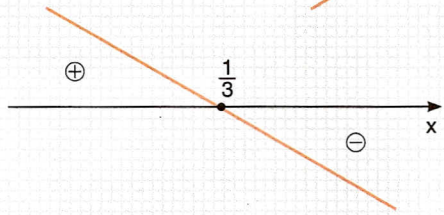
Exemplo 10

Vamos resolver a inequação-quociente $\frac{4x - 8}{2 - 6x} \geqslant 0$.

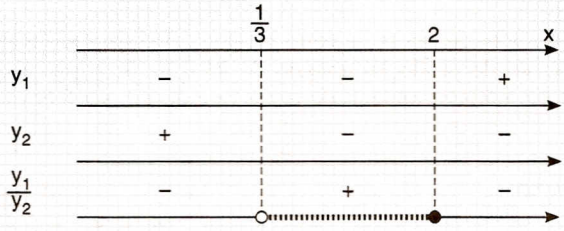
- *Estudo do sinal de* $y_1 = 4x - 8$
  $a = 4 > 0$ e raiz $x = 2$



- *Estudo do sinal de* $y_2 = 2 - 6x$
  $a = -6 < 0$ e raiz $x = \frac{1}{3}$



- *Estudo do sinal do quociente* $\frac{y_1}{y_2}$



A inequação pergunta: "Para que valores de x temos $\frac{y_1}{y_2} \geqslant 0$?".

Resposta: $\frac{1}{3} < x \leqslant 2$. (Notemos que $\frac{y_1}{y_2} = 0$ somente se $y_1 = 0$ e $y_2 \neq 0$. Isso ocorre quando $x = 2$, mas *não* ocorre quando $x = \frac{1}{3}$.)

Exemplo 11

Vamos resolver a inequação $\frac{x + 2}{1 - x} \leqslant 2$.

Se, simplesmente, multiplicarmos ambos os membros por $1 - x$ (que pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor de x), não saberemos se o sinal da desigualdade deverá ser mantido ou invertido. Por isso, utilizaremos o seguinte procedimento:

$$\frac{x + 2}{1 - x} \leqslant 2 \Rightarrow \frac{x + 2}{1 - x} - 2 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{(x + 2) - 2(1 - x)}{1 - x} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{3x}{1 - x} \leqslant 0$$

A partir desse ponto, utilizamos a mesma técnica do exemplo 10.

Exemplo 12

Outra aplicação do estudo do sinal seria a obtenção do domínio de uma função.

Vejamos como obter o domínio da função definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{1 - 2x}}$.

Devemos impor que o radicando seja não negativo, isto é:

$$\frac{x + 1}{1 - 2x} \geqslant 0$$

E agora aplicamos a mesma técnica vista no exemplo 10.

Exercícios

34 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{2x + 1}{x + 2} > 0$

b) $\frac{3x - 2}{3 - 2x} < 0$

c) $\frac{3 - 4x}{5x + 1} \geqslant 0$

d) $\frac{(1 - 2x)(3 + 4x)}{(4 - x)} > 0$

35 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{3x - 2}{1 - x} \leqslant -3$

b) $\frac{1}{x - 1} < \frac{2}{x - 2}$

c) $\frac{1}{x} \leqslant 2$

36 (UF-CE) Qual é o conjunto solução da inequação $\frac{1}{2x + 1} < \frac{1}{1 - x}$, tendo como conjunto universo o conjunto dos números reais?

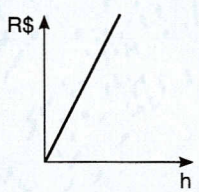
37 Encontre os valores de x para os quais está definida a função $f(x) = \sqrt{(x - 1)(-x + 4)}$.

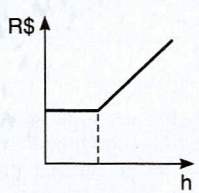
38 Qual é o domínio da função f definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 4x}}$?

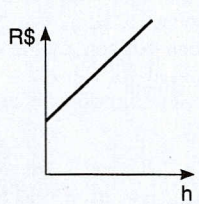
39 (Fuvest-SP) Qual é o conjunto solução da inequação $\frac{x}{x + 1} > x$?

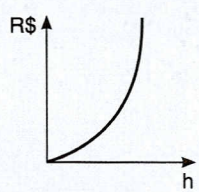
Testes de vestibulares

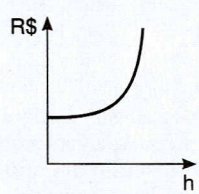
1 (UF-PA) Uma loja no centro de Belém aluga microcomputadores para usuários que desejam navegar pela Internet. Para utilizar esse serviço, o usuário paga uma taxa de R$ 2,00 acrescida de R$ 3,00 por hora de utilização da máquina. O gráfico que melhor representa o preço desse serviço é:

a)


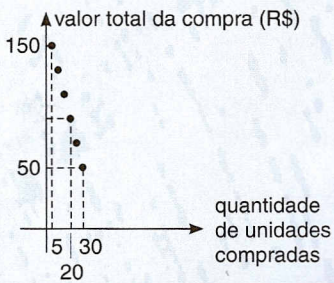
b)


c)


d)


e)


2 (UE-RJ) A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada, no gráfico abaixo, por 6 pontos de uma mesma reta.



Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará por unidade, em reais, o equivalente a:

a) 4,50 b) 5,00 c) 5,50 d) 6,00

3 (U. F. Uberlândia-MG) O conjunto dos números reais que satisfazem a inequação $\frac{x - 2}{5} + \frac{x + 1}{3} \geqslant x$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{7}\right\}$

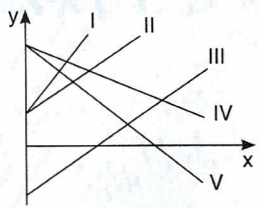
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{15}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{7}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{15}\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

4 (U. Gama Filho-RJ)

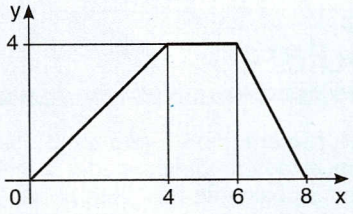


g(x) = –x + 60
h(x) = 2x – 30
u(x) = 2x + 20
w(x) = 4x + 20

No sistema de eixos coordenados, as retas I, II, III, IV e V representam os gráficos de diferentes funções *g*, *h*, *u* e *w*, cujas equações são dadas no quadro.
Fazendo corresponder cada função ao respectivo gráfico, a opção correta é:

a) I — w; II — u; III — h; IV — g
b) I — w; II — h; III — u; V — g
c) I — u; II — h; III — w; IV — g
d) I — u; II — h; III — w; V — g
e) I — u; II — w; III — h; V — g

5 (UFF-RJ) O gráfico da função *f* está representado na figura:



Sobre a função *f* é *falso* afirmar que:

a) f(1) + f(2) = f(3)
b) f(2) = f(7)
c) f(3) = 3f(1)
d) f(4) – f(3) = f(1)
e) f(2) + f(3) = f(5)

6 (UF-CE) Existem *n* números inteiros que são soluções, simultaneamente, das inequações $3x - 4 \leq 5$ e $6 - 5x < 17$.
Assinale a opção que apresenta o valor correto de *n*:

a) 7
b) 6
c) 5
d) 4
e) 3

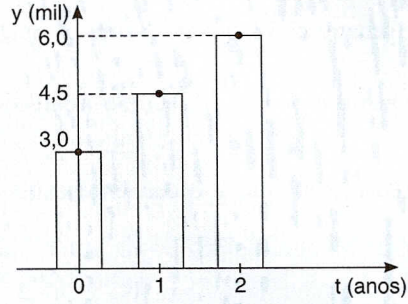
7 (Vunesp-SP) Duas pequenas fábricas de calçados, *A* e *B*, têm fabricado, respectivamente, 3000 e 1100 pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica *A* aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica *B* aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção da fábrica *B* superará a produção da *A* a partir de:

a) março.
b) maio.
c) julho.
d) setembro.
e) novembro.

8 (PUC-RJ) Seja *k* um número positivo. Então o conjunto dos números *x* tais que $\frac{x - k}{k} \geq 1$ e $\frac{x + k^2}{k} < k + 2$ é:

a) vazio.
b) formado por um elemento único.
c) $[4, +\infty)$.
d) $(-\infty, 4)$.
e) $[-4, 2)$.

9 (PUC-MG) O gráfico abaixo registra o reflorestamento de uma área em t = 0 (ano de 1996), t = 1 (ano de 1997), t = 2 (ano de 1998), e assim por diante. Admitindo-se constante a taxa de reflorestamento anual, o ano em que o número de árvores plantadas atinge 46,5 mil é:



a) 2021
b) 2022
c) 2023
d) 2024
e) 2025

10 (Ucsal-BA) No universo $U = \mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação

$$2(x + 1) - kx \geq 3, \text{ com } k \in \mathbb{R},$$

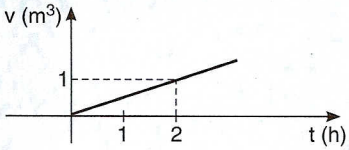
depende do valor da constante *k*. É verdade que o conjunto solução será:

a) $\varnothing$, para todo $k \in \mathbb{R}$
b) $\left[\frac{1}{2 - k}, +\infty\right[$, se $k > 2$
c) $\left[\frac{1}{2 - k}, +\infty\right[$, se $k < 3$
d) $\left]-\infty, \frac{1}{2 - k}\right]$, se $k > 2$
e) $\left]-\infty, \frac{1}{2 - k}\right]$, se $k < 0$

11 (Fatec-SP) O dono de uma rede hoteleira verificou que em certa região tem havido um decréscimo no número de hóspedes em seus pacotes promocionais, e esse decréscimo tem sido linear em relação ao tempo. Em 1982, a média foi de 600 pessoas por semana, enquanto em 1990 a média semanal foi de 432.
Dessa forma, o número médio de hóspedes por semana,

a) em 1995, foi 322.
b) em 1994, foi 345.
c) em 1993, foi 370.
d) em 1992, foi 392.
e) em 1991, foi 411.

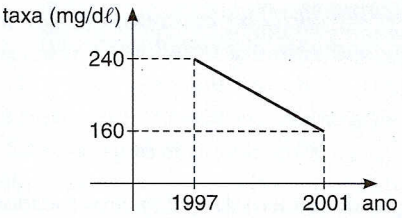
12 (Uneb-BA) Uma torneira enche um reservatório de água com capacidade de 1500 litros.



Estando aberta a torneira, o volume da água do reservatório aumenta em função do tempo, de acordo com o gráfico acima.
O tempo necessário para que o reservatório fique completamente cheio é igual a:

a) 2h30min
b) 3h
c) 3h30min
d) 4h
e) 4h30min

13 (FEHIAE-SP) O gráfico seguinte informa a taxa de colesterol (em mg/dℓ de sangue) de um indivíduo que se submeteu a sucessivos exames de controle de 1997 a 2001:



Supondo que o decréscimo da taxa de colesterol tenha sido linear nesse período, é correto afirmar que, em 2000, o exame apontou uma taxa (em mg/dℓ) de:

a) 168
b) 175
c) 180
d) 185
e) 190

14 (ESPM-SP) Suponha que o faturamento F, em reais, obtido na venda de n artigos seja dado por $F = 2{,}5n$ e que o custo C, em reais, da produção dos mesmos n artigos seja $C = 0{,}7n + 360$. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de artigos que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo:

a) [194; 197]
b) [198; 203]
c) [207; 217]
d) [220; 224]
e) [230; 233]

15 (Cesgranrio-RJ) O domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{5-x}}$ é o intervalo:

a) $]-5, -2]$
b) $]-2, 5]$
c) $[-2, 5[$
d) $[-2, +\infty[$
e) $]5, +\infty[$

16 (U. F. Juiz de Fora-MG) Um aluno resolveu a inequação $\frac{2x}{x+1} \geq 1$ do seguinte modo:

$\frac{2x}{x+1} \geq 1 \Rightarrow 2x \geq x + 1 \Rightarrow x \geq 1$

Analisando esse desenvolvimento pode-se afirmar que a solução apresentada está:

a) correta.
b) errada, pois a correta é $x < -1$.
c) errada, pois a inequação não admite solução.
d) errada, pois foi admitido que $x + 1 > 0$.
e) errada, pois não foi trocado o sentido da desigualdade.

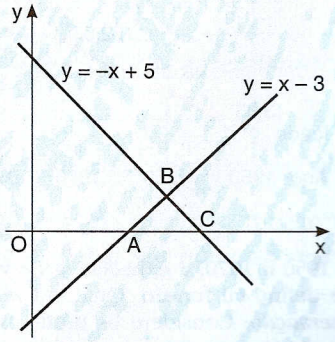
17 (Unicap-PE) Assinale V ou F:
Mestre Florindo, raizeiro famoso, vende suas garrafadas medicinais por R$ 5,00, na feira de Caruaru.

a) Se ele vende q unidades, então ele "apura" $R(q) = 5q$, que é a sua função receita.
b) Se ele tem um custo em torno de 40% de sua receita, o seu custo pode ser estimado pela equação $c(q) = 2q$.
c) Se, além disso, o mestre gastou R$ 900,00 em materiais para confecção do seu famoso produto, ele deverá vender 300 garrafadas para recuperar o seu custo total.
d) O lucro do mestre é dado pela função $L(q) = 5q - 900$.
e) Para ter um lucro de R$ 900,00 ele deverá vender 600 garrafadas.

18 (UFF-RJ) As empresas Alfa e Beta alugam televisores do mesmo tipo. A empresa Alfa cobra R$ 35,00 fixos pelos primeiros 30 dias de uso e R$ 1,00 por dia extra. A empresa Beta cobra R$ 15,00 pelos primeiros 20 dias de uso e R$ 1,50 por dia extra. Após n dias o valor cobrado pela empresa Beta passa a ser maior do que o cobrado pela empresa Alfa. O valor de n é:

a) 25
b) 35
c) 40
d) 45
e) 50

19 (U. F. Viçosa-MG) Considere a figura abaixo:

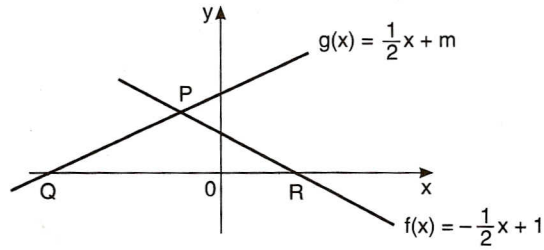


Pode-se afirmar que a área do triângulo ABC é:

a) 1
b) $\frac{1}{2}$
c) 2
d) $2\sqrt{2}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Desafios

1 No gráfico seguinte estão representadas duas funções afins f e g.



Se P é o ponto de interseção das retas e a área do triângulo PQR é 4,5 unidades de área, qual é o valor de m?

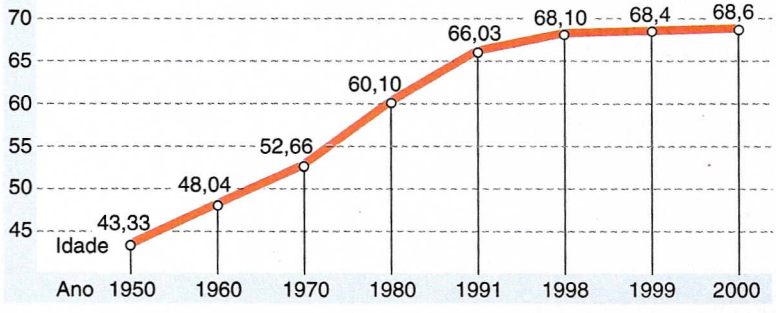
2 Ao chegar a um aeroporto, um turista informou-se sobre locação de automóveis e organizou as informações na seguinte tabela:

Opções	Diária	Preço por quilômetro rodado
Locadora 1	50,00	0,20
Locadora 2	30,00	0,40
Locadora 3	65,00	km livre

a) Qual é a lei que define o preço (y) da locação em função do número de quilômetros rodados em cada uma das situações apresentadas?
b) Represente, no mesmo plano cartesiano, os gráficos dessas funções.
c) A partir de quantos quilômetros deve o cliente preferir L_1 a L_2? Confirme tal resposta no gráfico.
d) A partir de quantos quilômetros deve-se optar por L_3?

3 Observe o gráfico e leia o texto para responder às questões abaixo:

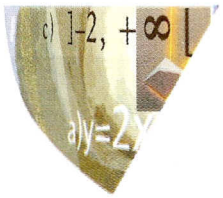
Evolução da expectativa de vida no país



A expectativa de vida ao nascer do brasileiro aumentou 2,6 anos na década de 90. Em 1991, um recém-nascido tinha expectativa de viver 66 anos. Em 2000, essa idade aumentou para 68,6 anos.

(*Folha de S. Paulo*, 4/12/2001.)

a) De 1950 a 1970, a expectativa de vida no país aumentou segundo uma função afim. Determine a lei que define tal função. Qual era a expectativa de vida do brasileiro em 1957? E em 1968?
Observação: Considere os números apresentados no gráfico com apenas uma casa após a vírgula e faça as aproximações necessárias.
b) Supondo-se que o aumento na expectativa de vida se mantenha constante por década, desde 1991, qual será a expectativa de vida do brasileiro em 2030?



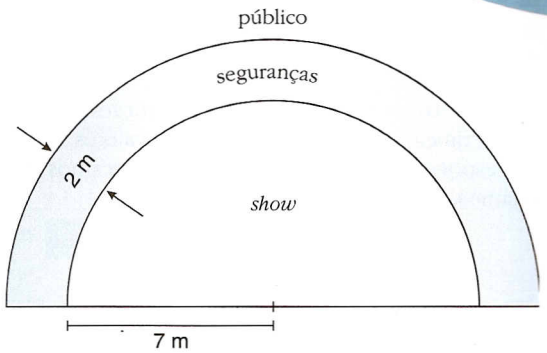
4

FUNÇÃO QUADRÁTICA

1 ○ Introdução

Para a realização de um *show* musical na praça central de uma cidade, foi montado um palco com a forma de semicírculo de raio 7 m.

Para evitar tumultos, os organizadores do evento decidiram colocar seguranças separando o público do palco, conforme mostra a figura.



Se a faixa onde ficarão os seguranças for de 2 m de largura, qual será sua área?

Lembrando que a área de um círculo de raio r é dada por πr^2, temos:

área da faixa = área do semicírculo maior − área do semicírculo menor =

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi(7 + 2)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 7^2 = 16\pi m^2 \cong 50{,}24\ m^2$$

Se a faixa fosse de 3 m, a área seria:

$$\frac{1}{2} \cdot \pi(7 + 3)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 7^2 = \frac{51\pi}{2} m^2 \cong 80{,}07\ m^2$$

Assim, para cada largura x escolhida corresponde uma área de segurança A(x). O valor de A(x) é uma função de x dada pela lei:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi(7 + x)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 7^2 = \frac{\pi(49 + 14x + x^2 - 49)}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot x^2 + 7\pi \cdot x = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + 7x\right)$$

Esse é um caso particular de *função polinomial do 2º grau* ou *função quadrática*.

2 ○ Definição

Chama-se *função quadrática*, ou *função polinomial do 2º grau*, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Vejamos alguns exemplos de funções quadráticas:

1. $f(x) = x^2 + 5x + 4$, em que $a = 1$, $b = 5$ e $c = 4$
2. $f(x) = 2x^2 - 3x - 7$, em que $a = 2$, $b = -3$ e $c = -7$
3. $f(x) = x^2 - 4$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$
4. $f(x) = -3x^2 + 9x$, em que $a = -3$, $b = 9$ e $c = 0$
5. $f(x) = -25x^2$, em que $a = -25$, $b = 0$ e $c = 0$

Exercício

1 Identifique os coeficientes a, b, c das seguintes funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 3x + 10$

b) $y = -2x^2 - 5x + 1$

c) $y = 3x^2 - 9$

d) $y = x^2 + 2x$

e) $f(x) = (\sqrt{3}x - 1)^2$

f) $f(x) = (x - 3)(x + 5) + (1 - x)^2$

3 O Gráfico

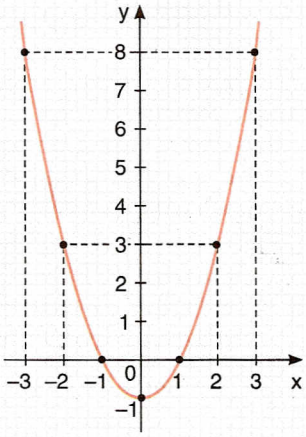
O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada *parábola*.

Exemplo 1

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 - 1$.

Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, marcamos os pontos no plano e os ligamos.

x	$y = x^2 - 1$
–3	8
–2	3
–1	0
0	–1
1	0
2	3
3	8

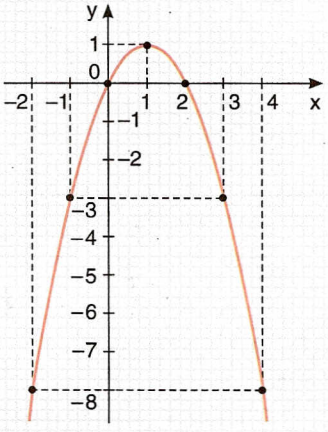


Exemplo 2

Vamos construir o gráfico da função $y = -x^2 + 2x$.

Repetindo o procedimento usado no exemplo 1, temos:

x	$y = -x^2 + 2x$
–2	–8
–1	–3
0	0
1	1
2	0
3	–3
4	–8



Observação

Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notamos sempre que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

2 Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções reais:

a) $y = x^2$
b) $y = -x^2 + 3x$
c) $y = x^2 - 2x$
d) $y = x^2 - 2x + 4$
e) $y = -x^2 + 2x - 1$

4 ○ Zeros e equação do 2º grau

Chamam-se *zeros* ou *raízes* da função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara, que você já conhece:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplo 3

Vamos obter os zeros da função $f(x) = x^2 + x - 12$.
Temos $a = 1$, $b = 1$ e $c = -12$.
Então, substituindo na fórmula, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \begin{cases} x = -4 \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

e as raízes são -4 e 3.

Exemplo 4

Vamos calcular as raízes da função $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$.
Temos $a = 4$, $b = -12$ e $c = 9$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

e as raízes são $\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

Exemplo 5

Vamos calcular os zeros da função $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$.
Temos $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 60}}{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{-44}}{12}$$

Como $\sqrt{-44}$ não é número real, essa função *não* tem zeros reais.

Exercícios

3 Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

c) $f(x) = -3x^2 + 6$

d) $f(x) = x - 2x^2$

e) $f(x) = x^2 + 5x + 7$

4 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $(2x - 3) \cdot (x^2 - 7x + 10) = 0$

b) $(-x^2 + 3) \cdot (x^2 - 9) = 0$

c) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$

d) $x^2 = 11^2$

5 (UF-MA) Determine os valores de x e y sabendo-se que $x, y \in \mathbb{N} - \{1\}$ e satisfazem à equação $x^2y^2 - 4xy = 12$.

6 (Unip-SP) O conjunto solução da equação $(2x + 0{,}3)^2 - 5(2x + 0{,}3) + 4 = 0$ é $\{a; b\}$, com $a < b$. Qual é o valor de $b - a$?

7 (UE-PA) Um grupo de alunos da Uniterci (Universidade da Terceira Idade) programou uma viagem que custaria no total R$ 900,00. Algumas semanas antes da partida, duas pessoas se juntaram ao grupo, e cada participante pagou R$ 75,00 a menos. Qual era o número de pessoas que inicialmente fariam a viagem?

8 (UF-MS, adaptado) Em um laboratório, dois tipos de bactérias, tipo A e tipo B, estão sendo pesquisados. Para uma das experiências, foram preparadas duas lâminas, que ficaram em observação por um período de 3 dias. Em cada lâmina, no mesmo instante, foram colocadas culturas dos 2 tipos de bactérias, de acordo com o seguinte quadro:

lâmina 1: cultura de bactérias do tipo A
lâmina 2: cultura de bactérias do tipo B

Sabe-se que o número de bactérias em cada lâmina, em função do tempo t, em horas, durante o período da experiência é dado pelas funções definidas por

bactérias do tipo A: $a(t) = -10t^2 + 800t + 2000$;
bactérias do tipo B: $b(t) = -10t^2 + 900t + 100$.

Analise as afirmações seguintes, classificando-as em V ou F. Justifique as falsas.

a) Antes de completar 24 horas de experiência, a cultura da lâmina 1 e a cultura da lâmina 2 apresentaram, num mesmo instante, o mesmo número de bactérias.

b) O número de bactérias mencionadas no item anterior é, em cada lâmina, inferior a 13 mil.

c) Foram colocadas 900 bactérias do tipo B na lâmina 2.

Observação

Quantidade de raízes

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado *discriminante*:

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real (ou uma raiz dupla);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

Exemplo 6

Vejamos quais são as condições a que m deve obedecer para que a função $y = 5x^2 + 2x + m$:

a) admita duas raízes reais e distintas;
b) tenha duas raízes reais iguais;
c) não tenha raízes reais.

Calculando o discriminante (Δ), temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20m$$

Considerando os valores que Δ pode assumir, devemos ter:

a) $\Delta > 0$, então $4 - 20m > 0$ e daí $m < \frac{1}{5}$.

b) $\Delta = 0$, então $4 - 20m = 0$ e daí $m = \frac{1}{5}$.

c) $\Delta < 0$, então $4 - 20m < 0$ e daí $m > \frac{1}{5}$.

Exemplo 7

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, vamos calcular a soma $x_1 + x_2$ e o produto $x_1 \cdot x_2$:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Exemplo 8

Vamos mostrar que, se a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ tem zeros x_1 e x_2, então ela pode ser escrita na forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Para isso vamos utilizar os resultados obtidos no exemplo anterior.

De fato:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) =$$

$$= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] =$$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

Essa última forma de indicar a lei de uma função quadrática é chamada *forma fatorada*.

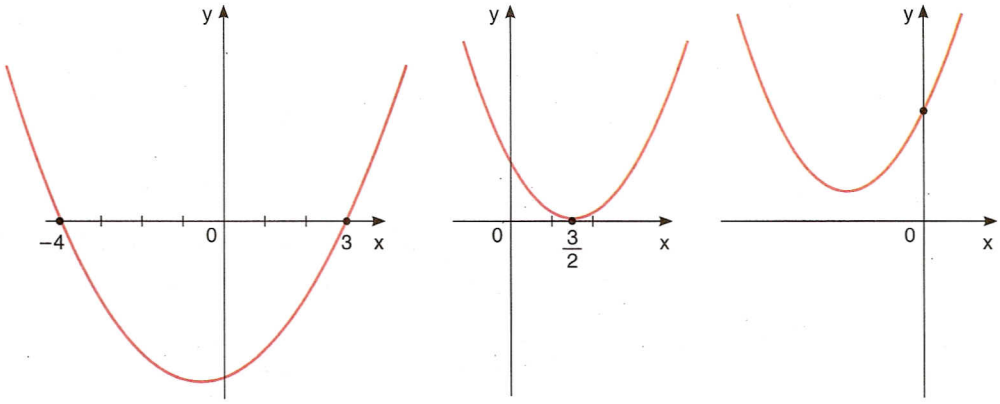
Observação

As raízes de uma função quadrática são os valores de x (abscissa) para os quais $y = ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, são as abscissas dos pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x.

Voltando aos exemplos 3, 4 e 5, temos:

1. O gráfico de $f(x) = x^2 + x - 12$ corta o eixo dos x nos pontos $(-4, 0)$ e $(3, 0)$.
2. O gráfico de $f(x) = 4x^2 - 12 + 9$ toca o eixo dos x no ponto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.
3. O gráfico de $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ não intercepta o eixo dos x.

Veja, por curiosidade, como são os gráficos dessas três funções:



Exercícios

9 Determine m para que a função dada por $f(x) = x^2 - 3x + m$ tenha duas raízes reais e distintas.

10 Determine p a fim de que o gráfico de $f(x) = 2x^2 + x + (p - 1)$ não intercepte o eixo das abscissas.

11 Mostre que para qualquer valor real *não nulo* de m a equação $mx^2 + 2x + \frac{1}{m} = 0$ tem uma raiz real dupla.

12 Para que valores de p a equação $px^2 + (p + 1)x + (p + 1) = 0$ tem um zero real duplo? Determine, em cada caso, tal raiz.

13 Em uma festa de confraternização de uma empresa, havia x pessoas. Cada pessoa cumprimentou todas as outras uma única vez. Seja y o número total de saudações:

a) Expresse y em função de x.
b) Quantas saudações são dadas, se $x = 70$?
c) Se o número de saudações foi 435, quantas pessoas havia na festa?

14 Na equação do 2º grau $2x^2 - 5x - 1 = 0$, de raízes x_1 e x_2, calcule:

a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 \cdot x_2$ c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

15 Em relação à questão anterior, calcule:

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ c) $x_1^3 + x_2^3$

Sugestão: $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

16 Uma das raízes da equação $-x^2 + px + 3 = 0$ é igual a 2.

a) Qual é o valor de p?
b) Qual é a outra raiz que essa equação possui?

17 (FEI-SP) Uma das raízes da equação $x^2 - x - a = 0$ é também raiz da equação $x^2 + x - (a + 20) = 0$. Qual é o valor de a?

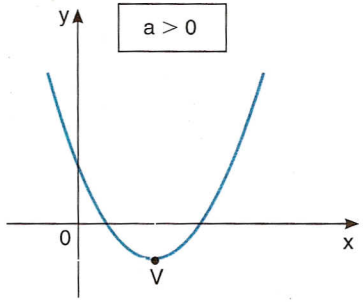
18 A diferença entre as raízes da equação $2x^2 + 3x - m = 0$ é igual a $\frac{1}{2}$. Calcule o valor de m.

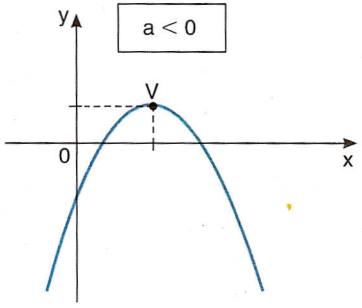
19 (Funec-MG) Qual é o valor de m na equação $x^2 - (m + 5)x + m + 1 = 0$, para que as raízes sejam simétricas?

20 As raízes da equação $x^2 - 2px + 8 = 0$ são positivas e uma é o dobro da outra. Qual é o valor de p?

5 ○ Coordenadas do vértice da parábola

Quando $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo V; quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo V.





Nosso objetivo é obter as coordenadas do ponto V, chamado vértice da parábola.
Vamos retomar a fórmula da função quadrática e escrevê-la de outra forma:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Observando esta última forma, podemos notar que a, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes. Apenas x é variável. Daí:

- se $a > 0$, então o valor mínimo de y ocorre quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$; como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$; nesta situação, o valor mínimo de y é $y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$;
- se $a < 0$, por meio de raciocínio semelhante concluímos que o valor máximo de y ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$; nesta situação, o valor máximo de y é $y = a\left(0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Portanto, em ambos os casos as coordenadas de V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exemplo 9

Vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico de $y = 2x^2 - 5x + 2$.

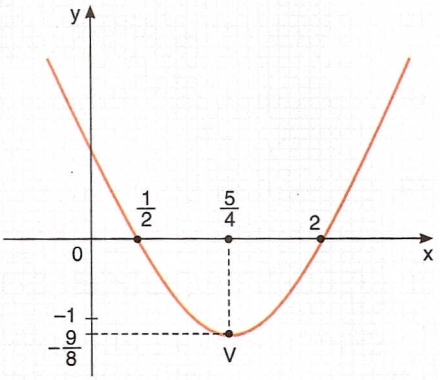
Temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{8}$$

então, $V = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$.

Para facilitar a construção do gráfico, encontre as raízes da equação.

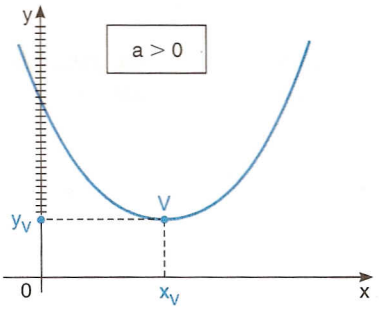


6 ○ Imagem

O conjunto imagem Im da função $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

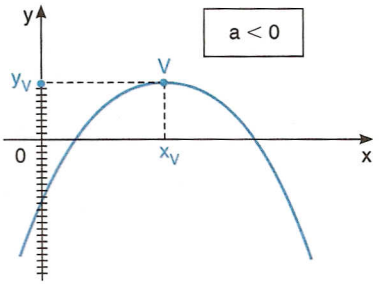
▶ **1ª** quando $a > 0$,

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$



▶ **2ª** quando $a < 0$,

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$



Exercícios

21 Determine o valor máximo (ou mínimo) e o ponto de máximo (ou mínimo) de cada uma das funções abaixo, definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x^2 + 5x$

b) $y = -3x^2 + 12x$

c) $y = 4x^2 - 8x + 4$

d) $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

22 (UC-GO) Suponha que numa fábrica de refrigeradores o custo, em reais, de cada geladeira é dado pela função $C(x) = x^2 - 40x + 500$, em que x é a quantidade de geladeiras produzidas. (Obs.: o gráfico desta função é uma parábola de concavidade voltada para cima, que só tem significado econômico no primeiro quadrante.)

Assinale *V* ou *F* nas proposições seguintes, justificando as falsas:

a) Quando se produzem 10 geladeiras, o custo de cada geladeira é de R$ 200,00.

b) A produção de 20 geladeiras é a que proporciona o menor custo de cada geladeira.

c) O conjunto imagem da função anteriormente definida é qualquer número real não-negativo.

d) A função $C_t(x) = x^3 - 40x^2 + 500x$ representa o custo total de produção quando se produzem x geladeiras.

e) O custo total para se produzirem 50 geladeiras é de R$ 1000,00.

23 (UCDB-MT) Uma bola lançada para cima, verticalmente, tem sua altura h (em metros) dada em função do tempo t (em segundos) decorrido após o lançamento pela fórmula $h = -5t^2 + 20t$.
Qual é a altura máxima atingida pela bola?

24 (UF-AL) Uma empresa de turismo promove um passeio para n pessoas, com $10 \leq n \leq 70$, no qual cada pessoa paga uma taxa de $(100 - n)$ reais. Nessas condições, o dinheiro total arrecadado pela empresa varia em função do número n. Qual é a maior quantia que a empresa pode arrecadar?

25 (FGV-SP) Num parque de diversões A, quando o preço de ingresso é R$ 10,00, verifica-se que 200 freqüentadores comparecem por dia; quando o preço é R$ 15,00, comparecem 180 freqüentadores por dia.

a) Admitindo que o preço (p) relaciona-se com o número de freqüentadores por dia (x) através de uma função do 1º grau, obtenha essa função.
b) Num outro parque B, a relação entre p e x é dada por $p = 80 - 0{,}4x$. Qual é o preço que deverá ser cobrado para maximizar a receita diária?

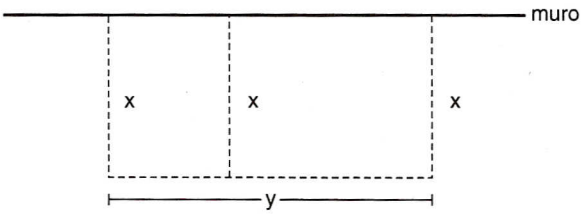
26 Um pintor de quadros de uma feira de artesanato calculou que o custo total de uma tela pequena é de R$ 30,00. Ele acredita que, se vender cada tela por x reais, venderá, por mês, $90 - x$ telas $(0 < x < 90)$.

a) O lucro L obtido pelo pintor é função do preço de venda x. Escreva a lei que define $L(x)$.
b) Qual será seu lucro mensal se o preço de venda de cada tela for de R$ 40,00?
c) Para que valor de x o pintor terá lucro máximo? Qual será esse lucro?

27 (UF-GO) Uma agência de turismo deseja fretar um ônibus de 50 lugares. Duas empresas, A e B, candidatam-se para fazer a viagem. Se for contratada a empresa A, o custo da viagem terá uma parte fixa de R$ 280,50, mais um custo, por passageiro, de R$ 12,00. Se for contratada a empresa B, o custo terá um valor fixo de R$ 250,00, mais um custo (C), por passageiro, dado por $C(n) = 35 - 0{,}5n$, sendo n o número de passageiros que fará a viagem.
De acordo com essas informações, assinale V ou F nos itens a seguir, justificando:

a) Se todos os lugares do ônibus forem ocupados, será mais caro contratar a empresa B.
b) Caso contrate a empresa B, o custo máximo da viagem será de R$ 862,50.
c) Para um mesmo número de passageiros, os valores cobrados pelas empresas A e B serão diferentes.
d) Para um custo de R$ 700,50, a empresa A levará mais que o dobro de passageiros que a empresa B.

28 (UF-RN) O sr. José dispõe de 180 metros de tela para fazer um cercado retangular, aproveitando, como um dos lados, parte de um extenso muro reto.
O cercado compõe-se de uma parte paralela ao muro e três outras, perpendiculares a ele (ver figura).



Para cercar a *maior* área possível, com a tela disponível, quais são os valores de x e y, respectivamente?

7 Construção da parábola

É possível construir o gráfico de uma função do 2º grau sem necessariamente ter que montar a tabela de pares (x, y), mas seguindo apenas o roteiro de observações seguinte:

- **1ª** O valor do coeficiente a define a concavidade da parábola.
- **2ª** Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x.

- **3ª** O vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$), ou de máximo (se $a < 0$).
- **4ª** A reta que passa por V e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola.
- **5ª** Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então $(0, c)$ é o ponto em que a parábola corta o eixo dos y.

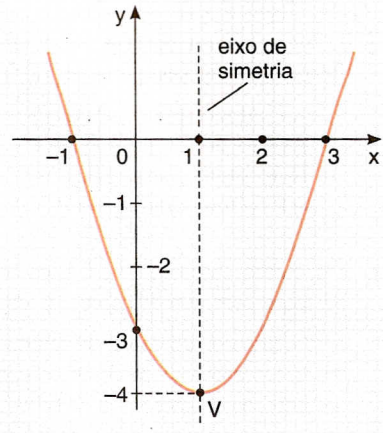
Exemplo 10

Façamos o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 2x - 3$, de acordo com o roteiro acima.

Características:

- concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$.
- zeros: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 3 \end{matrix}$.
- vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1, -4)$.
- interseção com o eixo y: $(0, c) = (0, -3)$.

Note que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$.



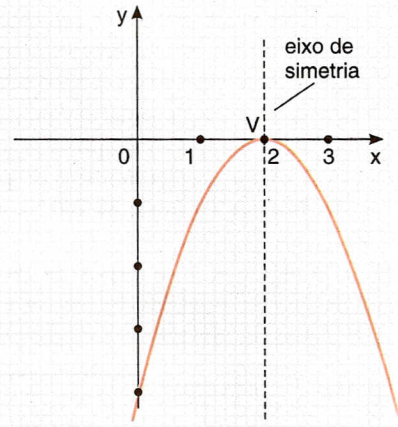
Exemplo 11

Agora, vamos construir o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 4$, também sem montar a tabela de pares (x, y).

Características:

- concavidade voltada para baixo ($a = -1$).
- zeros: $x = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$.
- vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (2, 0)$.
- interseção com o eixo y: $(0, c) = (0, -4)$.

Note que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$.



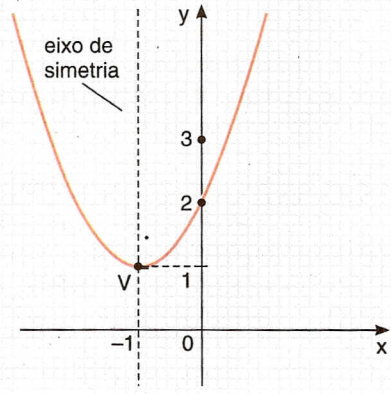
Exemplo 12

Vamos construir o gráfico de $y = x^2 + 2x + 2$.

Características:

- concavidade voltada para cima ($a = 1$).
- não tem zeros, pois $\Delta = -4$.
- vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (-1, 1)$.
- interseção com o eixo y: $(0, c) = (0, 2)$.

Note que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$.



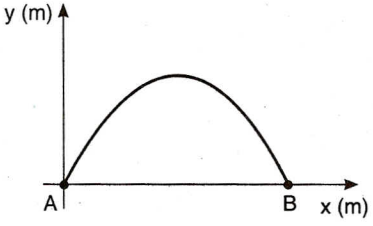
29 Construa o gráfico cartesiano de cada uma das funções definidas em $\mathbb{R}$ e forneça também o conjunto imagem:

a) $y = x^2 - 7x + 10$ b) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ c) $y = 3x^2 - 4x + 2$

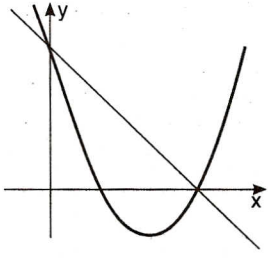
30 Faça o gráfico de cada uma das funções reais:

a) $y = -3x^2 + 6x - 3$ b) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ c) $y = -x^2 + 3x - 3$

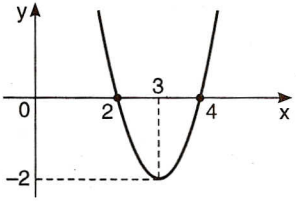
31 (Puccamp-SP) Na figura ao lado tem-se representada a curva descrita por um projétil, desde o seu lançamento (ponto *A*) até que atinja o solo (ponto *B*).
Se a curva descrita é a parábola de equação $y = -2x^2 + 7x$, qual é a distância AB, em metros?



32 (Unopar-PR) A parábola no gráfico ao lado é dada pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$. A reta e a parábola cruzam o eixo cartesiano nos mesmos pontos, conforme mostra o gráfico.
Qual é a equação da reta?

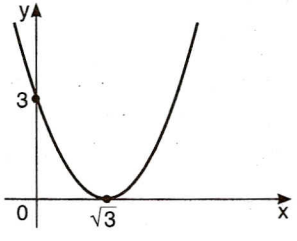


33

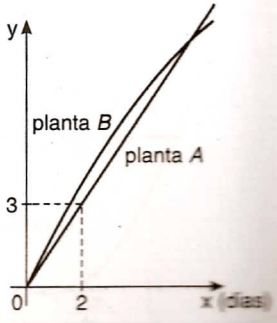


Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função do 2º grau cujo gráfico é dado ao lado. Qual é a expressão de *f*? (Sugestão: use a forma fatorada.)

34 Qual é a função real cujo gráfico está representado ao lado?



35 (Vunesp-SP) Duas plantas de mesma espécie, *A* e *B*, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta *A* é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta *B* pode ser descrito pela lei matemática $y = \frac{24x - x^2}{12}$. Um esboço desses gráficos está apresentado na figura.
Determine:



a) a equação da reta;
b) o dia em que as plantas *A* e *B* atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

36 (UFF-RJ) Considere f e g, funções reais de variável real, definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = ax^2 + b$.
Sabe-se que $f(-1) = f(2) = 0$ e $g(0) = 1$.

a) Determine as raízes de g.

b) Esboce, numa única figura, os gráficos das funções f e g.

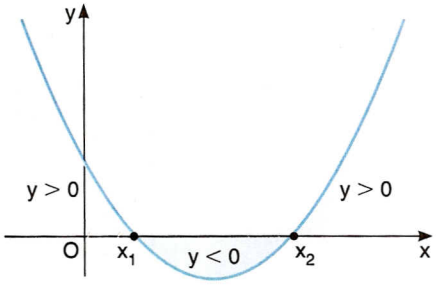
8 Sinal

Consideremos uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ e determinemos os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.

Conforme o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, podem ocorrer os seguintes casos:

▶ $\Delta > 0$

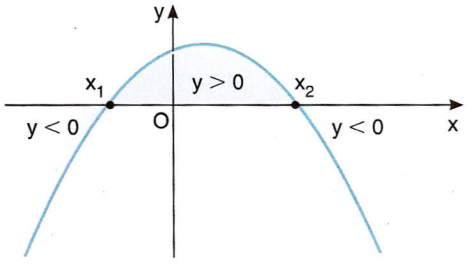
Nesse caso a função quadrática admite dois zeros reais distintos ($x_1 \neq x_2$). A parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



quando $a > 0$

$y > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

$y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$



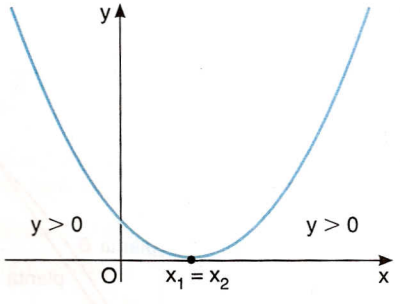
quando $a < 0$

$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

$y < 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

▶ $\Delta = 0$

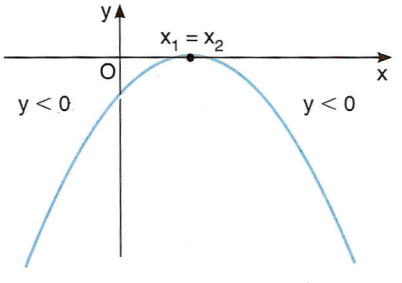
Nesse caso a função quadrática admite dois zeros reais iguais ($x_1 = x_2$). A parábola tangencia o eixo Ox e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



quando $a > 0$

$y > 0, \forall x \neq x_1$

$\nexists x$ tal que $y < 0$



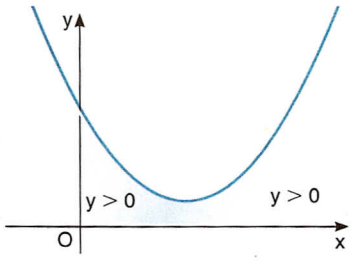
quando $a < 0$

$y < 0, \forall x \neq x_1$

$\nexists x$ tal que $y > 0$

▶ $\Delta < 0$

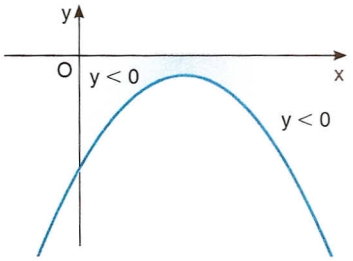
Nesse caso a função quadrática não admite zeros reais. A parábola não intercepta o eixo Ox e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



quando $a > 0$

$y > 0, \forall x$

$\nexists\, x$ tal que $y < 0$



quando $a < 0$

$y < 0, \forall x$

$\nexists\, x$ tal que $y \geqslant 0$

Exemplo 13

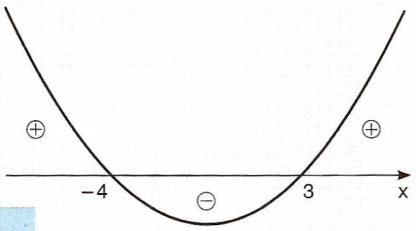
Vamos estudar o sinal da função $y = x^2 + x - 12$.

Temos:

$a = 1 > 0 \rightarrow$ parábola com concavidade para cima

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49 > 0 \rightarrow$ dois zeros reais distintos

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = -4$ e $x_2 = 3$



Sinal
$y > 0 \Leftrightarrow x < -4$ ou $x > 3$
$y < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 3$

Exemplo 14

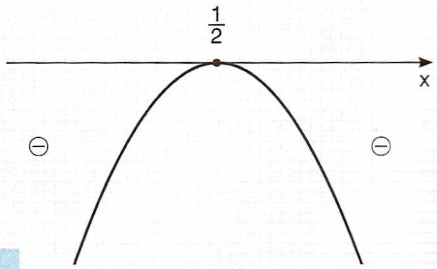
Vamos estudar o sinal de $y = -4x^2 + 4x - 1$.

Temos:

$a = -4 < 0 \rightarrow$ parábola com concavidade para baixo

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0 \rightarrow$ dois zeros reais iguais

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 \pm 0}{-8} = \dfrac{1}{2}$



Sinal
$\nexists\, x$ tal que $y > 0$
$y < 0, \forall x \neq \dfrac{1}{2}$

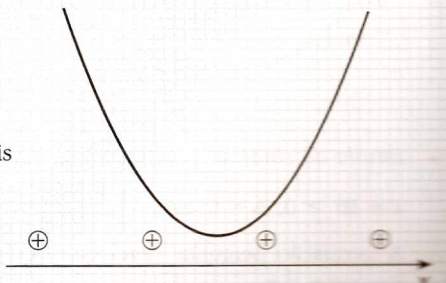
Exemplo 15

Vamos estudar o sinal de $y = 3x^2 + 4x + 5$.

Temos:

$a = 3 > 0 \rightarrow$ parábola com concavidade para cima

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 60 = -44 < 0 \rightarrow$ não há zeros reais



Sinal
$y > 0, \forall x$
$\nexists\, x$ tal que $y < 0$

Exercícios

37 Estude os sinais das seguintes funções quadráticas:

a) $y = 2x^2 - 5x + 2$ b) $y = -x^2 + 2x + 3$ c) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ d) $y = -x^2 - 2x + 15$

38 Faça o estudo de sinal das seguintes funções de 2º grau:

a) $y = -x^2 - x - 5$ b) $y = -x^2 + 4x - 4$ c) $y = x^2 + 2$ d) $y = x^2 + x$

9 ○ Inequações

Vamos aplicar o estudo do sinal da função quadrática na resolução de inequações.

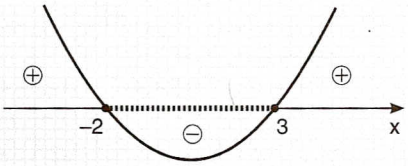
Exemplo 16

Vejamos como resolver a inequação $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Chamemos de y a função quadrática que está no 1º membro: $y = x^2 - x - 6$.

Vamos agora estudar o sinal de y:

$a = 1 > 0$, $\Delta = 25 > 0$, raízes: -2 e 3



A inequação pergunta: "para que valores de x temos $y \leq 0$?".

Resposta: $-2 \leq x \leq 3$ (ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$).

Exemplo 17

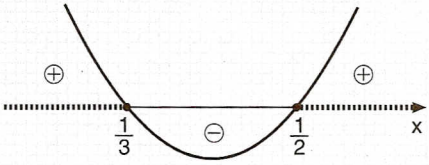
Vejamos como resolver a inequação $4x^2 - x + 1 \geq 4x - 2x^2$.

Vamos passar todos os termos da inequação para um dos membros, por exemplo para o 1º membro:

$$4x^2 - x + 1 \geq 4x - 2x^2$$
$$4x^2 - x + 1 - 4x + 2x^2 \geq 0$$
$$6x^2 - 5x + 1 \geq 0$$

- *Estudo do sinal de $y = 6x^2 - 5x + 1$*

$a = 6 > 0$, $\Delta = 1 > 0$, raízes: $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$



A inequação pergunta: "para que valores de x temos $y \geq 0$?".

Resposta: $x \leq \frac{1}{3}$ ou $x \geq \frac{1}{2}$.

Exemplo 18

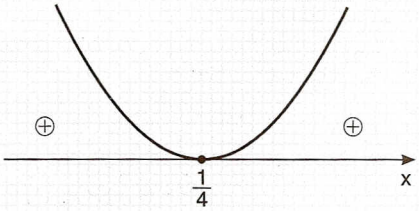
Vamos resolver a inequação $16x^2 < 8x - 1$.

Temos:

$$16x^2 < 8x - 1$$
$$16x^2 - 8x + 1 < 0$$

- *Estudo do sinal de $y = 16x^2 - 8x + 1$*

$a = 16 > 0$, $\Delta = 0$, raiz: $\frac{1}{4}$



A inequação pergunta: "Para que valores de x temos $y < 0$?".

Resposta: $\nexists\, x$.

39 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$
b) $-x^2 + x + 6 > 0$
c) $-2x^2 + 3x \geqslant 0$
d) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$
e) $x^2 - 5 < 0$

40 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x^2 + 3x + 7 < 0$
b) $4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$
c) $-4x^2 + 20x - 25 < 0$
d) $\sqrt{2x} > x^2$
e) $-2x^2 - x \geqslant 3$

41 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x(x - 8) \geqslant 0$
b) $x^2 > 7^2$
c) $-8x^2 \geqslant 0$
d) $-x^2 > -1$
e) $5^2 < (x - 2)^2$

42 (ESPM-SP) Qual é o número de soluções inteiras da inequação $x^2 - 6x < 7$?

43 (UCDB-MT, adaptado) Uma empresa fundada em 1990 tem, para cada ano n de funcionamento, um lucro igual a $L(n) = 100\,000 \cdot (-n^2 + 22n)$.

a) Em que período a empresa apresentou lucro crescente?
b) A partir de que ano a empresa terá prejuízo?

44 (FGV-SP) O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 30x - 5$, sendo x a quantidade mensal vendida.

a) Qual o lucro mensal máximo possível?
b) Entre que valores deve variar x para que o lucro mensal seja no mínimo igual a 195?

Exemplo 19

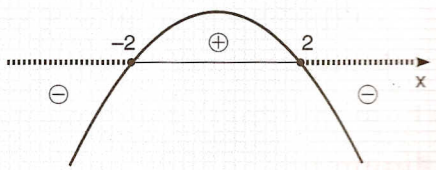
Vejamos como resolver a inequação $4 < x^2 \leqslant 9$.

De fato são duas inequações simultâneas:

$$4 < x^2 \quad \text{(I)} \qquad \text{e} \qquad x^2 \leqslant 9 \quad \text{(II)}$$

Vamos resolver (I): $4 - x^2 < 0$.

- *Estudo do sinal de* $y = 4 - x^2$

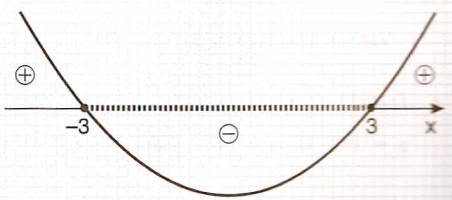


$a = -1 < 0$, $\Delta = 16 > 0$, raízes: -2 e 2

Solução de (I): $x < -2$ ou $x > 2$

Vamos resolver (II): $x^2 - 9 \leqslant 0$.

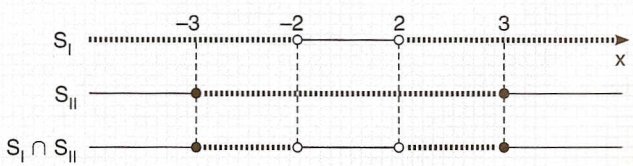
- *Estudo do sinal de* $y = x^2 - 9$



$a = 1 > 0$, $\Delta = 36 > 0$, raízes: -3 e 3

Solução de (II): $-3 \leqslant x \leqslant 3$

Procuremos agora a interseção das duas soluções:



Solução final: $-3 \leqslant x < -2$ ou $2 < x \leqslant 3$.

Exercícios

45 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $1 \leqslant x^2 \leqslant 9$ b) $-1 < x^2 - 1 \leqslant 3$ c) $x < x^2 < 4x$

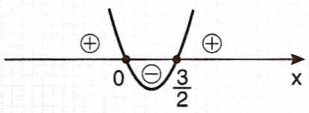
46 Resolva os seguintes sistemas de inequações em $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \leqslant 0 \\ x^2 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - x^2 < 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \\ 5x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 < 16 \\ x^2 > 9 \end{cases}$

47 (Cefet-MG) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem o sistema $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$.

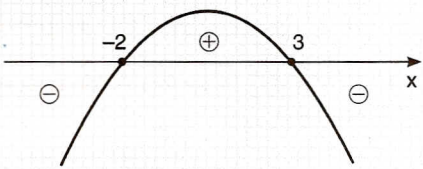
Exemplo 20

Vamos resolver a inequação $(2x^2 - 3x)(6 + x - x^2) < 0$.
Façamos $y_1 = 2x^2 - 3x$ e estudemos o sinal de y_1:



$a = 2 > 0$, $\Delta = 9$, raízes: 0 e $\frac{3}{2}$

Façamos $y_2 = 6 + x - x^2$ e estudemos o sinal de y_2:
$a = -1 < 0$, $\Delta = 25$, raízes: -2 e 3



- *Estudo do sinal de $y_1 y_2$*

	−2	0	3/2	3	
y_1	+	+	−	+	+
y_2	−	+	+	+	−
$y_1 \cdot y_2$	−	+	−	+	−

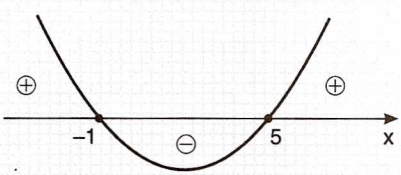
A inequação pergunta: "para que valores de x temos $y_1 \cdot y_2 < 0$?".
Resposta: $x < -2$ ou $0 < x < \frac{3}{2}$ ou $x > 3$.

Exemplo 21

Vamos resolver a inequação $\frac{x^2 - 4x - 5}{4 - 4x + x^2} \geqslant 0$.

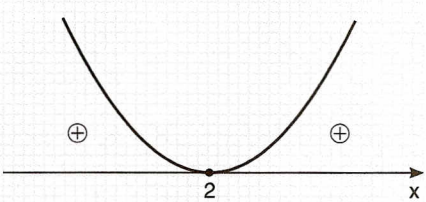
- *Estudo do sinal de $y_1 = x^2 - 4x - 5$*

$a = 1 > 0$, $\Delta = 36$, raízes: -1 e 5

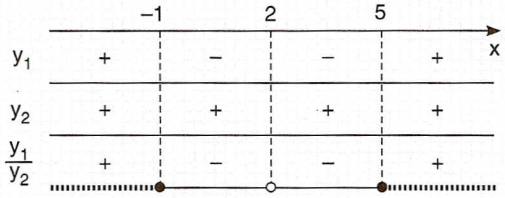


- *Estudo do sinal de $y_2 = 4 - 4x + x^2$*

$a = 1 > 0$, $\Delta = 0$, raiz: 2



- *Estudo do sinal do quociente* $\frac{y_1}{y_2}$



A inequação pergunta: "para que valores de x temos $\frac{y_1}{y_2} \geqslant 0$?".

Resposta: $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 5$.

Exercícios

48 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(1 - 4x^2)(2x^2 + 3x) > 0$

b) $(x^2 - 5x + 6)(9 - x^2) \leqslant 0$

c) $(x - 2) \cdot (x^2 - 1) > 0$

d) $(2x^2 + 1) \cdot (-x + 3) \leqslant 0$

49 Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $4x^3 - 12x^2 - x + 3 \leqslant 0$.

50 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x - 2} > 0$

b) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} \geqslant 0$

c) $\frac{2 - 3x}{2x^2 + 3x - 2} < 0$

51 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

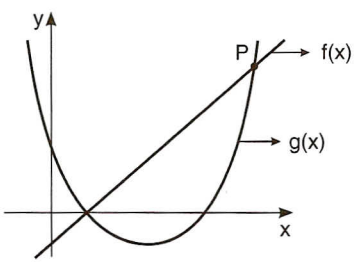
a) $x + \frac{1}{x} \leqslant -2$

b) $\frac{x}{x + 1} - \frac{x}{x - 1} \geqslant 0$

c) $\frac{x - 3}{x - 2} \leqslant x - 1$

d) $\frac{1}{x} < x$

52 (UE-RJ) No sistema de coordenadas cartesianas abaixo, estão representadas as funções $f(x) = 4x - 4$ e $g(x) = 2x^2 - 12x + 10$.



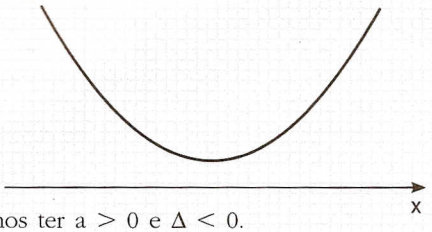
Com base nos dados acima, determine:

a) as coordenadas do ponto P.

b) o conjunto solução da inequação $\frac{g(x)}{f(x)} < 0$, $f(x) \neq 0$.

Exemplo 22

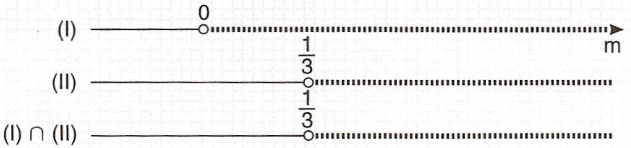
Vejamos qual é a condição sobre $m \in \mathbb{R}$ a fim de que tenhamos $mx^2 + 2x + 3 > 0$ para todo x real. Façamos $f(x) = mx^2 + 2x + 3$. Se, para todo x real devemos ter $f(x) > 0$, então o esboço do gráfico de f é:



Para que isso ocorra, devemos ter $a > 0$ e $\Delta < 0$.
Então:

$a = m > 0$ (I) e $\Delta = 4 - 12m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$ (II)

Como (I) e (II) devem ser simultaneamente satisfeitas, façamos (I) $\cap$ (II).



Resposta: $m > \frac{1}{3}$.

Exemplo 23

Vamos determinar o domínio da função real $f(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{x^2 - 4}}$.

Para que f esteja definida, é necessário que o radicando $\frac{2x - 1}{x^2 - 4}$ seja positivo ou nulo.

Então, temos de resolver $\frac{2x - 1}{x^2 - 4} \geqslant 0$ e, para isso, usamos a técnica vista no exemplo 21.

Exercícios

53 Determine $m \in \mathbb{R}$ para que $x^2 + mx + 1 > 0$, para todo x real.

54 Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que $mx^2 - 2x + m < 0$, qualquer que seja o valor real de x.

55 (Mackenzie-SP) Se $2x^2 - ax + 2a > 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, qual é o maior valor *inteiro* que a pode assumir?

56 (UF-CE) Determine o subconjunto dos números reais que é domínio da função real definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

57 Estabeleça o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x^2 - 5x - 1}}$

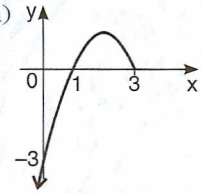
b) $g(x) = \sqrt{3x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 7}$

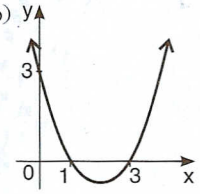
c) $h(x) = \sqrt{\frac{-x + 5}{x^2 + x - 6}}$

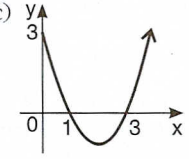
58 (PUC-MG) Todos os pontos da parábola de equação $y = x^2 + ax + 9$ estão acima do eixo das abscissas. Qual é o intervalo ao qual a pode pertencer?

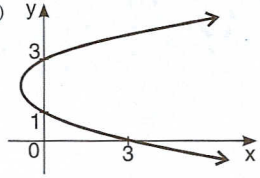
Testes de vestibulares

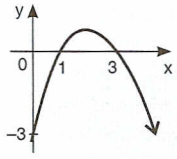
1 (UFF-RJ) Considere a função f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (3 - x)(x - 1)$.
Identifique a melhor representação do gráfico de *f*.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

2 (UF-MG) Considere a equação

$$(x^2 - 14x + 38)^2 = 11^2.$$

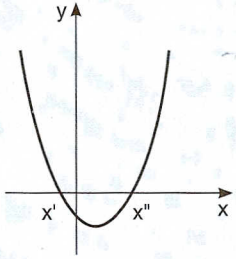
O número de raízes reais distintas dessa equação é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

3 (Cefet-MG) Ao ser cobrada uma falta numa partida de futebol, a trajetória da bola é tal que sua altura *h*, em metros, varia com o tempo *t*, em segundos, de acordo com a equação $h = -t^2 + 2t$. A bola atingirá o solo novamente no instante *t* igual a:

a) 2 c) 4 e) 6
b) 3 d) 5

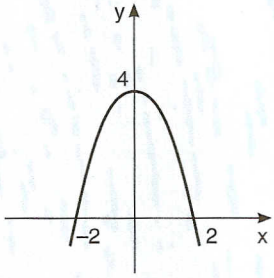
4 (UF-PA) A parábola abaixo representa graficamente a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$.



Assim sendo, podemos afirmar que:

a) $a = b = c > 0$
b) $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$
c) $a > 0$, $b < 0$ e $c = 0$
d) $a > 0$, $b < 0$ e $c > 0$
e) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$

5 (Uneb-BA) Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ a função cujo gráfico está representado na figura, $f(1) - f(3)$ é igual a:



a) 5
b) 6
c) 8
d) 10
e) 11

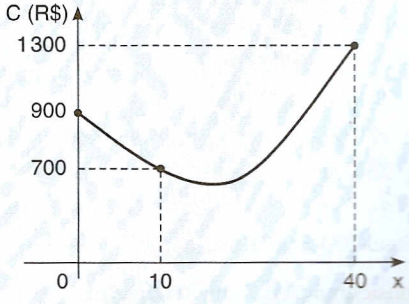
6 (Unip-SP) O número de soluções inteiras do sistema $\begin{cases} 2x - 4 \leq 4 \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0 \end{cases}$ é:

a) 1 c) 3 e) 5
b) 2 d) 4

7 (Unifor-CE) A equação $x^2 - (k + 1)x + k = 0$, de incógnita *x*, tem duas raízes iguais. Qual é o valor de *k*?

a) –5 c) 1 e) 5
b) –3 d) 3

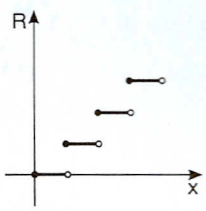
8 (U. F. Santa Maria-RS)

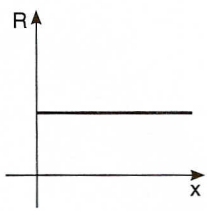


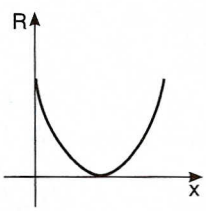
Na produção de *x* unidades mensais de certo produto, uma fábrica tem um custo, em reais, descrito pela função de 2º grau, representada parcialmente na figura. O custo mínimo é, em reais:

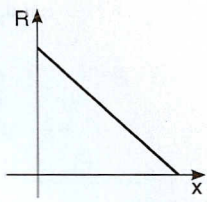
a) 500 c) 660 e) 690
b) 645 d) 675

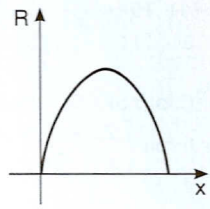
9 (Enem-MEC) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:
$R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.
O gráfico cartesiano que melhor representa a função $R(x)$, para x real, é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

10 (Enem-MEC) Considerando o modelo descrito no exercício anterior, se o público-alvo é de 44 000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

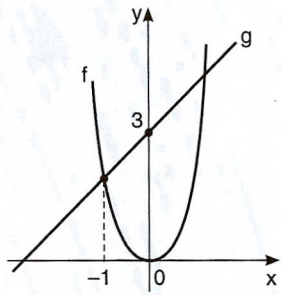
a) 11 000
b) 22 000
c) 33 000
d) 38 000
e) 44 000

11 (Ucsal-BA) Seja a inequação $\frac{x - 2}{x^2 - 4x} \leqslant 0$.

Considerando os números inteiros que a satisfazem, é correto concluir que:

a) Só dois deles são positivos.
b) Um deles é zero.
c) O produto de todos eles é 6.
d) O menor deles é –2.
e) O maior deles é 4.

12 (Mackenzie-SP) Na figura temos os gráficos das funções f e g. Se $f(x) = 2x^2$, então $g(3)$ vale:



a) 12
b) 10
c) 8
d) 14
e) 6

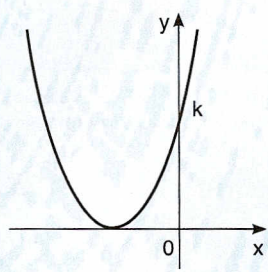
13 (Unirio-RJ) Em uma fábrica, o custo de produção de x produtos é dado por $c(x) = -x^2 + 22x + 1$. Sabendo-se que cada produto é vendido por R$ 10,00, o número de produtos que devem ser vendidos para se ter um lucro de R$ 44,00 é:

a) 3
b) 10
c) 12
d) 13
e) 15

14 (Umesp-SP) O gráfico da função $y = x^2 + kx + m$ é uma parábola cujo vértice é o ponto $V = (-2, -9)$. O valor de $k - m$ é:

a) –9
b) –1
c) 0
d) 1
e) 9

15 (Mackenzie-SP) Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (15 - m)$. Então k vale:



a) 25
b) 18
c) 12
d) 9
e) 6

16 (Mackenzie-SP) A soma dos números inteiros pertencentes ao domínio da função $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ é:

a) 2
b) –2
c) 3
d) –3
e) 0

17 (UF-AC) O intervalo de valores reais de m para que a equação $(m + 1)x^2 - 2mx + (m - 1) = 0$ tenha uma raiz positiva e outra negativa é:

a) $[0, 1]$
b) $]-1, 1[$
c) $[-2, 0]$
d) $]0, 1[$
e) $]-1, 0[$

18 (Fuvest-SP) O valor, em reais, de uma pedra semipreciosa é sempre numericamente igual ao quadrado de sua massa, em gramas. Infelizmente uma dessas pedras, de 8 gramas, caiu e se partiu em dois pedaços. O prejuízo foi o maior possível. Em relação ao valor original, o prejuízo foi de:

a) 92%
b) 80%
c) 50%
d) 20%
e) 18%

19 (Covest-PE) Uma malharia familiar fabrica camisetas a um custo de R$ 2,00 por peça e tem uma despesa fixa semanal de R$ 50,00. Se são vendidas x camisetas por semana ao preço de $\left(\frac{22}{3} - \frac{x}{30}\right)$ reais a unidade, quantas camisetas devem ser vendidas por semana para se obter o maior lucro possível?

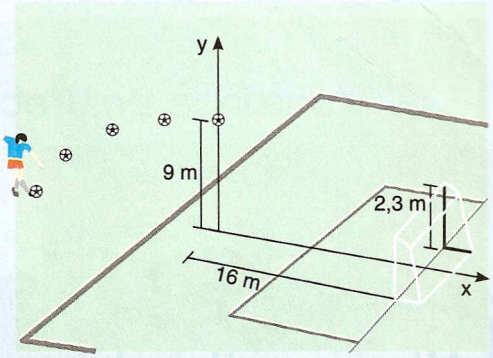
a) 50
b) 60
c) 65
d) 90
e) 80

20 (Fuvest-SP) Os pontos (0, 0) e (2, 1) estão no gráfico de uma função quadrática f. O mínimo de f é assumido no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{4}$. Logo, o valor de f(1) é:

a) $\frac{1}{10}$
b) $\frac{2}{10}$
c) $\frac{3}{10}$
d) $\frac{4}{10}$
e) $\frac{5}{10}$

21 (UE-RJ) Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador "Chorão" chutou a bola em direção ao gol, de 2,30 m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol. A bola descreveu uma parábola e, quando começou a cair da altura máxima de 9 m, sua sombra se encontrava a 16 m da linha do gol. Após o chute de "Chorão", nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento.

A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura abaixo:



A equação da parábola era do tipo:

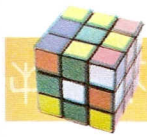
$$y = -\frac{x^2}{36} + c$$

O ponto onde a bola tocou pela primeira vez foi:

a) na baliza.
b) atrás do gol.
c) dentro do gol.
d) antes da linha do gol.

22 (Fuvest-SP) Para que a parábola $y = 2x^2 + mx + 5$ *não* intercepte a reta $y = 3$, devemos ter:

a) $-4 < m < 4$
b) $m < -3$ ou $m > 4$
c) $m > 5$ ou $m < -5$
d) $m = -5$ ou $m = 5$
e) $m \neq 0$



Desafios

1 Os alunos de uma escola alugaram, para a festa de formatura, um barzinho com capacidade para 150 pessoas. Cada aluno comprometeu-se, de início, a pagar R$ 10,00. Caso o barzinho não ficasse totalmente cheio, seu gerente propôs que cada aluno que comparecesse pagasse um adicional de R$ 0,50 por "lugar" vazio.

a) Qual a receita obtida se, no dia, comparecessem 120 pessoas?
b) Como se expressa a receita R gerada pela presença de x ($x \leq 150$) alunos?
c) Para que valor de x a receita gerada é máxima? Qual é essa receita?

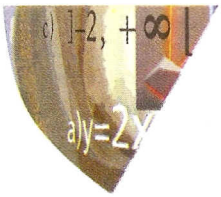
2 (U. F. Juiz de Fora-MG) Em uma pequena indústria, sabe-se que o custo C (em reais) para fabricar uma quantidade q (em metros) de um produto é dado por $C = 6000 + 20q$. Supondo que toda quantidade produzida é vendida, e que a quantidade vendida q (em metros), em função do preço de venda p (em reais), de um metro desse produto, é dada por $q = 300 - 2p$, $0 < p \leq 150$, determine:

a) A função que relaciona o lucro L (em reais) com o preço p.
b) O preço p que proporciona o lucro máximo.

3 O parque do Ibirapuera é um dos símbolos da cidade de São Paulo. Nesta foto, é possível identificar as trajetórias parabólicas descritas pela água jogada por meio de duas bombas. Para um observador na calçada, as bombas e os pontos de alcance atingidos pela água são aproximadamente colineares. Tome uma régua e considere como eixo das abscissas a reta que liga os pontos mencionados. Use a escala 1:2, isto é, cada cm de régua equivale a 2 unidades no nosso sistema cartesiano. Tente determinar as leis que definem as parábolas da figura.

Roberto Périgo

Sugestão: Com as considerações acima, note que o domínio dessa função é [0, 21]. Você chegará a um resultado que será o nosso próximo objeto de estudo.

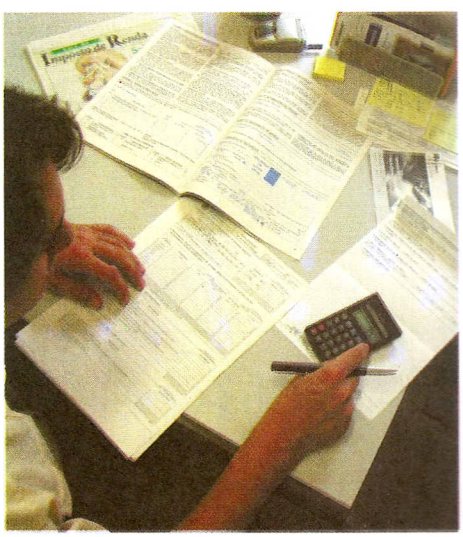


5

FUNÇÃO MODULAR

1 ○ Função definida por mais de uma sentença

O Imposto de Renda Devido (IRD) a ser pago pelo contribuinte, relativo ao ano de 2001, dependia de sua Renda Líquida (RL). O manual para preenchimento da declaração de rendimentos apresentava a tabela abaixo, que permitia calcular o IRD a partir da RL.



Stock Brazil

RL (em reais)	Alíquota de imposto	Parcela a deduzir
até 12 690,00	0%	0
de 12 690,00 a 25 380,00	15%	1 903,50
acima de 25 380,01	27,5%	5 393,25

De acordo com essa tabela, temos:

a) Um contribuinte com RL = R$ 8 000,00 teria IRD = 0

b) Um contribuinte com RL = R$ 20 000,00 teria
IRD = 15% de 20 000 − 1 903,50 =
= 0,15 × 20 000 − 1 903,50 = 1 096,50

c) Um contribuinte com RL = R$ 100 000,00 teria
IRD = 27,5% de 100 000 − 5 393,25 =
= 0,275 × 100 000 − 5 393,25 = 22 106,75

d) Um contribuinte com RL = R$ 200 000,00 teria
IRD = 27,5% de 200 000 − 5 393,25 =
= 0,275 × 200 000 − 5 393,25 = 49 606,75

Em geral, se um contribuinte apresentasse RL = x, como poderia ser calculado o IRD = y? A resposta seria:

- se $0 \leq x \leq 12\,690$, então $y = 0$;
- se $12\,690 < x \leq 25\,380$, então $y = 0{,}15x - 1\,903{,}50$;
- se $x > 25\,380$, então $y = 0{,}275x - 5\,393{,}25$.

Podemos observar que y é uma função de x, definida por três sentenças. Usa-se uma sentença ou outra dependendo do intervalo em que o valor de x se enquadra. Uma função desse tipo é chamada *função definida por mais de uma sentença.*

Exemplo 1

Sendo f uma função definida pelas sentenças:

- se $x < 0$, então $f(x) = 1$
- se $x \geqslant 0$, então $f(x) = x + 1$,

vamos calcular $f(-3)$, $f(-\sqrt{2})$, $f(0)$, $f(2)$ e construir o gráfico de f.

Temos:

$$-3 < 0 \Rightarrow f(-3) = 1$$
$$-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = 1$$
$$0 \geqslant 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 1 = 1$$
$$2 \geqslant 0 \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$$

Para construir o gráfico de f, fazemos assim:

- *1º passo:* construímos o gráfico da função constante $f(x) = 1$, mas só consideramos o trecho em que $x < 0$ (fig. 1).
- *2º passo:* construímos o gráfico da função afim $f(x) = x + 1$, mas só consideramos o trecho em que $x \geqslant 0$ (fig. 2).
- *3º passo:* reunimos os dois gráficos num só (fig. 3).

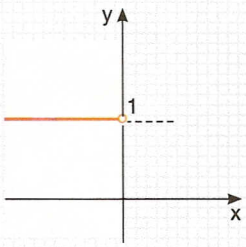


Fig. 1

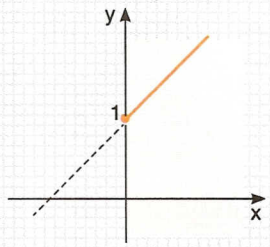


Fig. 2

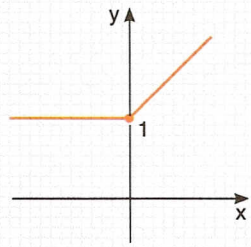
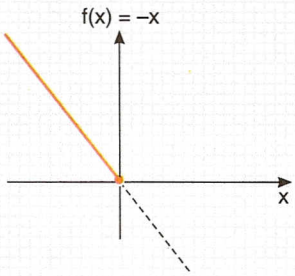
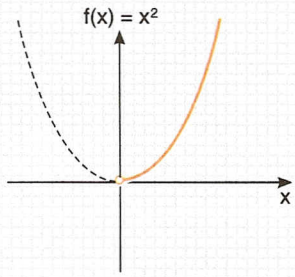


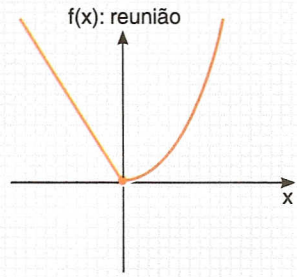
Fig. 3

Exemplo 2

Vamos construir o gráfico da função f tal que: $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x \leqslant 0 \\ x^2, \text{ se } x > 0 \end{cases}$.







Exercícios

1 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 2x - 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

Calcule:

a) $f(4)$ b) $f(-3)$ c) $f(0)$ d) $f(\sqrt{2} - 1)$

2 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x + 2, \text{ se } x \text{ é racional} \\ x^2, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$.

Qual é o valor de:

a) $f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{5})$?

b) x tal que $f(x) = 0$?

c) $f(0{,}333\ldots)$?

3 A diária para um casal em um hotel-fazenda é de R$ 80,00 para hospedagem de até uma semana. A partir daí, a diária cai para R$ 65,00.

a) Quantos reais pagará um casal que se hospedar por 5 dias? E por 10 dias?

b) Seja $g(x)$ a quantia, em reais, gasta por um casal que se hospedou por x dias. Determine a lei que define $g(x)$.

4 É comum observarmos em casas de xerox promoções do tipo:
"Até 100 cópias: R$ 0,10 por cópia. Acima de 100 cópias (de um mesmo original): R$ 0,07 por cópia excedente."
Determine:

a) o valor pago por 130 cópias de um mesmo original.

b) a lei que define a função preço p pago pela reprodução de x cópias de um mesmo original.

5 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ se } x < -1 \\ x^2 + 5x - 3, \text{ se } -1 \leqslant x < 2 \\ -4x + 5, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$.

Calcule:

a) $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{9}{4}\right)$

b) $f(\sqrt{2}) - f(0)$

c) o valor de x tal que $f(x) = 0$

6 Existe, na cidade de São Paulo, um bairro nacionalmente conhecido como centro de compras de roupas: o Bom Retiro.
Um atacadista desse bairro vende conjuntos femininos nas seguintes condições:

até 20 peças → R$ 30,00 por peça

de 21 a 30 peças → desconto de 10% (sobre o preço original) por conjunto que exceder as 20 peças

acima de 30 peças → além do desconto anterior, desconto de 20% (sobre o preço original) por conjunto que exceder as 30 peças

a) Qual é o preço pago por 23 conjuntos? E por 32 conjuntos?

b) Qual é a lei que define o preço (p) em função do número de conjuntos adquiridos (x)?

c) Dispondo de R$ 800,00, quantos conjuntos podem ser comprados?

7 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$, destacando seu conjunto imagem:

a) $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ 4 - x, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

8 Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$ e determine o conjunto imagem de cada uma delas:

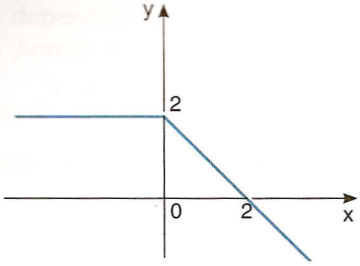
a) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x^2 - 4x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

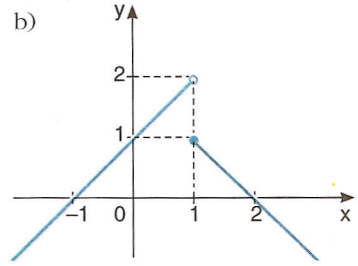
c) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{2}, \text{ se } 0 < x \leqslant 2 \\ 1, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

9 Escreva a lei de cada uma das funções cujos gráficos estão representados abaixo:

a)



b)

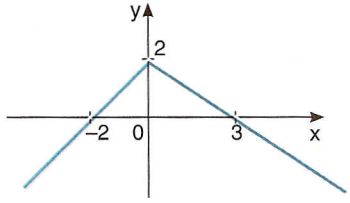


10 (UF-PR) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, \text{ se } x < -1 \\ x, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de f no plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
b) Determine o conjunto imagem de f.

11 O gráfico seguinte representa a função f dada por $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq 0 \\ mx + n, \text{ se } x > 0 \end{cases}$:

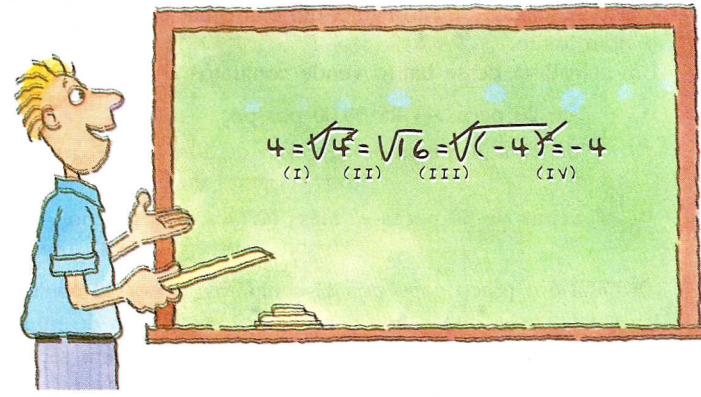


a) Qual é o valor de n + m?
b) Quanto vale f(4) – f(–4)?

2 ○ Módulo de um número

Introdução

Um aluno pediu a seu professor de Matemática que lhe explicasse em que passagem foi cometido um erro nesta seqüência de igualdades ao lado.



Observe que, na passagem I, o índice da raiz (que é 2) foi simplificado com o expoente 2 do radicando, que é igual a 4. O erro está na passagem IV, pois cancelou-se o índice da raiz com o expoente 2 do radicando, que é igual a –4.

A propriedade do cancelamento que foi aplicada duas vezes nessa seqüência só é válida se a base da potência for *positiva*.

Desse modo,

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ quando } x \text{ é positivo} \\ -x, \text{ quando } x \text{ é negativo} \end{cases}.$$

Observe que, na segunda possibilidade, $-x$ é um número *positivo*.

Para resolver questões como a apresentada acima, entre outras, definiremos o módulo de um número real de maneira mais profunda que a utilizada no capítulo 1.

Definição

Dado um número real x, chama-se *módulo* ou *valor absoluto* de x, e se indica com $|x|$, o número real não negativo tal que:

$$|x| = x, \text{ se } x \geqslant 0$$

ou

$$|x| = -x, \text{ se } x < 0$$

Isso significa que:

- **1º** o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;
- **2º** o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número;
- **3º** o módulo de um número real qualquer é sempre maior ou igual a zero: $|x| \geqslant 0$, $\forall x$.

Assim, podemos identificar alguns módulos:

$$|+1| = +1 \qquad |-5| = +5 \qquad |0| = 0 \qquad \left|+\frac{2}{7}\right| = +\frac{2}{7} \qquad |-\sqrt{2}| = +\sqrt{2}$$

Com essa definição, escrevemos, de modo geral: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemplo 3

Qual é o valor de $|1 - \sqrt{2}|$?
Sabemos que $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, então $1 < \sqrt{2}$, portanto, $1 - \sqrt{2} < 0$ e daí vem:

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 = 0{,}4142\ldots$$

Exemplo 4

Simplifiquemos a fração $E = \dfrac{|x - 3|}{2x - 6}$.
Da definição de módulo temos:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x - 3 \geqslant 0, \text{ isto é, se } x \geqslant 3 \\ \text{ou} \\ -(x - 3), \text{ se } x - 3 < 0, \text{ isto é, se } x < 3 \end{cases}$$

Temos, então, duas possibilidades para E:

1ª) se $x > 3$, então $E = \dfrac{x - 3}{2x - 6} = \dfrac{x - 3}{2(x - 3)} = \dfrac{1}{2}$

2ª) se $x < 3$, então $E = \dfrac{-(x - 3)}{2x - 6} = \dfrac{-(x - 3)}{2(x - 3)} = -\dfrac{1}{2}$

Exercícios

12 Calcule:

a) $|-7|$ c) $|0|$ e) $|2 - \sqrt{3}|$ g) $|\sqrt{5} - 2| - |2 - \sqrt{5}|$
b) $|3|$ d) $|0{,}1 - 0{,}3|$ f) $|-6 + 2\pi|$

13 Para $x \in \mathbb{R}$ e $x < 2$, qual é o valor da expressão $E = 1 + \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$?

14 (UF-MS) Se a e b são números reais tais que $\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}} = \sqrt{13}$, quanto vale $\left|\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right|$?

3 ○ Função modular

Chama-se *função modular* a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = |x|$.

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser assim caracterizada:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

4 ○ Gráfico

Para construir o gráfico da função modular, procedemos assim:

- *1º passo:* construímos o gráfico da função $f(x) = x$, mas só consideramos a parte em que $x \geqslant 0$ (fig. 1), que é a bissetriz do 1º quadrante;
- *2º passo:* construímos o gráfico da função $f(x) = -x$, mas só consideramos a parte em que $x < 0$ (fig. 2), que é a bissetriz do 2º quadrante;
- *3º passo:* reunimos os dois gráficos anteriores (fig. 3).

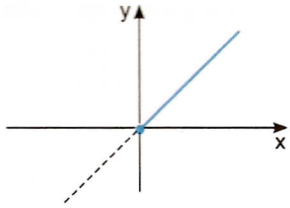


Fig. 1

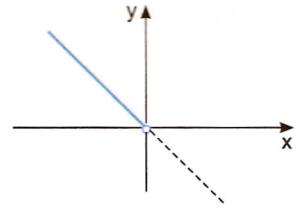


Fig. 2

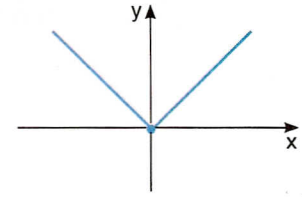


Fig. 3

5 ○ Imagem

O conjunto imagem da função modular é $\mathbb{R}_+$, isto é, a função modular assume somente valores reais não negativos.

6 ○ Função composta

Vamos pensar na função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = x + 1$. Então f leva cada x real ao número $x + 1$.

Em seguida, pensemos na função g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela lei $g(x) = x^2$. Sabemos que g leva cada x real ao número x^2.

Qual será o resultado final se tomarmos um x real e a ele aplicarmos *sucessivamente* a lei de f e a lei de g?

Teremos:

$$x \xrightarrow[\text{somar } 1]{f} x + 1 \xrightarrow[\text{quadrar}]{g} (x + 1)^2$$

O resultado final é que x é levado a $(x + 1)^2$. Essa função h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que leva x até $(x + 1)^2$ é chamada *composta* de g com f. Indica-se $h = g \circ f$ (lê-se "g bola f"), tal que $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemplo 5

Se $f(x) = 3x$ e $g(x) = -4x$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g(3x) = -4(3x) = -12x$$

Exemplo 6

Se $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \frac{3}{x}$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = \frac{3}{2x - 1}$$

Exemplo 7

Se $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ e $g(x) = 2x + 1$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x + 1}\right) = 2 \cdot \frac{1}{x + 1} + 1 = \frac{x + 3}{x + 1}$$

Exercícios

15 Sejam f e g funções reais tais que $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x - 2$. Determine:

a) $f(g(5))$ b) $g(f(-2))$ c) $f(g(x))$ d) $g(f(x))$

16 Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x + 1$. Determine:

a) $f \circ g(1)$ b) $g \circ f(2)$ c) $f(g(f(4)))$ d) $f(f(-1))$

17 Sejam as funções f e g reais definidas por $f(x) = 2x + a$ e $g(x) = 3x - 2$, e $a \in \mathbb{R}$. Determine a a fim de que, para todo x real, $f(g(x)) = g(f(x))$.

18 (Unicap-PE) Um estudo das condições ambientais de um município indica que a taxa média C de monóxido de carbono no ar, expressa em ppm (partes por milhão), será de $C(p) = 0{,}5p - 1$ quando a população for de p milhares de habitantes.
Daqui a t anos, a população será de $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$.

a) Atualmente, qual é a taxa de monóxido no ar?
b) Qual será a taxa de monóxido de carbono daqui a 4 anos?
c) Daqui a quanto tempo a concentração do monóxido será de 9 ppm?
d) Determine o nível de monóxido em função do tempo.

19 (UC-GO) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = 2x + 1$, qual é a solução da equação $\frac{f(1) - g(x)}{f[g(2)]} = \frac{f(2)}{f(0)}$?

20 Qual é o valor que a função $y = |x - 3| + |x - 1|$ assume se:

a) $x = -2$? b) $x = 5$? c) $1 < x < 3$?

21 Simplifique a expressão $E = \frac{\sqrt{(xy)^2} - \sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2 - 1}}$, se $x < 0$, $y < 0$ (com $y \neq -1$).

22 Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 3$. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $f(g(x)) = 0$ b) $g(f(x)) = 1$ c) $g(g(x)) = 1$

23 Sejam f e g funções reais tais que $g(x) = -4x + 2$ e $g(f(x)) = -12x - 18$. Obtenha:

a) $f(x)$ b) $f \circ f(x)$

24 Sabendo que $f(x) = 3x + 5$ e $g(f(x)) = 3x + 3$, obtenha $g(x)$.

25 (U. F. São Carlos-SP) Uma pesquisa ecológica determinou que a população (S) de sapos de uma determinada região, medida em centenas, depende da população (m) de insetos, medida em milhares, de acordo com a equação $S(m) = 65 + \sqrt{\frac{m}{8}}$. A população de insetos, por sua vez, varia com a precipitação (p) de chuva em centímetros, de acordo com a equação $m(p) = 43p + 7{,}5$.

a) Expresse a população de sapos como função da precipitação.
b) Calcule a população de sapos quando a precipitação é de 1,5 cm.

26 (Mackenzie-SP) Os gráficos das funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = k^x$, $1 \neq k > 0$ se interceptam num ponto de abscissa 3. Então qual é o valor de $f(g(k))$?

7 ○ Funções compostas com a modular

Vamos mostrar, por meio de exemplos, como é feita a construção dos gráficos de algumas funções que resultam de composição de duas funções em que ao menos uma delas é a modular.

Exemplo 8

Se $f(x) = x - 1$ e $g(x) = |x|$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = |x - 1|$$

Vamos construir o gráfico da função $h(x) = |x - 1|$.

Como $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$, procedemos assim:

- **1º** construímos o gráfico de $y = x - 1$, mas só consideramos a parte em que $x \geqslant 1$ (fig. 1);
- **2º** construímos o gráfico de $y = -x + 1$, mas só consideramos a parte em que $x < 1$ (fig. 2);
- **3º** reunimos os dois gráficos anteriores (fig. 3).

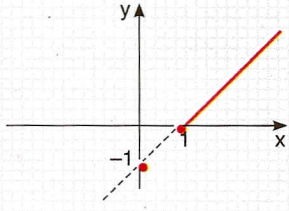


Fig. 1

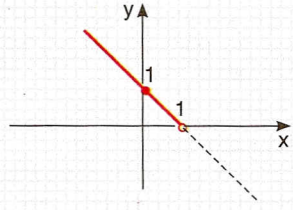


Fig. 2

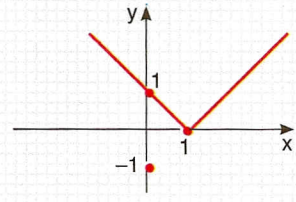


Fig. 3

Exemplo 9

Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = x + 1$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g(|x|) = |x| + 1$$

Vamos construir o gráfico da função $h(x) = |x| + 1$.
Para cada x, o valor de $h(x)$ é $|x|$ mais 1; portanto, o gráfico de $h(x)$ pode ser obtido assim:

- **1º** construímos o gráfico do $|x|$ (fig. 1);
- **2º** deslocamos (por translação) esse gráfico uma unidade para cima (fig. 2).

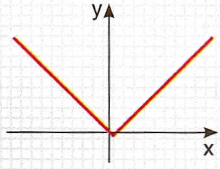


Fig. 1

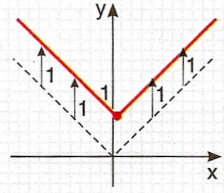


Fig. 2

27 Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = |2x|$ b) $f(x) = |x - 1|$ c) $f(x) = |4 - x^2|$

28 Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = |x| - 3$
b) $f(x) = -3 \cdot |x|$
c) $f(x) = 2 \cdot |x| + 1$
d) $f(x) = |3x - 4| + 1$

Sugestão: veja os desafios do capítulo 2.

29 (FGV-SP) Considere a função dada por $f(x) = \sqrt{(x-3)^2}$.

a) Calcule $f(3 + \sqrt{2}) + f(3 - \sqrt{2})$. b) Esboce o gráfico da função.

30 (Unificado-RJ) Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = |x|$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to y = x^2 - 2x - 8$.

Faça um esboço do gráfico da função $f \circ g$.

31 Construa os gráficos das seguintes funções reais:

a) $f(x) = |x| + x$ b) $f(x) = |x - 3| + x + 2$ c) $f(x) = x \cdot |x|$

32 Faça o gráfico da função real definida por $y = |x| + |x - 1|$.
Sugestão: de acordo com a definição de $|x|$ e de $|x - 1|$ considere três intervalos: $x \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$ e $x \geq 1$.

33 (UF-GO) Analise as afirmações seguintes, assinalando *V* ou *F*:
Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |1 - |x||$. Assim,

a) $f(-4) = 5$.
b) o valor mínimo de f é zero.
c) f é crescente para x no intervalo $[0, 1]$.
d) a equação $f(x) = 1$ possui três soluções reais distintas.

8 Equações modulares

Notemos uma propriedade do módulo dos números reais:

$$|x| = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = +1 \text{ ou } x = -1$$
$$|x| = 7 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = +7 \text{ ou } x = -7$$
$$|x| = \frac{2}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow x = +\frac{2}{5} \text{ ou } x = -\frac{2}{5}$$

De modo geral, sendo k um número positivo, temos:

$$|x| = k \Rightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$

Utilizando essa propriedade, vejamos como solucionar algumas equações modulares.

Exemplo 10

Vamos resolver a equação $|2x + 1| = 3$.
Temos:

$$|2x + 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ 2x + 1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$S = \{1, -2\}$

Exemplo 11

Vamos resolver a equação $|3x + 1| = |x - 5|$.
Temos:

$$|3x + 1| = |x - 5| \Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = x - 5 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3 \\ \text{ou} \\ 3x + 1 = -(x - 5) \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$S = \{-3, 1\}$

Exemplo 12

Vamos resolver a equação $|3x + 2| = x + 1$.
Para todo x real, sabemos que $|3x + 2| \geqslant 0$. Assim, para que a igualdade $|3x + 2| = x + 1$ seja possível, devemos ter $x + 1 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant -1$.
Supondo $x \geqslant -1$, temos:

$$|3x + 2| = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 = x + 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ 3x + 2 = -(x + 1) \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Como $-\frac{1}{2} \geqslant -1$, então $-\frac{1}{2}$ é solução.

Como $-\frac{3}{4} \geqslant -1$, então $-\frac{3}{4}$ é solução.

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right\}$$

Exercícios

34 Resolva em $\mathbb{R}$:

a) $|x| = 4$
b) $|2x - 1| = 3$
c) $|x^2 - 5x + 5| = 1$
d) $|x^2 - 2| = -1$

35 Resolva em $\mathbb{R}$:

a) $|3x - 11| = |-2x + 5|$
b) $|2x - 3| = x$
c) $|2x + 5| = -4x + 1$
d) $|4x - 3| = 3 - 4x$

36 (UF-MS) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$.

37 (UF-RJ) Durante o ano, uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função $L(x) = 50\,(|x - 100| + |x - 200|)$, em que $x = 1, 2, \ldots, 365$ corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais.
Determine em que dias (x) do ano o lucro foi de R$ 10 000,00.
Sugestão: analise três casos: $x < 100$, $100 \leqslant x < 200$ e $x \geqslant 200$.

38 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $|x|^3 - 7 \cdot |x|^2 + 6 \cdot |x| = 0$

39 (Cefet-MG) Qual é o número de soluções reais da equação $||x^2 - 2| - 4| = 2$?

9 Inequações modulares

Notemos uma propriedade do módulo dos números reais:

$$|x| < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$$
$$|x| > 2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > 2$$

De modo geral, sendo k um número real positivo, temos:

$$|x| < k \Rightarrow -k < x < k$$
$$|x| > k \Rightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$

Utilizando essa propriedade, vejamos como solucionar algumas inequações modulares.

Exemplo 13

Vamos resolver a inequação $|x - 3| < 5$.
Temos:

$$|x - 3| < 5 \Rightarrow -5 < x - 3 < 5 \Rightarrow -5 + 3 < x < 5 + 3$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 8\}$$

Exemplo 14

Vamos resolver a inequação $|3x - 4| > 2$.
Temos:

$$|3x - 4| > 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4 < -2 \Rightarrow 3x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \\ \text{ou} \\ 3x - 4 > 2 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$$

Exemplo 15

Vamos resolver a inequação $|2x + 1| \geq x - 3$.
Sabemos que:

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x \geq -\frac{1}{2} \text{ (I)} \\ \text{ou} \\ -(2x + 1), \text{ se } x < -\frac{1}{2} \text{ (II)} \end{cases}$$

Assim, temos de analisar duas possibilidades:

(I) $x \geq -\frac{1}{2}$ *(que chamaremos de condição a)*

A inequação dada fica sendo $2x + 1 \geq x - 3$, e daí vem $x \geq -4$ (que chamaremos de condição *b*).
Fazendo a interseção das condições *a* com *b*, vem:

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{2}\right\}$$

(II) $x < -\frac{1}{2}$ *(condição c)*

A inequação dada fica sendo $-2x - 1 \geq x - 3$, e daí vem $x \leq \frac{2}{3}$ (condição *d*).

zendo a interseção das condições *c* e *d*, vem:

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$$

ıtão, a solução da inequação dada é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$$

Exercícios

)lva em $\mathbb{R}$ as inequações:

x| ⩾ 4 b) |x| ⩽ 2 c) |x − 1| ⩾ 3 d) |−3x + 5| < 8

)lva, em $\mathbb{R}$, as desigualdades:

$|x^2 - x - 4| > 2$ b) $|x^2 - 3x - 4| \leqslant 6$ c) $|x| \geqslant x^2$

ıbeleça o domínio de cada uma das seguintes funções:

$f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{|2x - 3|}}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - |x|}}$

ı determinado mês, verificou-se que o número *n* de pessoas que compravam no supermercado perbarato era dado pela lei: $n(x) = 20 \cdot |x - 25| + 300$, em que x = 1, 2, 3, ..., 30 representa cada ı do mês.

Em que dias do mês 400 pessoas compraram produtos no supermercado Superbarato?
Em que dia do mês foi registrado o *menor* número de visitas ao supermercado? Qual foi esse número?
Em que dias do mês mais de 350 pessoas efetuaram compras no supermercado?

esolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

$|x + 3| \geqslant |x - 1|$ b) $x \cdot |x| \geqslant 4x$

Testes de vestibulares

. F. Ouro Preto-MG) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da por:

$$f(x) = \begin{cases} 10x + 5, \text{ se } x < -1 \\ x^2 - 1, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 5x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

ıtão, o valor de $f(-\sqrt{2}) + f(2\sqrt{2}) + f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é n número:

inteiro. c) racional. e) irracional.
) par. d) ímpar.

JF-PI) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x < 1 \\ -x^2 + 2x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

equação f(x) = 0 possui:

) 1 solução. d) 4 soluções.
) 2 soluções. e) nenhuma solução.
) 3 soluções.

3 (PUC-MG) Sendo $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x + 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ e $m = \sqrt{(-3)^2}$, o valor de f(m) é:

a) −10 b) −1 c) 5 d) 6 e) 8

Para responder às questões 4, 5 e 6, leia o texto abaixo:

Nos quadros a seguir estão as contas de luz e água de uma mesma residência.

Além do valor a pagar, cada conta mostra como calculá-lo, em função do consumo de água (em m^3) e de eletricidade (em kWh). Observe que, na conta de luz, o valor a pagar é igual ao consumo multiplicado por um certo fator. Já na conta de água, existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de eletricidade	
fornecimento	**valor (R$)**
401 kWh × 0,13276000	53,23

Companhia de saneamento			
Tarifas de água/m³			
faixas de consumo	**tarifa**	**consumo**	**valor (R$)**
até 10	5,50	tarifa mínima	5,50
11 a 20	0,85	7	5,95
21 a 30	2,13		
31 a 50	2,13		
acima de 50	2,36		
		Total	11,45

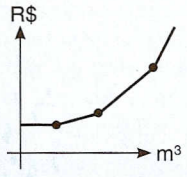
4 (Enem-MEC) Suponha que, no próximo mês, dobre o consumo de energia elétrica dessa residência. O novo valor da conta será de:

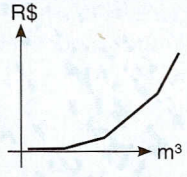
a) R$ 55,23
b) R$ 106,46
c) R$ 802,00
d) R$ 100,00
e) R$ 22,90

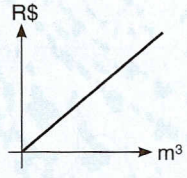
5 (Enem-MEC) Suponha agora que dobre o consumo de água. O novo valor da conta será de:

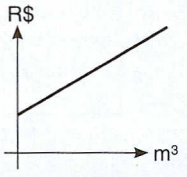
a) R$ 22,90
b) R$ 106,46
c) R$ 43,82
d) R$ 17,40
e) R$ 22,52

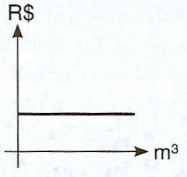
6 (Enem-MEC) Dos gráficos a seguir, o que melhor representa o valor da conta de água, de acordo com o consumo, é:

a)


b)


c)


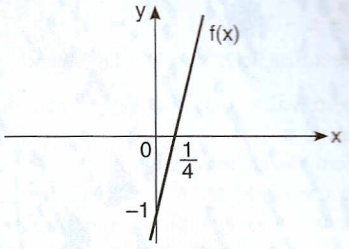
d)


e)


7 (Unifor-CE) Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = kx + 3$ e $g(x) = 2x$. Se $f(g(-3)) = -9$, então a função $g \circ f$ é dada por:

a) $g(f(x)) = 4x + 3$
b) $g(f(x)) = 4x - 3$
c) $g(f(x)) = 4x + 9$
d) $g(f(x)) = 4x - 6$
e) $g(f(x)) = 4x + 6$

8 (Unirio-RJ)



Com a função f(x), representada no gráfico acima, e com a função g(x), obtém-se a composta $g(f(x)) = x$. A expressão algébrica que define g(x) é:

a) $-\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$
b) $-\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
c) $\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
d) $\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$
e) $\frac{x}{4} + 1$

9 (Fafi-MG) O conjunto solução da equação $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$ está contido no conjunto dos:

a) naturais
b) inteiros não nulos
c) irracionais não negativos
d) reais não positivos

10 (U. F. Juiz de Fora-MG) O número de soluções negativas da equação $|5x - 6| = x^2$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

11 (U. Tuiuti-PR) As raízes reais da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$ são tais que:

a) a soma delas é –1
b) o produto delas é –6
c) ambas são positivas
d) o produto delas é –4
e) n. d. a.

12 (FEI-SP) O conjunto imagem da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - |x - 2|$ é:

a) $\{y \in \mathbb{R} | y \leq 1\}$
b) $\{y \in \mathbb{R} | y \geq 1\}$
c) $\{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$
d) $\{y \in \mathbb{R} | y \leq 2\}$
e) $\{y \in \mathbb{R} | y \geq 2\}$

13 (Facs-BA) Considere as funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 4$.

Sobre a função $h(x) = (g \circ f)(x)$, pode-se afirmar:

a) tem valor máximo no ponto de abscissa igual a 1.
b) tem raízes reais e iguais.
c) é crescente no intervalo $[1, +\infty[$.
d) tem como imagem o intervalo $]-\infty, -4]$.
e) tem gráfico simétrico em relação ao eixo OY.

14 (Unit-MG) Os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = |x^2 - 1|$ têm 2 pontos em comum. A soma das abscissas dos pontos em comum é:

a) $\sqrt{5}$ b) 1 c) –1 d) 0

15 (UA-AM) Se $f(g(x)) = x$ e $f(x) = \frac{x + 3}{2}$, então $g(x)$ é igual a:

a) $2x - 3$ d) $\frac{x + 2}{2}$
b) $3x + 2$ e) $\frac{2}{x + 3}$
c) $x + 3$

16 (Fatec-SP) A igualdade $-|-x| = -(-x)$ é verdadeira para todos os elementos do conjunto:

a) $\mathbb{R}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 10\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}$

17 (Uneb-BA) O domínio da função $f(x) = \sqrt{2 - |x - 1|}$ é o conjunto:

a) $]1, 3[$ d) $]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$
b) $]1, 3]$ e) $]-\infty, -3[\cup [1, +\infty[$
c) $[-1, 3]$

18 (Unifor-CE) Relativamente à função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3 \cdot |x| + 1$, é correto afirmar que:

a) f é decrescente para todo $x \leqslant 1$.
b) f é crescente para todo $x \neq 0$.
c) $f(x) = -2$ para algum $x \in \mathbb{R}$.
d) $f(x) = f(-x)$.
e) $f(x) = -f(x)$.

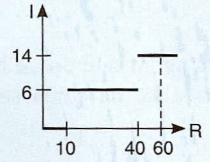
19 (PUC-RS) O domínio da função real f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$ é:

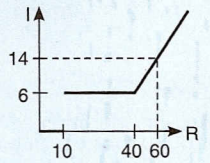
a) $\mathbb{R}^*$ d) $(1; +\infty)$
b) $\mathbb{R}_+$ e) $(0; +\infty)$
c) $[1; +\infty)$

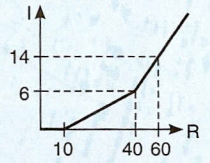
20 (Covest-PE) Em um certo país, o imposto (I) é calculado em termos da renda (R) do cidadão, utilizando a equação $I = t \cdot R - D$, em que a taxa (t) e a dedução (D) dependem da renda de acordo com a tabela abaixo:

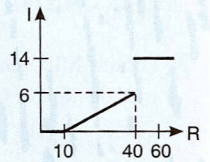
Renda (R)	Taxa (t)	Dedução (D)
até 10 000	0	0
entre 10 000 e 40 000	0,2	2 000
a partir de 40 000	0,4	10 000

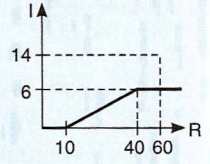
Qual dos gráficos a seguir melhor expressa o imposto como função de renda?
Obs.: Os valores da renda e imposto nos gráficos foram divididos por 1 000.

a)


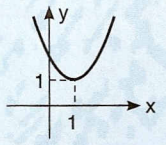
b)


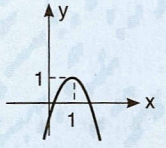
c)


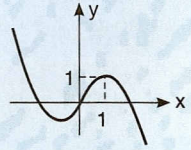
d)


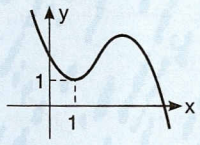
e)


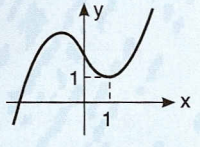
21 (Fuvest-SP) O *módulo* $|x|$ de um número real x é definido por $|x| = x$, se $x \geqslant 0$, e $|x| = -x$, se $x < 0$. Das alternativas abaixo, a que melhor representa o gráfico da função $f(x) = x|x| - 2x + 2$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


Desafios

1 (Fuvest-SP)

a) Esboce, para x real, o gráfico da função $f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$.
b) Para que valores reais de x temos $f(x) > 2x + 2$?
c) Encontre as raízes de $f(x)$.

2 (UF-MG) Observe a tabela abaixo:

Tabela do Imposto de Renda num determinado mês

Rendimento para base de cálculo do mês (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir (R$)
Até 900,00	—	Isento
Acima de 900,00 até 1 800,00	15	135,00
Acima de 1 800,00	25	315,00

Essa tabela é utilizada para calcular o imposto de renda a ser pago à Receita Federal por um trabalhador assalariado no mês em questão.
Para se obter o *rendimento para base de cálculo*, deve-se subtrair de seu rendimento bruto todas as deduções a que ele tem direito.
Ao rendimento para base de cálculo aplica-se a *alíquota* correspondente e, em seguida, subtrai-se a *parcela a deduzir*, também correspondente, de acordo com a tabela, obtendo-se assim o valor do imposto de renda a ser pago.
Nesse mês, um trabalhador, cujo rendimento bruto foi de R$ 2 000,00, teve direito somente às seguintes deduções: R$ 90,00 por dependente e R$ 200,00 pagos à Previdência.
Nessas condições, sabendo-se que o valor do imposto pago por esse trabalhador, nesse mês, foi de R$ 108,00, qual foi o número de dependentes considerado?

3 Uma proposta de cobrança do IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano) é o chamado *IPTU progressivo*, em que o valor venal de um imóvel é dividido segundo o critério de faixas, isto é, o valor é submetido a mais de uma alíquota de imposto.
Para entender esse cálculo, observe o cálculo do IPTU de um imóvel na cidade de São Paulo, cujo valor venal é 430 mil reais:

Tabela do IPTU de 2002
Uso residencial

Faixa	Limites (R$)	Alíquota
A	De 0 a 50 mil	0,8%
B	De 50 mil a 100 mil	1%
C	De 100 mil a 200 mil	1,2%
D	De 200 mil a 400 mil	1,4%
E	Acima de 400 mil	1,6%

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 26/10/2001.

a) Qual é o valor do IPTU de um apartamento cujo *valor venal* é de 80 mil reais?
b) Qual é o valor do IPTU de um apartamento cujo *valor de mercado* é de 350 mil reais?
c) Se o IPTU de um imóvel residencial equivale a R$ 1 140,00, qual é o *valor de mercado* desse imóvel?

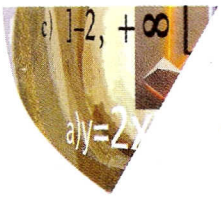
Cálculo do IPTU

As alíquotas incidem sobre o valor venal dos imóveis, que foi corrigido e ficou, em média, equivalente a 70% do valor de mercado

Cálculo de uma residência com valor venal de R$ 430 mil (valor de mercado de R$ 614 mil)

Faixa	Parcela de valor (R$)	Alíquota	Parcela de imposto (R$)
A	50 mil	0,8%	400
B	50 mil	1%	500
C	100 mil	1,2%	1 200
D	200 mil	1,4%	2 800
E	30 mil	1,6%	480
Total:	430 mil	—	5 480

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 26/10/2001.



6

FUNÇÃO EXPONENCIAL

1 ○ Potência de expoente natural

Definição

Sendo dados um número real a e um número natural n, com $n \geqslant 2$, chama-se *potência de base* $\boldsymbol{a}$ *e expoente* $\boldsymbol{n}$ o número a^n que é o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^2 = a \cdot a, \qquad a^3 = a \cdot a \cdot a, \qquad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a, \qquad \text{etc.}$$

Exemplos:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $\qquad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

Definição especial

Sendo dado um número real a, convencionaremos que $a^1 = a$ e que $a^0 = 1$ (nesse caso $a \neq 0$).

Vejamos alguns exemplos:

$0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$ $\qquad 3^1 = 3$ $\qquad (-2)^1 = -2$ $\qquad 4^0 = 1$ $\qquad (-7)^0 = 1$

Propriedades

Sendo a e b reais e m e n naturais, valem as seguintes propriedades:

$[P_1]$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$[P_2]$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ressalvas: $a \neq 0$ e $m \geqslant n$)

$[P_3]$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$[P_4]$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (ressalva: $b \neq 0$)

$[P_5]$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exercícios

1 Calcule:

a) $(-4)^2$ c) $-(-2)^4$ e) $(-1)^{21}$

b) -4^2 d) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$ f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

2 Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 : (-4)}$.

3 Qual é o valor de:

a) $3^{2^3} - (3^2)^3$? b) $(10^0 + 10^1 + 10^2)^2$? c) $\dfrac{(7^5)^3 : (7^3)^2}{(1 + 2 \cdot 3)^5}$?

2 Potência de expoente inteiro negativo

Definição

Dados um número real a, não nulo, e um número n natural, chama-se *potência de base* $\boldsymbol{a}$ *e expoente* $\boldsymbol{-n}$ o número a^{-n}, que é o inverso de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Vejamos alguns casos:

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} \qquad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \qquad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} \qquad \left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{64}} = -64$$

Exemplo 1

Calculemos o valor de $E = [10^{-2} + (-10)^{-1}]^{-1}$.
Temos:

$$E = \left[\frac{1}{10^2} + \frac{1}{(-10)}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{100} - \frac{1}{10}\right]^{-1} = \left(-\frac{9}{100}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{9}{100}} = -\frac{100}{9}$$

Propriedades

Com essa definição para potência de expoente inteiro negativo, todas as cinco propriedades, P_1 a P_5, enunciadas anteriormente continuam válidas para quaisquer expoentes m e n inteiros (positivos ou negativos).

Exemplo 2

Supondo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, vamos simplificar a expressão $E = \dfrac{a^{-1} \cdot (b^2)^3 \cdot (a^5)^4}{(b^{-2})^2 \cdot (a^2)^{-3}}$.

Temos:

$$E = \frac{a^{-1} \cdot b^6 \cdot a^{20}}{b^{-4} \cdot a^{-6}} = \frac{b^6 \cdot a^{19}}{b^{-4} \cdot a^{-6}} = \left(\frac{b^6}{b^{-4}}\right) \cdot \left(\frac{a^{19}}{a^{-6}}\right) = b^{10} \cdot a^{25}$$

Exercícios

4 Calcule:

a) 2^{-3}

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

c) $(-5)^{-3}$

d) $(0, 1)^{-2}$

e) 3^{-3}

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

5 Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

a) $\left[\dfrac{2^{-1} - (-2)^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}\right]^{-2}$

b) $\dfrac{3 \cdot 2^{-2} - 2 \cdot 3^{-2}}{(3 \cdot 2)^{-2}}$

c) $\dfrac{3^{x+2} - 3^{x+1}}{3^x}$

6 (Cefet-MG) Sabendo que $A = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$ e $B = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$, qual é o valor de $A^2 - B^2$?

7 (UC-GO) Simplifique a expressão $\dfrac{2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^{n-1}}$.

8 Sendo $a > 0$, resolva a inequação $\dfrac{a^{n+2} + a^{n+1} + a^n}{(2a^n)^2} \geqslant \dfrac{1}{a^n}$.

3 ○ Raiz n-ésima (enésima) aritmética

Definição

Dados um número real não negativo *a* e um número natural *n*, $n \geqslant 1$, chama-se *raiz enésima aritmética de* ***a*** o número real e não negativo *b* tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado *radical*, indica a raiz enésima aritmética de *a*. Nele, *a* é chamado *radicando*, e *n*, *índice*.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geqslant 0 \quad \text{e} \quad b^n = a$$

Vejamos alguns exemplos:

1. $\sqrt[2]{9} = 3$, pois $3^2 = 9$.
2. $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.
3. $\sqrt[5]{0} = 0$, pois $0^5 = 0$.
4. $\sqrt[4]{625} = 5$, pois $5^4 = 625$.

Propriedades

Sendo *a* e *b* reais não negativos, *m* inteiro e *n* e *p* naturais maiores ou iguais a 2, valem as seguintes propriedades:

$[R_1]$ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

$[R_2]$ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$[R_3]$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

$[R_4]$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$[R_5]$ $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Exemplo 3

Vamos simplificar as expressões:

a) $\sqrt{27} + \sqrt{12}$ b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{243\,ab^4}$ $(a \geq 0 \text{ e } b \geq 0)$

Temos:

a) $\sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{3^3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{243\,ab^4} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{3^5\,ab^4} = \sqrt{3^5 \cdot a^2b^4} = \sqrt{3^4 \cdot 3 \cdot a^2b^4} = 3^2ab^2\sqrt{3} = 9ab^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}ab^2$

Exemplo 4

Vamos racionalizar os denominadores das frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{3}+1}$

Temos:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{6}{\sqrt{3}+1} = \frac{6}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{6(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{6(\sqrt{3}-1)}{2} = 3(\sqrt{3}-1)$

Exercícios

9 Calcule o valor de:

a) $x = \sqrt{100 - 36}$ b) $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{49}}$ c) $z = \sqrt[5]{-1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt[3]{1}}}}$

10 Simplifique:

a) $\sqrt{72} + \sqrt{18} - 2 \cdot \sqrt{50}$ b) $\frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{125}}$ c) $\sqrt{48} - \sqrt{45} + \sqrt{12}$

11 Coloque em ordem crescente: $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{6}$ e 1.

12 Efetue:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}$

b) $\sqrt[4]{32} : \sqrt[4]{2}$

c) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$

13 Efetue, usando produtos notáveis:

a) $(1 + \sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

c) $(\sqrt{10} + 1) \cdot (\sqrt{10} - 1)$

d) $(\sqrt{2} + 2)^3$

14 Efetue:

a) $\sqrt{8 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{8 - \sqrt{15}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{12} + 2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{12} - 2}$

15 Calcule:

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ b) $\sqrt{4 \cdot \sqrt{2}}$ c) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}}$

16 Racionalize o denominador de cada uma das seguintes frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

17 Racionalize o denominador de cada uma das seguintes frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ b) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ d) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$

18 (Unifor-CE) Simplifique a expressão $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

19 (Cefet-MG) Qual é o valor da expressão $(\sqrt{2})^{-2} + (\sqrt{3})^{-2} + (\sqrt{6})^{-2}$?

20 (UF-MS) Calcule: $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{-2}{3}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^{2}}$.

4 Potência de expoente racional

Definição

Dados um número real a (positivo), um número inteiro p e um número natural q ($q \geq 1$), chama-se *potência de base* $\boldsymbol{a}$ *e expoente* $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$ a raiz q-ésima aritmética de a^p.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Vejamos alguns exemplos:

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5}$ $\quad 4^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ $\quad 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}} = \sqrt[2]{\frac{3125}{32}}$ $\quad 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

Definição especial

Sendo $\frac{p}{q} > 0$, define-se $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Propriedades

Sendo a e b reais positivos e $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ racionais, valem as seguintes propriedades:

$[P_1]$ $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$ $\quad [P_3]$ $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$ $\quad [P_5]$ $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$

$[P_2]$ $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$ $\quad [P_4]$ $(a : b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}}$

Exemplo 5

Vamos calcular o valor de $y = 8^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}}$.

Solução (a) — escrevemos as potências na forma de raízes.

$$y = \sqrt[3]{8^2} + \sqrt[4]{81} = \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{81} = 4 + 3 = 7$$

Solução (b) — usamos as propriedades das potências.

$$y = (2^3)^{\frac{2}{3}} + (3^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{6}{3}} + 3^{\frac{4}{4}} = 2^2 + 3^1 = 7$$

Exercícios

21 Simplifique as seguintes potências de expoente racional:

a) $9^{\frac{3}{2}}$ b) $8^{\frac{4}{3}}$ c) $64^{-\frac{2}{3}}$ d) $81^{-0,25}$ e) $1000^{0,666...}$

22 (Unimes-SP) Qual é o valor de: "A metade de 2^{22} multiplicada por $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{4^{0,5}}$"?

23 (Vunesp-SP) Uma fórmula matemática para se calcular aproximadamente a área, em metros quadrados, da superfície corporal de uma pessoa, é dada por:

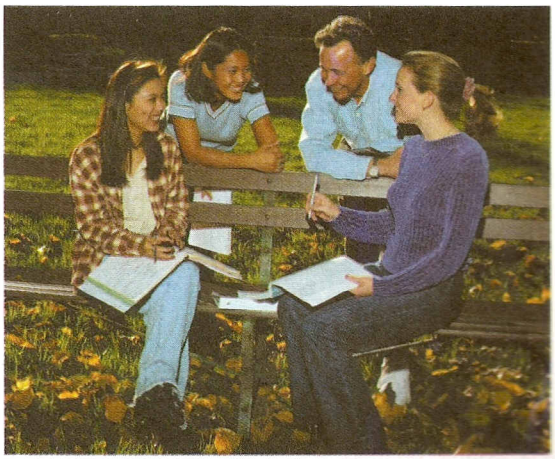
$$S(p) = \frac{11}{100} p^{\frac{2}{3}},$$

em que p é a massa da pessoa em quilogramas.
Considere uma criança de 8 kg. Determine:

a) a área da superfície corporal da criança;
b) a massa que a criança terá quando a área de sua superfície corporal duplicar. (Use a aproximação $\sqrt{2} = 1,4$.)

5 ○ Função exponencial

Introdução



© Photodisc

Um boato se espalha da seguinte maneira:

1º dia: duas pessoas ficam sabendo do boato.
2º dia: cada uma dessas 2 pessoas conta o boato para outras 2 pessoas.
3º dia: cada uma das 4 pessoas que ficaram sabendo do boato conta para outras 2 novas pessoas,

e assim por diante.

Enfim, para um certo dia x, há um número f(x) de pessoas que tomaram conhecimento dele naquele dia. O valor de f(x), portanto, é uma função de x, e a lei que expressa f(x) em função de x é $f(x) = 2^x$, que é um caso particular de *função exponencial*.

Definição

Chama-se *função exponencial* qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.

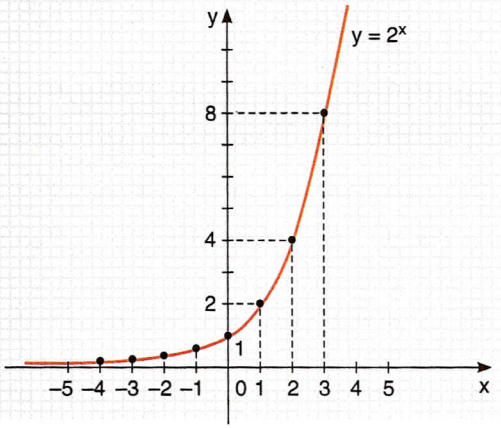
Gráfico

Vamos construir os gráficos de algumas funções exponenciais e observar algumas propriedades.

Exemplo 6

Vejamos como construir o gráfico da função $y = 2^x$.
Vamos usar o método de localizar alguns pontos do gráfico e ligá-los.

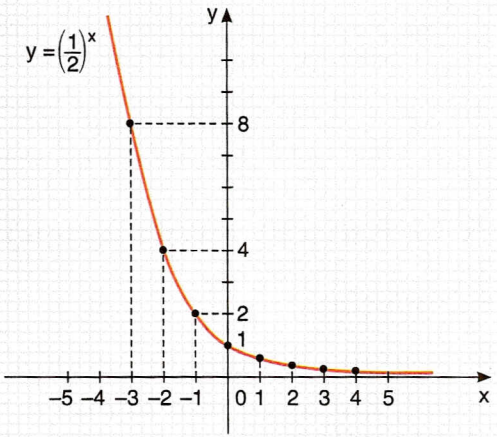
x	y
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Exemplo 7

Vamos construir o gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	y
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



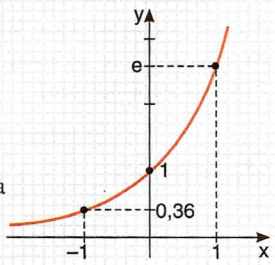
Exemplo 8

Um importante número irracional, que é estudado em Cálculo Diferencial e Integral, é indicado pela letra *e*. Para compreendê-lo, consideremos a expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ em que $x \in \mathbb{R}$ e vejamos alguns valores que ela assume quando x se "aproxima" de zero:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$	2,594	2,705	2,717	2,7182	2,7183

À medida que x se torna menor, a expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ fica cada vez mais próxima do número $e \cong 2{,}7183$.

O gráfico da função $y = e^x$ está representado ao lado.



Muitas calculadoras científicas e financeiras possuem a tecla e^x; dessa forma, em geral, não é necessário substituir e pela aproximação dada acima, bastando teclar o expoente x para se conhecer o resultado da potência e^x.

Veja:

- Para calcular e^2, teclamos:

$$2 \rightarrow e^x \rightarrow 7{,}389$$

Obtemos 7,389.

- Para calcular e^{10}, teclamos:

$$10 \rightarrow e^x \rightarrow 22\,026{,}46$$

Obtemos 22 026,46.

É muito importante destacar que as calculadoras científicas também nos auxiliam no cálculo de potências cujas contas são muito trabalhosas.

Agora observe a tecla y^x.

Nela, y representa a base da potência e x, seu expoente.

- Para calcular $1{,}3^5$, teclamos:

$$1{,}3 \rightarrow y^x \rightarrow 5 \rightarrow 3{,}712$$

Obtemos 3,712.

- Para calcular $2{,}3^8$, teclamos:

$$2{,}3 \rightarrow y^x \rightarrow 8 \rightarrow 783{,}109$$

Obtemos 783,109.

Cabe ressaltar que existem muitos modelos de calculadora e, em alguns casos, uma ou outra das operações anteriores poderá ser invertida.

De qualquer modo, muitas operações com potências podem ser simplificadas com o auxílio da calculadora. Em alguns problemas deste capítulo você precisará usá-la.

Propriedades

1ª) Na função exponencial $y = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1,$$

ou seja, o par ordenado (0, 1) satisfaz a lei $y = a^x$ para todo a ($a > 0$ e $a \neq 1$). Isso quer dizer que o gráfico de qualquer função exponencial corta o eixo dos y no ponto de ordenada 1.

2ª) Se $a > 1$, então a função $f(x) = a^x$ é crescente. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:

$$\text{se } x_1 < x_2, \text{ (sinais iguais) então } a^{x_1} < a^{x_2}$$

São crescentes, por exemplo, as funções exponenciais $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $f(x) = (1{,}2)^x$ e $f(x) = e^x$.

3ª) Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é decrescente. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:

$$\text{se } x_1 < x_2, \text{ (sinais opostos) então } a^{x_1} > a^{x_2}$$

São decrescentes, por exemplo, as funções exponenciais $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ e $f(x) = (0{,}1)^x$.

4ª) Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$\text{se } a^{x_1} = a^{x_2}, \quad \text{então} \quad x_1 = x_2$$

5ª) Para todo $a > 0$ e todo x real, temos $a^x > 0$; portanto, o gráfico da função $y = a^x$ está sempre acima do eixo dos x.

Se $a > 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores negativos cada vez menores. Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores positivos cada vez maiores. Tudo isso pode ser resumido dizendo-se que o conjunto imagem da função exponencial $y = a^x$ é $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

Exercícios

24 Construa os gráficos das seguintes funções exponenciais:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $f(x) = 2^{1-x}$

25 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções e determine o conjunto imagem:

a) $f(x) = 2^x - 3$

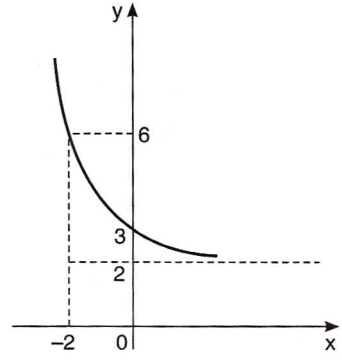
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

c) $f(x) = 2 \cdot 2^x + 1$

d) $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

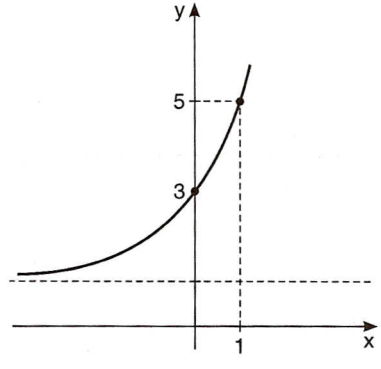
(Sugestão: volte aos desafios do capítulo 2.)

26 (U. F. Ouro Preto-MG) Seja f a função dada por $f(x) = p \cdot 2^{-x} + q$, cujo gráfico está representado na figura ao lado.



Determine p e q.

27 O gráfico ao lado representa a função f cuja lei é $f(x) = a + b \cdot 2^x$, sendo a e b constantes positivas.



a) Determine a e b

b) Qual é o conjunto imagem de f?

c) Calcule $f(-2)$

28 (UF-PI) Utilizando um microscópio, um técnico constatou que cada célula de uma bactéria subdivide-se em duas ao final de 20 minutos. Ao final de dez horas, qual será o total de células produzidas a partir de uma célula?

29 (FGV-SP) Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão

$$Q = 700 - 400e^{-0,5t}, \text{ em que}$$

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário;
t = meses de experiência;
e = 2,7183.

a) De acordo com essa expressão, quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá produzir mensalmente?

b) E um funcionário sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente? Compare esse resultado com o resultado do item *a*. Há coerência entre eles?

30 Meia-vida ou período de semidesintegração é o tempo necessário para a desintegração de metade dos átomos radioativos (ou metade da massa) de um certo isótopo de um elemento químico. A Química nos ensina que, na verdade, a massa desse isótopo não está sumindo: apenas está diminuindo pelo fato de o isótopo se transformar em outro isótopo.
O cobalto 60, Co_{27}^{60}, tem meia-vida de 5 anos. Ele é usado em hospitais na radioterapia, para tratamento de pacientes com câncer. A partir de uma amostra de 10 g do cobalto 60, determine:

a) A massa de isótopo daqui a 5 anos e daqui a 10 anos.

b) Seja x o *número de meias-vidas*. Encontre a lei que relaciona a massa m da amostra em função de x e esboce o gráfico dessa função.

c) Determine, a partir da lei, a massa desse isótopo daqui a 25 anos e daqui a 1 século.

31 (UF-PR) Duas populações, designadas por F e G, têm os respectivos crescimentos expressos por $f(t) = 36 + t^2$ e $g(t) = 10(2^t)$, sendo t número não negativo que representa o tempo em meses. Então, analise as seguintes afirmações:

a) A população G duplica a cada mês.

b) $g(51) - g(50) = g(50)$

c) Quando $t = 1$, a população F é menor do que a população G.

d) Em nenhum tempo a população F será igual à população G.

Equações exponenciais

Uma equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma potência.

São exponenciais, por exemplo, as equações $2^x = 16$, $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 81$ e $4^x - 2^x = 12$.

Um método usado para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação a potências de mesma base a ($0 < a \neq 1$), e daí aplicar a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Quando isso é possível, a equação exponencial é facilmente resolvida. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 9

Vamos resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

a) $2^x = 32$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$ c) $(\sqrt{2})^x = 16$

Temos:

a) $2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5\}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \Rightarrow (3^{-1})^x = 3^3 \Rightarrow 3^{-x} = 3^3 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow S = \{-3\}$

c) $(\sqrt{2})^x = 16 \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^4 \Rightarrow \frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow S = \{8\}$

Exemplo 10

Vamos resolver a seguinte equação em $\mathbb{R}$: $3^{2x+1} \cdot 9^{3x+1} = 27^{x-1}$

$$3^{2x+1} \cdot 9^{3x+1} = 27^{x-1} \Rightarrow 3^{2x+1} \cdot (3^2)^{3x+1} = (3^3)^{x-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3^{2x+1} \cdot 3^{6x+2} = 3^{3x-3} \Rightarrow 3^{8x+3} = 3^{3x-3} \Rightarrow 8x + 3 = 3x - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -\frac{6}{5} \Rightarrow S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$$

Exemplo 11

Vamos resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

a) $9^x + 3^x = 12$ b) $4^{x+1} - 4 \cdot 2^x = 224$

a) $9^x + 3^x = 12 \Rightarrow (3^2)^x + 3^x = 12 \Rightarrow 3^{2x} + 3^x = 12$

Chamando 3^x de y, vem:

$$y^2 + y = 12 \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ ou } y = -4$$

Como $y = 3^x$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} 3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ 3^x = -4 \Rightarrow \nexists\, x \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{1\}$$

b) $4^{x+1} - 4 \cdot 2^x = 224 \Rightarrow (2^2)^{x+1} - 4 \cdot 2^x = 224 \Rightarrow 2^{2x+2} - 4 \cdot 2^x = 224$
$\Rightarrow 2^{2x} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2^x = 224 \Rightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x = 224$

Chamando 2^x de y, vem:

$$4 \cdot y^2 - 4 \cdot y = 224 \Rightarrow y^2 - y - 56 = 0 \Rightarrow y = 8 \text{ ou } y = -7$$

Como $y = 2^x$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \\ \text{ou} \\ 2^x = -7 \Rightarrow \nexists\, x \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{3\}$$

Exercícios

32 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 32$ b) $5^x = 125$ c) $2^x = \frac{1}{8}$ d) $4^x = \frac{1}{32}$ e) $8^x = 0{,}125$

33 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^x = \sqrt[3]{9}$

b) $\frac{1}{e^2} = e^{x-3}$

c) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x-1}}$

d) $5^{2x^2+3x-2} = 1$

e) $0{,}64^{x+1} = 1{,}25^{-x+3}$

34 (UF-PA) Uma reserva florestal possui 10 000 árvores. Determine em quantos anos a quantidade de árvores estará reduzida à oitava parte, se a função que representa a quantidade de árvores por ano é $y(t) = 10\,000 \cdot 2^{-t}$.

35 Uma imobiliária acredita que o valor v de um imóvel no litoral varia segundo a lei $v(t) = 60000 \cdot 0{,}9^t$, em que t é o número de anos contados a partir de hoje.

a) Qual é o valor atual desse imóvel?

b) Qual é a desvalorização percentual anual desse imóvel?

c) Quanto valerá esse imóvel daqui a 2 anos?

d) Daqui a quantos anos o imóvel valerá R$ 35429,40? (Dado: $9^5 = 59049$.)

Observação: Se desejar, use a calculadora.

36 Um dos produtos liberados nos acidentes em usinas nucleares é o isótopo do estrôncio 90, Sr^{90}, cuja meia-vida é de 28 anos. Se uma explosão nuclear liberou 30 g desse isótopo, determine:

a) a massa desse isótopo 84 anos após essa explosão;

b) o tempo necessário para que a massa desse isótopo seja de $15 \cdot 2^{-7}$ g.

Observação: Se desejar, use a calculadora.

37 Uma maionese malconservada causou mal-estar nos freqüentadores de um clube. Uma investigação revelou a presença da bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei:

$$n(t) = 200 \cdot 2^{at},$$

em que n(t) é o número de bactérias encontradas na amostra de maionese t horas após o início do almoço e a é uma constante real.

a) Determine o número inicial de bactérias.

b) Sabendo que após 3 horas do início do almoço o número de bactérias era de 800, determine o valor da constante a.

c) Determine o número de bactérias após 1 dia da realização do almoço (use $2^{10} \sim 10^3$).

38 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$

b) $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1}$

c) $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4$

d) $10^{3x} : 0{,}01^{-x+4} = 1$

39 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $2^{x+1} + 2^x - 2^{x-2} = 44$

b) $4^x - 2^x = 2$

c) $2^{x+1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2^{x-1}} = \frac{30}{2^x}$

d) $3^{-x} + 3^{x+1} = \frac{28}{3}$

40 (UF-SC) Qual é o valor de x que satisfaz a equação $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$?

41 Resolva, em $\mathbb{R}$, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 5^{x+y} = \frac{1}{5} \\ 7^{2x+y} - 7 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 10^{-x} \cdot 10^{2y} = 10^5 \\ 4^{5x} : 8^{y-x} = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5^x + 5^{y+1} = 26 \\ e^x \cdot e^{2y} = 1 \end{cases}$, com x e y inteiros

42 (PUC-PR) Resolva a equação: $3^{2x+3} - 3^{2x+2} + 2 \cdot 3^{2x} = 2^{2x+5} - 2^{2x+1}$.

Inequações exponenciais

Uma inequação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma potência.

São exponenciais, por exemplo, as inequações $2^x > 64$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$ e $4^x - 2^x \leq 12$.

Um método usado para resolver inequações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da inequação a potências de mesma base a ($0 < a \neq 1$), e daí aplicar a propriedade:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2 \text{ (se } a > 1)$$

ou

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2 \text{ (se } 0 < a < 1)$$

Exemplo 12

Vamos resolver as seguintes inequações em $\mathbb{R}$:

a) $2^x > 64$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$ c) $(\sqrt{2})^x \geq 8\sqrt{2}$ d) $(0{,}7)^{2x-1} > 1$

a) $2^x > 64 \Rightarrow 2^x > 2^6 \Rightarrow x > 6 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27 \Rightarrow (3^{-1})^x \leq 3^3 \Rightarrow 3^{-x} \leq 3^3 \Rightarrow -x \leq 3 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$

c) $(\sqrt{2})^x \geq 8\sqrt{2} \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x \geq 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} \geq 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} \geq \frac{7}{2} \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

d) $(0{,}7)^{2x-1} > 1 \Rightarrow (0{,}7)^{2x-1} > (0{,}7)^0 \Rightarrow 2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

Exemplo 13

Vamos resolver a seguinte inequação em $\mathbb{R}$:

$$(5^{-x})^{3x+1} \cdot 25^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{125}\right)^{x-1}$$

$$(5^{-x})^{3x+1} \cdot 25^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{125}\right)^{x-1} \Rightarrow 5^{-3x^2-x} \cdot 5^{2+4x-2x^2} \geq 5^{-3x+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^{-5x^2+3x+2} \geq 5^{-3x+3} \Rightarrow -5x^2 + 3x + 2 \geq -3x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 6x + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq x \leq 1 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leq x \leq 1\right\}$$

Exemplo 14

Vamos resolver a seguinte inequação em $\mathbb{R}$:

$$7^x - 6 \geq 7^{1-x}$$

$$7^x - 6 \geq 7^{1-x} \Rightarrow 7^x - 6 \geq \frac{7}{7^x} \Rightarrow 7^{2x} - 6 \cdot 7^x \geq 7 \Rightarrow 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 \geq 0$$

Fazendo $7^x = y$, vem:

$$y^2 - 6 \cdot y - 7 \geq 0 \Rightarrow y \leq -1 \text{ ou } y \geq 7$$

Logo, como $7^x = y$:

$$\left.\begin{array}{l} 7^x \leq -1 \Rightarrow \nexists\, x \\ \text{ou} \\ 7^x \geq 7 \Rightarrow 7^x \geq 7^1 \Rightarrow x \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

43 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^x < 32$

b) $3^x > 243$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 125$

e) $5^x < -1$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \frac{5}{2}$

44 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $(\sqrt[3]{3})^x \leq \frac{1}{9}$

b) $(0{,}01)^x \leq \frac{1}{\sqrt{1000}}$

c) $4^x \geq 8$

d) $(0{,}8)^x > \frac{5}{4}$

e) $e^{4x+1} > \frac{1}{e}$

f) $0{,}3^{x+2} \geq \frac{100}{9}$

45 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^{x^2-x} \leq 64$

b) $\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{e}\right)^4$

c) $(27^{x-2})^{x+1} \geq (9^{x+1})^{x-3}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3} > 1$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+3} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1}$

46 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes desigualdades:

a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240$

b) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

c) $e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e < 0$

47 A lei seguinte representa o crescimento do número de pessoas infectadas por uma gripe, em uma certa metrópole: $N(t) = a \cdot 2^{bt}$, em que $N(t)$ é o número de pessoas infectadas t dias após a realização desse estudo e a e b são constantes reais. Sabendo que no dia em que se iniciou o estudo já havia 3000 pessoas infectadas e que, após 2 dias, esse número já era de 24000 pessoas, determine:

a) Os valores das constantes a e b.

b) O número de infectados pela gripe após 16 horas do início dos estudos.

c) O número mínimo de dias necessários para que o número de infectados ultrapasse 3 milhões. Use a aproximação $2^{10} \sim 10^3$.

48 (U. F. Viçosa-MG) Sabendo que $2^a \cdot x^2 + 4^{a+1} \cdot x + 8 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, determine o intervalo de variação do parâmetro a.

49 Considere a equação de 2º grau, na variável x:

$$x^2 + 2^t \cdot x + 8^{-t+3} = 0$$

a) Verifique que, para $t = 0$, a equação não tem raízes reais.

b) Qual é o *menor* valor natural de t para o qual essa equação admite duas raízes reais e distintas?

1 (Fuvest-SP) $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28} + 2^{30}}{10}} =$

a) $\dfrac{2^8}{5}$ c) 2^8 e) $\left(\dfrac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) $\dfrac{2^9}{5}$ d) 2^9

2 (Umesp-SP) Simplificando a expressão abaixo,

$$\frac{1}{2}\left[(0{,}5)^{-4} + \sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right]^{-1}$$

obtemos:

a) $\dfrac{1}{33}$ c) $\dfrac{8}{9}$ e) $\dfrac{33}{4}$

b) $\dfrac{9}{32}$ d) $\dfrac{8}{7}$

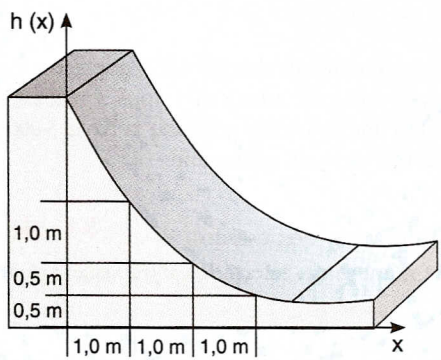
3 (Mackenzie-SP) Se $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{10}{3}$, então $a + a^{-1}$ vale:

a) $\dfrac{82}{9}$ d) $\dfrac{100}{9}$

b) $\dfrac{100}{82}$ e) $\dfrac{82}{3}$

c) $\dfrac{16}{9}$

4 (Cefet-PR) Uma rampa para manobras de *skate* é representada pelo esquema:



Se a parte curva pudesse ser associada a uma função, essa função seria:

a) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 3$ d) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$

b) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} + \dfrac{5}{2}$ e) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$

c) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$

5 (Unirio-RJ) Segundo dados de uma pesquisa, a população de certa região do país vem decrescendo em relação ao tempo t, contado em anos, aproximadamente, segundo a relação:

$$P(t) = P(0) \cdot 2^{-0{,}25t}$$

Sendo P(0) uma constante que representa a população inicial dessa região e P(t) a população t anos após, determine quantos anos decorrerão para que essa população fique reduzida à quarta parte da inicial.

a) 6 d) 12

b) 8 e) 15

c) 10

6 (Cefet-MG) A solução, em $\mathbb{R}$, da equação $16^x \cdot 4^{x+3} - 8^{x+2} = 0$ é:

a) 0 d) 3

b) 1 e) 6

c) 2

7 (Unimes-SP) O número real a satisfaz a sentença $3^{2x-1} < \dfrac{1}{9^{x+1}}$ se, e somente se:

a) $a < -4$ d) $-\dfrac{1}{4} < a < 0$

b) $-4 \leq a < -1$ e) $a > 4$

c) $a < -\dfrac{1}{4}$

8 (Fafi-MG) O valor de $\dfrac{21^{30}}{63^{15}}$ é:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{15}$ c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

b) 7^{15} d) 3^{15}

9 (Fuvest-SP) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que:

a) $a + b = 2$ d) $a - b = 2$

b) $a + b = 1$ e) $a - b = 1$

c) $a - b = 3$

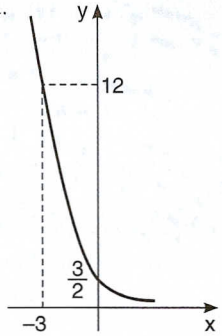
10 (UF-SE) Dado que $6^{3x} = 64$, o valor de 6^{-x} é:

a) 6 d) $\dfrac{1}{4}$

b) 4 e) $\dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{1}{2}$

11 (UF-MG) Observe a figura. Nessa figura, está representado o gráfico de $f(x) = ka^x$, sendo k e a constantes positivas. O valor de f(2) é:



a) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{2}$ d) 1

12 (FACS-BA) O domínio da função $g(x) = \sqrt{2^{2x+3} - 2^{x^2}}$ é:

a) $]-\infty, -1]$ d) $]-3, 1[$

b) $[3, +\infty[$ e) $[-1, 3]$

c) $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

13 (UF-SE) A expressão $P(n) = 40 - 40 \cdot 2^{-0,34n}$ permite calcular o número de artigos que um operário recém-contratado é capaz de produzir diariamente, após n dias de treinamento. Para que esse operário produza pelo menos 30 artigos por dia, o menor valor inteiro de n é:

a) 2 c) 4 e) 6

b) 3 d) 5

14 (U. F. Santa Maria-RS) A solução da equação exponencial $5^x (5^x - 1) = 20$:

a) pertence ao intervalo $(-\infty, -3[$.
b) pertence ao intervalo $]4, +\infty)$.
c) pertence ao intervalo $]0, 2[$.
d) é um número par.
e) é um número irracional.

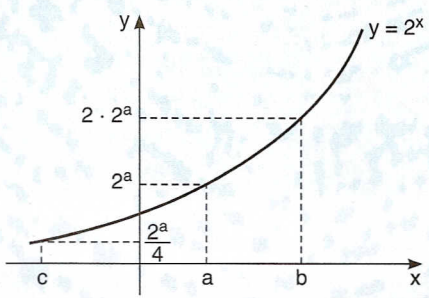
15 (Fund. Visconde de Cairu-BA) A soma das raízes da equação $4 \cdot 2^{2x-2} - 40 \cdot 2^{x-1} + 64 = 0$ é igual a:

a) 8 d) –16

b) 6 e) –20

c) 2

16 (UF-RN) No plano cartesiano abaixo, estão representados o gráfico da função $y = 2^x$, os números a, b, c e suas imagens.



Observando-se a figura, pode-se concluir que, *em função de a*, os valores de b e c são, respectivamente:

a) $\frac{a}{2}$ e $4a$ c) $2a$ e $\frac{a}{4}$

b) $a - 1$ e $a + 2$ d) $a + 1$ e $a - 2$

17 (PUC-MG) Se $f(x) = 4^{x+1}$ e $g(x) = 4^x$, a solução da inequação $f(x) > g(2 - x)$ é:

a) $x > 0$ d) $x > 1,5$

b) $x > 0,5$ e) $x > 2$

c) $x > 1$

18 (Cefet-MG) O conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \left(\frac{1}{4}\right)$ é:

a) $(-\infty, 5]$ d) $[4, +\infty)$

b) $[5, +\infty)$ e) $(-\infty, -5]$

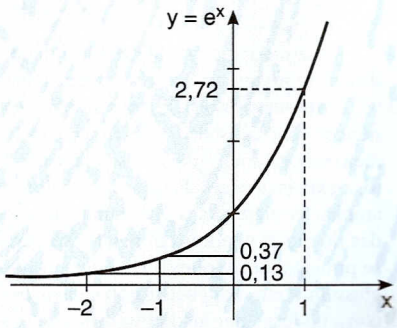
c) $[-5, +\infty)$

19 (PUC-RS) O produto das raízes da equação $\sqrt{4^{x+1} \cdot \sqrt{16^x}} = \frac{1}{8^{x^2-2}}$ é:

a) –5 c) $-\frac{5}{3}$ e) $\frac{5}{3}$

b) –2 d) 0

20 (UE-RJ) Uma empresa acompanha a produção diária de um funcionário recém-admitido, utilizando uma função f(d), cujo valor corresponde ao número mínimo de peças que a empresa espera que ele produza em cada dia (d), a partir da data de sua admissão.
Considere o gráfico auxiliar abaixo, que representa a função $y = e^x$.



Utilizando $f(d) = 100 - 100 \cdot e^{-0,2d}$ e o gráfico acima, a empresa pode prever que o funcionário alcançará a produção de 87 peças num mesmo dia, quando d for igual a:

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20

21 (Ucsal-BA) A equação $5^x + 5^{-x} = m$ admite raízes reais se, e somente se, o número real m satisfizer à condição:

a) $m < 0$
b) $-2 < m < 2$
c) $0 < m < 2$
d) $m \geq 2$
e) $m < -2$ ou $m > 2$

22 (ITA-SP) A soma das raízes reais positivas da equação $4^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0$ vale:

a) 2
b) 5
c) $\sqrt{2}$
d) 1
e) $\sqrt{3}$

23 (UE-RJ) Pelos programas de controle de tuberculose, sabe-se que o risco de infecção R depende do tempo t, em anos, do seguinte modo: $R = R_0\, e^{-kt}$, em que R_0 é o risco de infecção no início da contagem do tempo t e k é o coeficiente de declínio.

O risco de infecção atual em Salvador foi estimado em 2%. Suponha que, com a implantação de um programa nessa cidade, fosse obtida uma redução no risco de 10% ao ano, isto é, $k = 10\%$. Use a tabela abaixo para os cálculos necessários:

e^x	8,2	9,0	10,0	11,0	12,2
x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

O tempo, em anos, para que o risco de infecção se torne igual a 0,2%, é de:

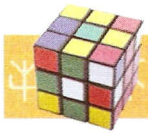
a) 21
b) 22
c) 23
d) 24

24 (UMC-SP) O tempo de circulação do sangue (em segundos) de um mamífero (o tempo médio que todo o sangue leva para circular uma vez e voltar ao coração) é proporcional à raiz quarta do "peso" do corpo do mamífero, isto é:

$$T(M) = K \cdot M^{\frac{1}{4}}$$

Para um elefante cujo "peso" é de 5184 quilos o tempo foi estimado em 150 segundos. Pode-se afirmar que:

a) a constante de proporcionalidade deve ser 30.
b) um mamífero de 64 quilos tem o tempo de circulação superior a 1 minuto.
c) um elefante de 1024 quilos tem o tempo de circulação igual a 100 segundos.
d) a constante de proporcionalidade deve ser 40.
e) um mamífero de 2500 quilos tem o tempo de circulação superior a 150 segundos.



Desafios

1

Medicamento mais barato não chega à população de menor poder aquisitivo

A entrada dos medicamentos genéricos no Brasil é um sucesso. Há um ano e meio no mercado, a venda desses remédios cresce exponencialmente, em torno de 15% ao mês.

Apesar do bom desempenho, os genéricos têm causado certa frustração no meio empresarial. Antes de seu lançamento, a expectativa era de que eles pudessem ampliar o mercado, aumentando as vendas de medicamentos em geral. Esperava-se principalmente que os genéricos conseguissem atrair, com seus preços menores, consumidores que não costumavam comprar remédios. O que ocorreu até agora, no entanto, foi simplesmente uma substituição de um tipo de produto por outro. Quem já comprava o produto de marca, economiza com o genérico. Quem não comprava, continuou fora do mercado.

Nelson Toledo

[...]

Os dados de comercialização de outubro apontam a venda de 8,4 milhões de unidades de genéricos.

(*O Estado de S. Paulo*, 16/12/2001.)

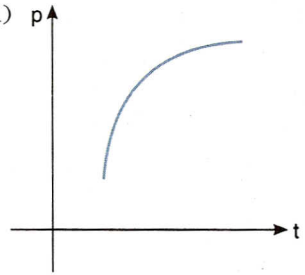
Vamos entender o significado da expressão *crescimento exponencial à taxa de 15% ao mês*:

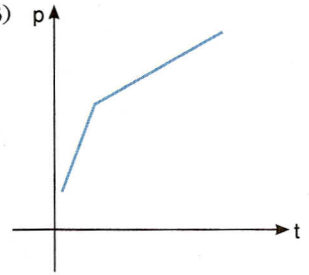
- *outubro* → 8,4 milhões de unidades vendidas
- *novembro* → $8{,}4 + \underbrace{0{,}15 \cdot 8{,}4}_{\text{15\% de aumento}} = 8{,}4 \cdot (1 + 0{,}15) = 1{,}15 \cdot 8{,}4$ milhões de unidades vendidas
- *dezembro* → o aumento de 15% é calculado sobre as vendas de *novembro*, e assim sucessivamente.

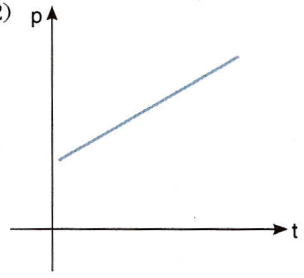
a) Quantas unidades de genéricos foram vendidas em dezembro de 2001?
b) Qual é a lei da função que relaciona o número de unidades de genéricos (f(x)) vendidas em x meses após outubro de 2001?

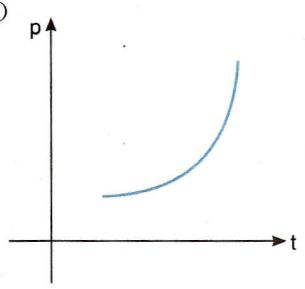
2 (UF-CE, adaptado) A população de uma cidade X aumenta 1500 habitantes por ano e a população de uma cidade Y aumenta 3% ao ano. Admita que, atualmente, a população de cada uma dessas cidades seja 100000 habitantes.

a) Qual é a lei que define a população p em cada uma dessas duas cidades daqui a t anos?
b) Em 2 anos, qual cidade terá maior número de habitantes?
c) Dos gráficos seguintes, selecione aqueles que melhor representam as populações p das cidades X e Y, em função do tempo t (dado em anos).

1)


3)


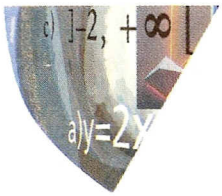
2)


4)


d) Usando a aproximação $1{,}03^{14} \cong \frac{3}{2}$, em quantos anos a população da cidade Y será de 150000 habitantes?

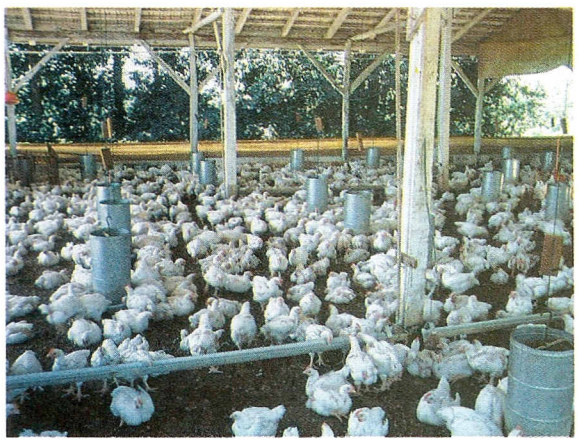
3 Sabendo que $2^x + 2^{-x} = 5$, calcule:

a) $4^x + 4^{-x}$ b) $8^x + 8^{-x}$



7 LOGARITMOS

1 ○ Introdução



Fabio Colombini

Uma granja especializada na criação de frangos planejou operar de modo que o número de aves dobre a cada ano.

Após quantos anos o número de frangos passará a ser 5 vezes o número inicial?

Chamando de n o número inicial, teremos:

- após 1 ano de operação: $2n$ frangos;
- após 2 anos de operação: $2 \cdot 2n$ frangos;
- após 3 anos de operação: $2 \cdot 4n$ frangos;

e assim por diante.

O número de frangos vai evoluir da seguinte maneira:

$$n,\ 2n,\ 2^2n,\ 2^3n,\ \ldots,\ 2^xn,$$

sendo x o número de anos de operação.

Para responder à pergunta feita devemos resolver a equação $2^x \cdot n = 5n$, ou seja, $2^x = 5$, que é uma equação exponencial.

No estudo de equações e inequações exponenciais, feito no capítulo anterior, só tratamos de casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base.

Entretanto, se tivermos de resolver uma equação como $2^x = 5$, não conseguiremos reduzir todas as potências à mesma base. Nesse caso, como $4 < 5 < 8$, então $4 < 2^x < 8$, ou seja, $2^2 < 2^x < 2^3$, e apenas poderemos garantir que $2 < x < 3$. Com os estudos feitos até aqui, não sabemos qual é o valor de x nem como determiná-lo. Para enfrentar esse e outros problemas, vamos estudar agora os logaritmos.

Definição

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo de* ***b*** *na base* ***a*** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Na expressão $\log_a b = x$, temos:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo.

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

$\log_2 4 = 2$, pois $2^2 = 4$

$\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\log_7 7 = 1$, pois $7^1 = 7$

$\log_5 1 = 0$, pois $5^0 = 1$

$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, pois $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$, pois $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$

Exemplo 1

Vamos agora calcular através da definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{4}} 2$ b) $\log_{32} 0{,}125$

a) Fazendo $\log_{\sqrt[3]{4}} 2 = x$, temos:

$$(\sqrt[3]{4})^x = 2 \Rightarrow (\sqrt[3]{2^2})^x = 2 \Rightarrow (2^{\frac{2}{3}})^x = 2 \Rightarrow 2^{\frac{2x}{3}} = 2 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

b) Fazendo $\log_{32} 0{,}125 = y$, temos:

$$32^y = 0{,}125 \Rightarrow (2^5)^y = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{5y} = 2^{-3} \Rightarrow 5y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$$

Observação

As restrições para a ($0 < a \neq 1$) e para b ($b > 0$), colocadas na definição, garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

2 ○ Conseqüências

Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades:

▶ **1ª** O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0 \quad , \text{ pois } a^0 = 1$$

▶ **2ª** O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1 \quad , \text{ pois } a^1 = a$$

▶ **3ª** A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b \quad ,$$

pois o logaritmo de b na base a é justamente o expoente que se deve dar à base a para que a potência fique igual a b.

Exemplo 2

Vamos calcular o valor de $9^{\log_3 7}$.
Temos:

$$9^{\log_3 7} = (3^2)^{\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^2 = 7^2 = 49$$

▶ **4ª** Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c \quad ,$$

pois $\log_a b = \log_a c \Rightarrow a^{\log_a c} = b \Rightarrow c = b$.

Exemplo 3

Vamos calcular o valor de x tal que $\log_2 (x^2 + x) = \log_2 (4x - 2)$.
Devemos ter $x^2 + x = 4x - 2$, e daí, $x^2 - 3x + 2 = 0$, isto é, $x = 1$ ou $x = 2$.

Verificação:

para $x = 1$: $\log_2 (1^2 + 1) = \log_2 (4 \cdot 1 - 2)$ (verdadeira)
para $x = 2$: $\log_2 (2^2 + 2) = \log_2 (4 \cdot 2 - 2)$ (verdadeira)

Conclusão: $x = 1$ ou $x = 2$.

3 ○ Sistemas de logaritmos

O conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a ($0 < a \neq 1$) é chamado *sistema de logaritmos de base* ***a***. Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais positivos é o *sistema de logaritmos de base 2*.

Existem dois sistemas de logaritmos que são os mais utilizados em Matemática:

a) o *sistema de logaritmos decimais*, que é o de base 10. Esse sistema foi desenvolvido pelo matemático inglês Briggs (1536-1630), o primeiro a destacar as vantagens dos logaritmos de base 10 como instrumento auxiliar dos cálculos numéricos. Briggs foi também quem publicou a primeira tábua dos logaritmos de 1 a 1 000, fato ocorrido em 1617;
b) o *sistema de logaritmos neperianos*, que é o de base e. O nome *neperiano* deriva de John Napier (1550-1617), matemático escocês, autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos.

Indicaremos com $\log_{10} x$, ou simplesmente $\log x$, o logaritmo decimal de x, e representaremos o logaritmo neperiano de x com $\log_e x$, ou $\ell n\, x$.

As calculadoras científicas possuem as teclas LOG e LN e fornecem, de um modo muito simples, os valores dos logaritmos decimais e neperianos de um número real positivo.

Veja:

- Para saber os valores de log 2 e ℓn 2, teclamos:

2 → LOG

2 → LN

Obtemos, respectivamente, 0,3010 e 0,693 .

- Para saber os valores de log 15 e ℓn 15, basta teclar:

15 → LOG

15 → LN

Obtemos, respectivamente, 1,1761 e 2,708 .

Exemplo 4

Vamos calcular o valor de $E = \ell n\, e^4 - \log 0{,}001$.
Temos:

$$\ell n\, e^4 = \log_e e^4 = x \Rightarrow e^x = e^4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \ell n\, e^4 = 4$$
$$\log 0{,}001 = \log \frac{1}{1\,000} = \log 10^{-3} = -3$$

Então:

$$E = 4 - (-3) = 7$$

Exercícios

1 Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a) $\log_3 27$ c) $\log 1\,000$ e) $\log_{\frac{1}{4}} 128$

b) $\log_2 64$ d) $\log_8 32$ f) $\ell n\ e^8$

2 Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a) $\log_{0,25} 2$ c) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ e) $\log_5 0{,}008$

b) $\log_{49} \sqrt{7}$ d) $\log 10\sqrt{10}$ f) $\log_4 (\log_3 9)$

3 Supondo $m > 0$ e $m \neq 1$, calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_{m^2} \sqrt[3]{m}$ b) $\log_{\sqrt{m}} \frac{1}{m}$ c) $\log_{m^3} m^6$

4 Calcule o valor de:

a) $3^{\log_3 2}$ b) $e^{\ell n\ 4}$ c) $5^{1 + \log_5 2}$ d) $e^{2 - \ell n\ 3}$

5 Calcule o valor de $y = \dfrac{\log_4 4 + \log_{25} 0{,}2}{\log_{19} 1 - \log_{0,\bar{3}} 27}$.

6 (UF-CE) Sendo a e b números reais positivos tais que $\log_{\sqrt{3}} a = 224$ e $\log_{\sqrt{3}} b = 218$, calcule o valor de $\frac{a}{b}$.

7 (Mackenzie-SP) Sabendo que $x^2 + 4x + 2 \log_7 m^2$ é um trinômio quadrado perfeito, determine o logaritmo de m na base 7m.

8 Supondo a e b reais positivos tais que $\log_{\frac{1}{2}} a = 3$ e $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$, qual é o valor de:

a) $\log_b a$? b) $\log_a b$? c) $\log_{a^2} b^3$?

4 ○ Propriedades operatórias

Vamos agora estudar três propriedades operatórias envolvendo logaritmos:

▶ **1ª** *Logaritmo do produto*

"Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos dos números."
Em símbolos: Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Essa propriedade também é válida para o logaritmo de três ou mais números reais e positivos, ou seja: Se $0 < a \neq 1$ e $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, ..., $b_n > 0$, então:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n$$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log_2 (3 \cdot 4) = \log_2 3 + \log_2 4$$
$$\log_3 (4 \cdot 5 \cdot 6) = \log_3 4 + \log_3 5 + \log_3 6$$
$$\log_{10} 210 = \log_{10} (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 5 + \log_{10} 7$$

▶ **2ª** *Logaritmo do quociente*

"Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor."
Em símbolos: Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \frac{b}{c} = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a \frac{b}{c} = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log_2 \frac{3}{4} = \log_2 3 - \log_2 4$$

$$\log_3 \frac{1}{7} = \log_3 1 - \log_3 7 = -\log_3 7$$

$$\log_{10} \frac{6}{5} = \log_{10} 6 - \log_{10} 5 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5$$

▶ **3ª** *Logaritmo da potência*

"Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência."
Em símbolos: Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^r = y$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^r = y \Rightarrow a^y = b^r \end{array}\right\} \Rightarrow a^y = (a^x)^r = a^{rx} \Rightarrow y = rx$$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log_2 3^7 = 7 \cdot \log_2 3$$

$$\log_5 \sqrt{3} = \log_5 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_5 3$$

$$\log_3 \frac{1}{16} = \log_3 2^{-4} = -4 \cdot \log_3 2$$

5 ○ Utilização das propriedades

As propriedades dos logaritmos:

1ª $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

2ª $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

3ª $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$,

que são válidas para $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, permitem-nos obter o logaritmo de um produto, de um quociente ou de uma potência sendo conhecidos apenas os logaritmos dos termos do produto, ou dos termos do quociente, ou da base da potência.

Expressões que envolvem apenas operações de multiplicação, divisão e potenciação são chamadas *expressões logarítmicas*, pois podem ser calculadas utilizando-se logaritmos.

Exemplo 5

A expressão $E = \frac{(9{,}2)^6 \cdot \sqrt[3]{5{,}87}}{(1{,}43)^{10}}$ pode ser calculada com a ajuda de logaritmos porque:

$$\log E = \log \frac{(9{,}2)^6 \cdot \sqrt[3]{5{,}87}}{(1{,}43)^{10}} = \log [(9{,}2)^6 \cdot \sqrt[3]{5{,}87}] - \log (1{,}43)^{10} =$$

$$= \log (9{,}2)^6 + \log \sqrt[3]{5{,}87} - \log (1{,}43)^{10} =$$

$$= 6 \cdot \log 9{,}2 + \frac{1}{3} \cdot \log 5{,}87 - 10 \cdot \log 1{,}43$$

Se dispusermos de uma calculadora que dê os valores de log 9,2, log 5,87 e log 1,43, poderemos calcular log E e, pela mesma calculadora, obter *E*.

Exemplo 6

Vamos calcular o valor de $E = \log_b \frac{x^2}{\sqrt[5]{y}}$, sabendo que $\log_b x = -3$ e $\log_b y = 2$.

Utilizando as propriedades operatórias, temos:

$$E = \log_b \frac{x^2}{\sqrt[5]{y}} = \log_b x^2 - \log_b \sqrt[5]{y} = 2 \cdot \log_b x - \frac{1}{5} \cdot \log_b y =$$

$$= 2 (-3) - \frac{1}{5} \cdot 2 = -6 - \frac{2}{5} = -\frac{32}{5}$$

Exemplo 7

Se $\log E = -3 + \log a + 3 \cdot \log b - 4 \cdot \log c$, vamos determinar *E*.
Temos:

$$\log E = \log 10^{-3} + \log a + \log b^3 - \log c^4 =$$

$$= \log (10^{-3} \cdot a \cdot b^3) - \log c^4 = \log \frac{10^{-3} \cdot a \cdot b^3}{c^4} = \log \frac{a \cdot b^3}{10^3 \cdot c^4}$$

Então: $E = \frac{a \cdot b^3}{1\,000\, c^4}$.

Exemplo 8

Sendo $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, vamos calcular log 108 em função de *a* e *b*.
Temos:

$$\log 108 = \log (4 \cdot 27) = \log 4 + \log 27 = \log 2^2 + \log 3^3 =$$
$$= 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 = 2a + 3b$$

Exercícios

9 Supondo x, y e b reais positivos, com $b \neq 1$ e sabendo que $\log_b x = 2$ e $\log_b y = 3$, qual é o valor de:

a) $\log_b (x \cdot y)$?

b) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right)$?

c) $\log_b x^2$?

d) $\log_b \left(\frac{x^3}{y^2}\right)$?

e) $\log_b (b \cdot \sqrt{xy})$?

10 Supondo x e y reais positivos com $\log_3 x = a$ e $\log_3 y = b$, calcule, em função de a e b:

a) $\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)$

b) $\log_3 (9x\sqrt{y})$

c) $\log_3 \left(\frac{3x}{\sqrt[3]{y}}\right)$

11 (PUC-MG) Sabe-se que Y é um número positivo e que $\frac{1}{2} \log Y = \log 2 - \frac{1}{4} \log 3$.
Qual é o valor de Y?

12 Se x é um número real positivo e $\log x = 2 \cdot \log a + \log b - 3 \log c$, qual é o valor de x em função de a, b e c?

13 (UF-CE) Resolva a equação:

$$3^{x^2 - 8} + \log_{10} \left[\log_{10} \left(\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{10}}}\right)\right] = 0$$

14 Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule em função de a e b os seguintes logaritmos decimais:

a) $\log 6$
b) $\log 12$
c) $\log 1{,}5$
d) $\log 0{,}25$
e) $\log 5$
f) $\log 180$
g) $\log \sqrt[5]{72}$
h) $\log 500$

15 Sabendo que $\log 2 \cong 0{,}301$, calcule o valor de:

a) $\log 200$

b) $\log \left(\frac{\sqrt{125}}{8}\right)$

c) $\log \left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^{-5}\right)$

16 Se $\log 5 = k$, determine em função de k:

a) $\log 2$
b) $\log \sqrt[3]{25}$
c) $\log 5\,000$
d) $\log 1\,250$

17 (UF-MG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/ℓ, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.
Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/ℓ.
Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3.
Então, qual é o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução?

18 Se x e y são reais positivos tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, é verdade que $\log (x + y) = \log x + \log y$? Explique.

19 Sabendo que $\log 300 = a$, qual é, em função de a, o valor de $x = \log 2 + \log 3 + \log 5$?

20 Sabendo que $a + b = 9$ e $a^2 - b^2 = 27$, qual é o valor de $\log_3 (a - b)$?

6 ○ Mudança de base

Há situações em que nos defrontamos com um logaritmo em certa base e temos de convertê-lo a outra base.

Por exemplo, para aplicarmos as propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos na mesma base. Senão, é preciso que alguns logaritmos mudem de base.

Outro exemplo: se quisermos determinar o valor de um logaritmo de base não decimal (por exemplo, $\log_2 5$), devemos conhecer a relação que ele tem com o logaritmo decimal ($\log_{10} 5$) ou com o logaritmo neperiano ($\ell n\ 5$). Aí, com o auxílio de uma calculadora, podemos efetuar tal cálculo, como veremos nos exemplos mais adiante.

Fórmula para mudança de base

Suponhamos que a, b e c sejam números reais positivos e diferentes de 1. Vamos imaginar que saibamos o valor de $\log_c b = y$ e seja desconhecido o valor de $\log_a b = x$. Como podemos calcular x?

Façamos $\log_c a = z$ e procuremos uma relação entre x, y e z.

Temos:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \quad (I)$$
$$\log_c b = y \Rightarrow c^y = b \quad (II)$$
$$\log_c a = z \Rightarrow c^z = a \quad (III)$$

Substituindo (III) e (II) em (I), vem:

$$\underbrace{a}_{c^z}{}^x = \underbrace{b}_{c^y} \Rightarrow (c^z)^x = c^y \Rightarrow c^{zx} = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

Concluindo:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \overset{\text{CALCULADORA}}{=} \frac{0{,}6999}{0{,}3010} \cong 2{,}32$$

$$\log_5 7 = \frac{\ell n\ 7}{\ell n\ 5} \overset{\text{CALCULADORA}}{=} \frac{1{,}9459}{1{,}6094} \cong 1{,}209$$

$$\log_{100} 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 100} \overset{\text{CALCULADORA}}{\cong} \frac{1{,}8451}{2} \cong 0{,}4225$$

Aplicação importante

Dados a e b reais positivos e diferentes de 1, qual é a relação entre $\log_a b$ e $\log_b a$?

Vamos aplicar a fórmula da mudança de base supondo $c = b$.

Temos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{ou} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Exemplo 9

Vamos calcular o valor de $\log_{100} \sqrt[3]{4,5}$, sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$.
Utilizemos a fórmula da mudança de base.
Temos:

$$\log_{100} \sqrt[3]{4,5} = \frac{\log \sqrt[3]{4,5}}{\log 100} = \frac{\log \sqrt[3]{\frac{9}{2}}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \log \frac{9}{2} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \log \frac{3^2}{2} = \frac{1}{6} (\log 3^2 - \log 2) = \frac{1}{6} (2 \log 3 - \log 2) = \frac{2b - a}{6}$$

Exercícios

21 Escreva em base 10 os seguintes logaritmos e, com o auxílio da calculadora, encontre seus valores:

a) $\log_2 3$ b) $\log_{100} 2$ c) $\log_3 \sqrt{10}$

22 Escreva em base e os seguintes logaritmos e, com o auxílio da calculadora, encontre seus valores:

a) $\log_2 7$ b) $\log_5 3$

23 Sabendo-se que $\ell n\ 5 \cong 1,6$ e $\ell n\ 10 \cong 2,3$, qual é o valor de $\log_{10} 5$?

24 (UF-RN) Os habitantes de um certo país são apreciadores dos logaritmos em bases potências de dois. Nesse país, o Banco Zig oferece empréstimos com a taxa (mensal) de juros $T = \log_8 225$, enquanto o Banco Zag trabalha com a taxa (mensal) $S = \log_2 15$.
Com base nessas informações:

a) estabeleça uma relação entre T e S;
b) determine em qual dos bancos um cidadão desse país, buscando a menor taxa de juros, deverá fazer empréstimo. Justifique.

25 (UFF-RJ) Considere $\log_b \frac{1}{a} = x$, sendo $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Expresse $\log_a b^2$, em termos de x.

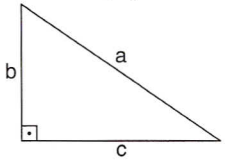
26 Sabendo que $\log_{20} 2 = a$ e $\log_{20} 3 = b$, calcule, em função de a e b:

a) $\log_6 18$ b) $\log_{12} 25$

27 (Umesp-SP) Sabendo-se que $m = 2^{5 + \log_2 3} + 3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2}$, qual é o valor de m?

28 Na figura, $a - b \neq 1$ e $a + b \neq 1$.

Mostre que $\frac{1}{\log_{a+b} c} + \frac{1}{\log_{a-b} c} = 2$.



Testes de vestibulares

1 (UFF-RJ) No dia 6 de junho de 2000, um terremoto atingiu a cidade de Ankara, na Turquia, com registro de 5,9 graus na escala Richter e outro terremoto atingiu o oeste do Japão, com registro de 5,8 graus na escala Richter.
Considere que m_1 e m_2 medem a energia liberada sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre por terremotos com registros, na escala Richter, r_1 e r_2, respectivamente.
Sabe-se que esses valores estão relacionados pela fórmula:

$$r_1 - r_2 = \log_{10} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)$$

Considerando-se que r_1 seja o registro do terremoto da Turquia e r_2 o registro do terremoto do Japão, pode-se afirmar que $\frac{m_1}{m_2}$ é igual a:

a) 10^{-1}
b) $10^{0,1}$
c) $(0,1)^{10}$
d) $\frac{10}{0,1}$
e) $\frac{1}{0,1}$

2 (Cefet-MG) O valor de $W = \log 2 + \log 20 + \log 25$ é:

a) 3 c) 5 e) 7
b) 4 d) 6

3 (Unifor-CE) Se x e y são números reais positivos tais que $y = 16^{\log_2 x}$, então x é igual a:

a) $\sqrt{y}$ c) $2y$ e) $\frac{\sqrt[4]{y}}{2}$
b) $4y$ d) $\sqrt[4]{y}$

4 (Unifor-CE) Se $\log 21 = 1{,}3222$, então:

a) $\log 210 = 13{,}222$
b) $\log 2\,100 = 2{,}3222$
c) $\log 0{,}021 = -6{,}778$
d) $\log 0{,}21 = -0{,}6778$
e) $\log 2{,}1 = 0{,}13222$

5 (Mackenzie-SP) Se $\log \alpha = 6$ e $\log \beta = 4$, então $\sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta}$ é igual a:

a) $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4}$ c) 24 e) β
b) 10 d) $\sqrt{6}$

6 (UE-PI) Se $\sqrt{9^{p+1}} = 3^{\sqrt{2}}$ e $\log_2 (q - 1) = \frac{1}{2}$, então $p^2 + p \cdot q + q^2$ é igual a:

a) 4 c) 6 e) 8
b) 5 d) 7

7 (F. Visconde de Cairu-BA) Sabendo-se que $\log 2 = 0{,}301$, pode-se afirmar que $\log 80$ é igual a:

a) 1,302 c) 1,903 e) 2,203
b) 1,603 d) 2,102

8 (Unip-SP) Se os números reais positivos x e y forem tais que

$$\begin{cases} \log_{10} 2^x + \log_{10} 3^y = 1 \\ \log_{10} 8^x + \log_{10} 9^y = 2, \end{cases}$$

então:

a) $x = 1$ d) $x = \log_{10} 3$
b) $y = 0$ e) $xy = 1$
c) $y = \log_3 10$

9 (UPE-PE) Seja $f(x) = e^{\frac{1}{\log_2 e}} \cdot (x^2 + 5)$. Um quociente das soluções da equação $f(x) = 12x$ pode ser:

a) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{1}{3}$
b) 5 e) $\frac{6}{5}$
c) 6

10 (UF-CE) Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I, em watts por metro quadrado. Seja I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas, e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão $\frac{I_1}{I_2}$ é igual a:

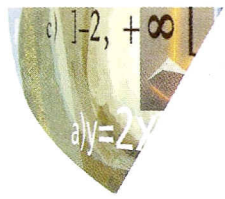
a) $\frac{1}{10}$ d) 100
b) 1 e) 1000
c) 10

Desafio

(IME-RJ) Sejam a e b números reais positivos e diferentes de 1. Dado o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a^x \cdot b^{\frac{1}{y}} = \sqrt{ab} \\ 2 \cdot \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b, \end{cases}$$

determine os valores de x e y.



8

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1 ○ Introdução

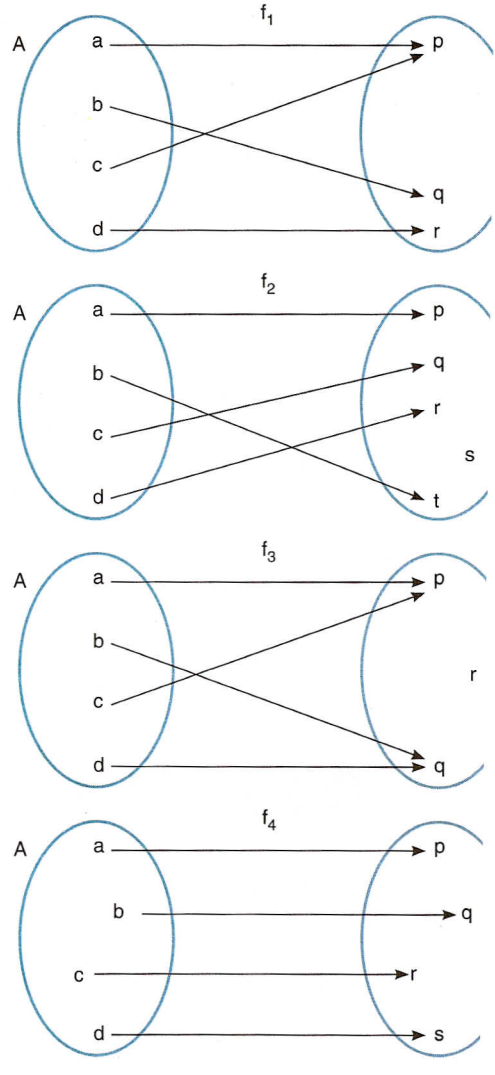
Vamos observar os pares de elementos correspondentes, indicados pelas flechas, nas quatro funções f_1, f_2, f_3 e f_4.

Como f_1, f_2, f_3 e f_4 são funções, para cada uma delas em particular podemos afirmar que todo elemento do conjunto A (domínio) tem um único correspondente no contradomínio. Todo elemento do domínio é ponto de "partida" de uma única flecha.

Quando analisamos o contradomínio de cada uma dessas funções, notamos diferenças:

- em f_1, todo elemento do contradomínio {p, q, r} é correspondente de algum elemento de A. Todo elemento do contradomínio é ponto de "chegada" de pelo menos uma flecha. Não há nenhum elemento que não seja "alvo";
- em f_2, os elementos p, q, r e t do contradomínio são os correspondentes de algum elemento do domínio, mas o elemento s não é correspondente de nenhum.
  Todo elemento do contradomínio é ponto de "chegada" de no máximo uma flecha (zero ou uma). Não há flechas convergindo para o mesmo "alvo";
- em f_3, os elementos p e q do contradomínio são correspondentes de dois elementos de A, mas o elemento r não é correspondente de nenhum;
- finalmente, em f_4, todo elemento do contradomínio é correspondente de um único elemento de A. Todo elemento do contradomínio é ponto de "chegada" de uma única flecha.

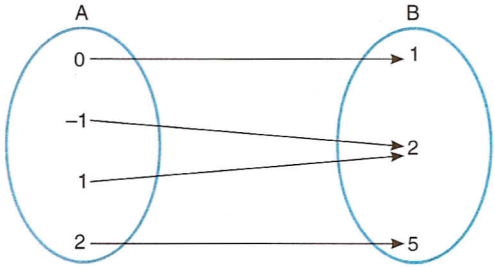
Observações como essas nos permitirão classificar as funções em *sobrejetoras*, *injetoras*, *bijetoras* ou em nenhuma dessas três categorias.



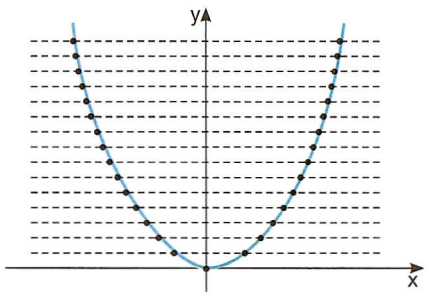
2 ○ Funções sobrejetoras

Vamos observar as três funções a seguir.

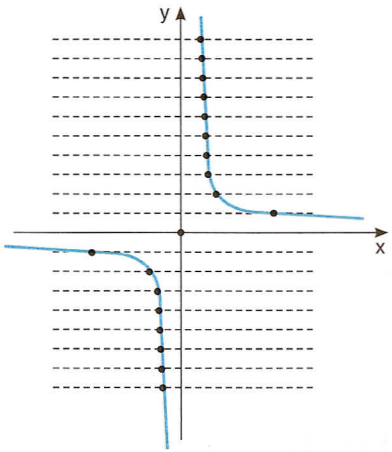
1ª) A função f de A = {–1, 0, 1, 2} em B = {1, 2, 5}, definida pela lei $f(x) = x^2 + 1$. Para todo elemento y de B existe um elemento x de A tal que $y = x^2 + 1$. Para todo elemento de B converge pelo menos uma flecha.



2ª) A função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$, definida pela lei $f(x) = x^2$. Para todo elemento y de $\mathbb{R}_+$ existe um elemento x de $\mathbb{R}$ tal que $y = x^2$, bastando tomar $x = \pm\sqrt{y}$.
Para todo elemento de $\mathbb{R}_+$, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de f.



3ª) A função f de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}^*$, definida pela lei $f(x) = \frac{1}{x}$. Para todo elemento y de $\mathbb{R}^*$ existe um elemento x de $\mathbb{R}^*$ tal que $y = \frac{1}{x}$, bastando tomar $x = \frac{1}{y}$. Para todo elemento y de $\mathbb{R}^*$, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de f.



Essas três funções são exemplos de funções *sobrejetoras*.

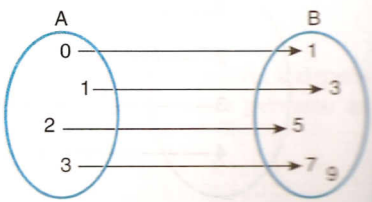
Uma função $f : A \to B$ é *sobrejetora* quando, para todo y pertencente a B, existe um x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

Quando $f : A \to B$ é sobrejetora, ocorre $Im(f) = B$.

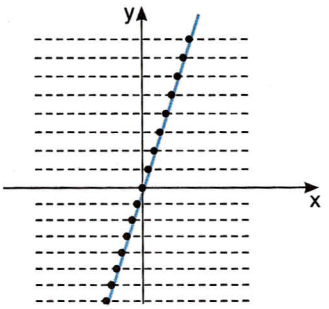
3 ○ Funções injetoras

Vamos observar as três funções a seguir.

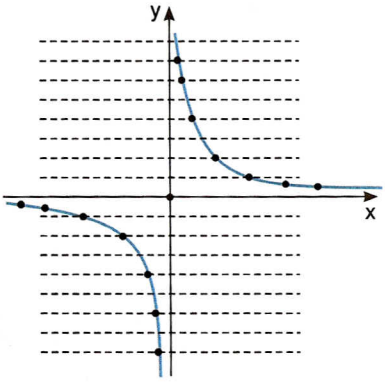
1ª) A função f de A = {0, 1, 2, 3} em B = {1, 3, 5, 7, 9}, definida pela lei $f(x) = 2x + 1$.
Dois elementos distintos de A têm como imagem dois elementos distintos de B.
Não existem duas flechas convergindo para um mesmo elemento de B.



2ª) A função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = 3x$.
Quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$, temos $3x_1 \neq 3x_2$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Para todo elemento y de $\mathbb{R}$, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de f uma única vez.



3ª) A função f de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = \frac{1}{x}$.
Quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{R}^*$, se $x_1 \neq x_2$, temos $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Para todo elemento y de $\mathbb{R}$, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de f uma única vez ou nenhuma vez.



Essas três funções são exemplos de funções *injetoras*.

Uma função $f : A \to B$ é *injetora* quando, para todos x_1 e x_2 pertencentes a A: $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

4 ○ Funções bijetoras ou inversíveis

Uma função $f : A \to B$ é *bijetora* quando f é sobrejetora e injetora.

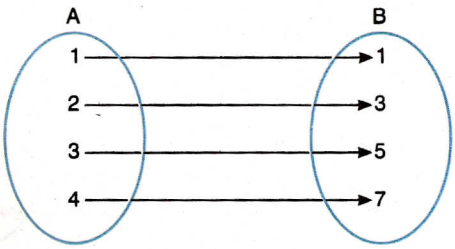
São exemplos de funções bijetoras:

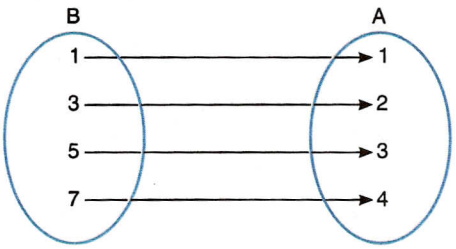
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$.
3. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$.

5 ○ Função inversa

Vamos observar a função f de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{1, 3, 5, 7\}$, definida pela lei $f(x) = 2x - 1$.

Notemos que f é bijetora, pois é injetora e também sobrejetora.





Como todo elemento de B é o correspondente de um único elemento de A, podemos trocar os conjuntos de posição e associar cada elemento de B ao seu correspondente de A. Teremos, dessa forma, construído uma função denominada *função inversa* de f e representada com o símbolo f^{-1}.

Notemos que f^{-1} também é bijetora, $D(f^{-1}) = B$ e $Im(f^{-1}) = A$.

Quando x e y são variáveis que se inter-relacionam de modo que a cada valor atribuído a x está associado um único valor de y, dizemos que y é *função* f de x.

$$y = f(x)$$

Se também acontece que a cada valor atribuído a y está associado um único valor de x, dizemos que x também é *função* de y. Essa função recebe o nome de *função inversa de* f, e é representada por f^{-1}.

$$x = f^{-1}(y)$$

Nesse caso, a função f é inversível.

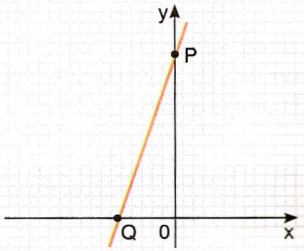
Para a construção de gráficos é importante notarmos que, se f é inversível e um par (a, b) está na tabela de f, então o par (b, a) está na tabela de f^{-1}. Conseqüentemente, cada ponto (b, a) do gráfico de f^{-1} é simétrico de um ponto (a, b) do gráfico de f em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes do plano cartesiano. E, portanto, o gráfico de f^{-1} é simétrico do gráfico de f em relação à mesma bissetriz.

Inversas de algumas funções

Exemplo 1

Vejamos agora como constatar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela fórmula $y = 3x + 4$ é inversível, como determinar a inversa de f e como construir os gráficos de ambas as funções.

Sendo f uma função afim, seu gráfico é uma reta $\overleftrightarrow{PQ}$ da qual P e Q são obtidos atribuindo-se dois valores a x e calculando-se os correspondentes valores de y.

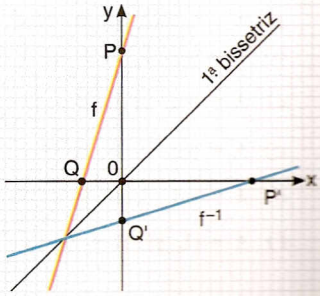


Ponto	x	y = 3x + 4
P	0	$y = 3 \cdot 0 + 4 = 4$
Q	$-\frac{4}{3}$	$y = 3\left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = 0$

Podemos notar nesse gráfico que, para cada valor de y, existe em correspondência um único valor de x; além disso, $Im(f) = \mathbb{R}$. Assim, f é inversível.

Vamos construir o gráfico de f^{-1}.

Esse gráfico é simétrico ao gráfico de f, em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes. Dessa forma, o gráfico de f^{-1} é a reta $\overleftrightarrow{P'Q'}$, $P' = (4, 0)$ e $Q' = \left(0, -\frac{4}{3}\right)$.



Agora vamos determinar a fórmula que define f^{-1}. A partir da fórmula $y = 3x + 4$, que define f, vamos expressar x em função de y:

$$y = 3x + 4 \Rightarrow 3x = y - 4 \Rightarrow x = \frac{y - 4}{3}$$

Em geral, quando se vai representar no plano cartesiano o gráfico de uma função, a variável independente é indicada no eixo das abscissas, e a dependente, no eixo das ordenadas. Assim, vamos permutar as variáveis x e y na fórmula obtida.

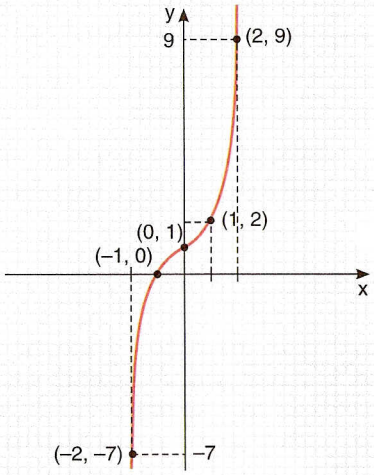
Temos $y = \frac{x - 4}{3}$, que é a fórmula que define f^{-1}.

Exemplo 2

Vejamos como constatar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela fórmula $y = x^3 + 1$ é inversível, como determinar a inversa de f e como construir os gráficos de ambas as funções.

A função $y = x^3 + 1$ é uma função crescente em $\mathbb{R}$ e seu gráfico contém, por exemplo, os pontos:

x	y
–2	–7
–1,5	–2,375
–1	0
–0,5	0,875
0	1
0,5	1,125
1	2
1,5	4,375
2	9



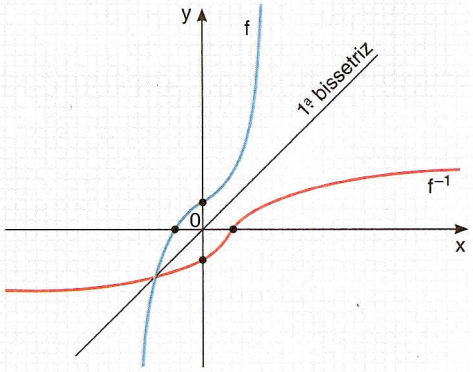
A cada y corresponde um único valor de x. Além disso, o conjunto imagem coincide com o contradomínio; portanto, f é inversível. Vamos agora obter a fórmula que define f^{-1}:

$$y = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1}$$

e, permutando x com y, resulta:

$$y = \sqrt[3]{x - 1}$$

O diagrama ao lado mostra os gráficos das duas funções (simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares).



Exercícios

1 Verifique, em cada caso, se f: A → B é inversível, justificando sua resposta. Forneça, quando existir, a lei que define $f^{-1}(x)$:

a) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 2\}$ e $f(x) = 2x$

b) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $f(x) = x^2$

c) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \left\{\frac{1}{10}, 1, 10\right\}$ e $f(x) = 10^x$

d) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ e $f(x) = x^3$

e) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ e $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

f) $A = \{1, e\}$, $B = \{0, 1\}$ e $f(x) = \ell n\, x$

2 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{2} + 1$.

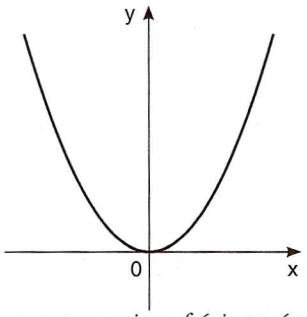
a) Calcule $f^{-1}(3)$ e $f^{-1}(0)$, sem encontrar a lei que define f^{-1}.

b) Obtenha a lei que define f^{-1}.

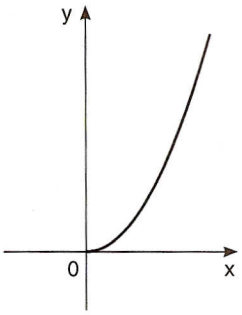
c) Represente f e f^{-1} no mesmo gráfico.

3 Os gráficos seguintes representam a função $f(x) = x^2$ com dois domínios diferentes: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$. Observe que, em ambos os casos, Im = $\mathbb{R}^+$.

(I)



(II)



a) Em qual dos esquemas acima f é inversível?
b) Qual é a lei que define f^{-1} no esquema do item a?
Represente graficamente as duas funções f e f^{-1} no mesmo plano.
c) Explique por que no outro esquema f *não* é inversível.

4 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x + 3$.

a) Represente f e f^{-1} no mesmo plano.
b) Qual é o ponto de interseção dos gráficos obtidos?

5 (Unimes-SP) Qual é a inversa da função $y = \frac{x + 5}{2x - 3}\left(\text{com } x \neq \frac{3}{2}\right)$?

6 Função logarítmica

Nivaldo deposita suas economias em uma caderneta de poupança especial, que rende 2% ao mês. Por quantos meses ele deverá deixar o dinheiro na conta para que seu valor dobre?

Vamos chamar de c o valor inicial depositado por Nivaldo. Qual será o saldo na poupança no fim do 1º mês da aplicação?

Será $c + 2\%$ de $c = c + \frac{2}{100}c = c + 0{,}02c = 1{,}02c$.

Qual será o saldo em conta no final do 2º mês de aplicação? Bem, no 2º mês o rendimento de 2% será calculado sobre o saldo em conta no fim do 1º, ou seja, sobre 1,02c.

Assim, teremos o saldo de:

$$1{,}02c + 0{,}02\,(1{,}02c) = 1{,}02c\,(1 + 0{,}02) = (1{,}02)^2c$$

Qual será o saldo na poupança no final do 3º mês?

Será $(1{,}02)^3c$.

Qual será o saldo na poupança no final de n meses de aplicação?

Será $(1{,}02)^nc$.

Como queremos que a importância dobre, ou seja, que ela fique igual a 2c no final de n meses, então:

$$(1{,}02)^nc = 2c \Rightarrow (1{,}02)^n = 2$$

Aplicando logaritmos, vem:

$$\log_{1{,}02}(1{,}02)^n = \log_{1{,}02} 2$$

$$n = \log_{1{,}02} 2 \quad \text{(aproximadamente 35 meses)}$$

E se quiséssemos que o capital inicial triplicasse? Qual seria o número de meses?

$$n = \log_{1,02} 3 \qquad \text{(aproximadamente 55 meses)}$$

E se quiséssemos que o capital inicial fosse multiplicado por x? Qual seria o número de meses?

$$n = \log_{1,02} x$$

Enfim, para que o capital inicial seja multiplicado por x, é necessário que transcorra um prazo de $n(x)$ meses. O valor $n(x)$ é uma função de x dada pela lei:

$$n(x) = \log_{1,02} x$$

que é um caso particular de *função logarítmica*.

Definição

Dado um número real a (com $0 < a \neq 1$), chama-se *função logarítmica de base* $\boldsymbol{a}$ a função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \log_a x$.

São logarítmicas, por exemplo, as funções $y = \log_2 x$, $y = \log_{10} x$ e $y = \log_e x$.

Exemplo 3

Vejamos como descobrir o domínio da função definida por $f(x) = \log_{(x-2)} (5 - 2x)$.
Devemos ter $5 - 2x > 0$, $x - 2 > 0$ e $x - 2 \neq 1$.

E daí obtemos respectivamente: $x < \frac{5}{2}$, $x > 2$ e $x \neq 3$.

Fazendo a interseção desses três conjuntos, resulta $2 < x < \frac{5}{2}$.

Então, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < \frac{5}{2}\right\}$.

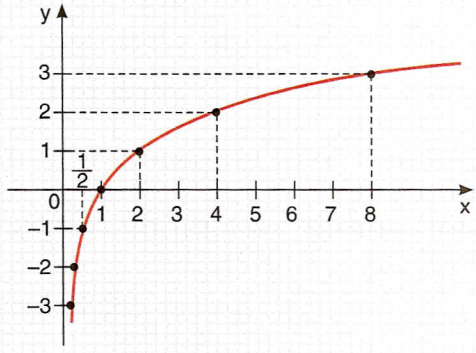
Gráfico

Exemplo 4

Vamos construir o gráfico da função $y = \log_2 x$, definida para $x > 0$.
Inicialmente, construímos uma tabela dando valores a y, para depois calcularmos x.

x	$y = \log_2 x$		x	$y = \log_2 x$
	–3		$\frac{1}{8}$	–3
	–2		$\frac{1}{4}$	–2
	–1	→	$\frac{1}{2}$	–1
	0		1	0
	1		2	1
	2		4	2
	3		8	3

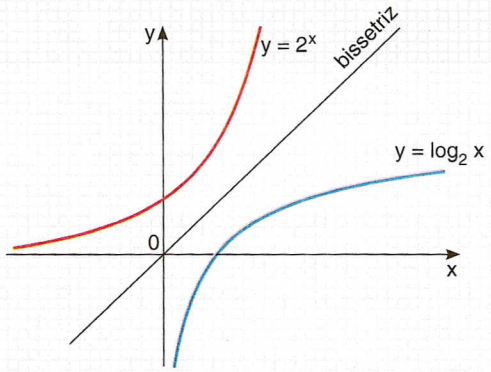
→



Outro modo de construir esse gráfico é considerar que, se $y = \log_2 x$, então $x = 2^y$. Isso significa que o ponto (x, y) está no gráfico da função logarítmica se o seu "inverso" (y, x) está na função exponencial de mesma base. Mas os pontos (x, y) e (y, x) são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes do plano cartesiano. Portanto, conhecendo o gráfico da função exponencial de base 2, obtemos por simetria o gráfico da função logarítmica de base 2.

x	$y = 2^x$
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2
8	3



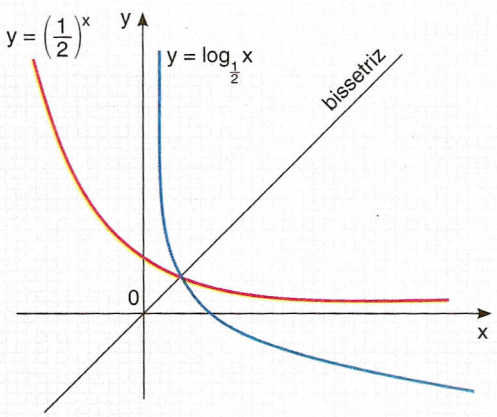
Exemplo 5

Vejamos como construir o gráfico da função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, definida para $x > 0$.

Vamos lembrar como é o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{2}$ e, por simetria, obter o gráfico da função logarítmica de base $\frac{1}{2}$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

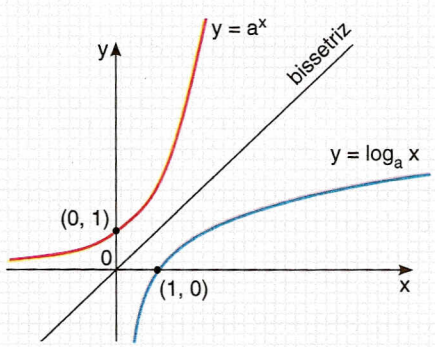
x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
8	–3
4	–2
2	–1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



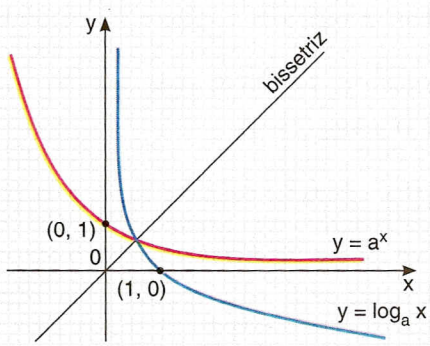
De modo geral, o gráfico da função $y = \log_a x$ tem as seguintes características:

a) está todo à direita do eixo dos *y*, pois a função só é definida para $x > 0$;
b) corta o eixo dos *x* no ponto de abscissa 1, pois $y = \log_a 1 = 0$ para todo *a*;
c) é simétrico do gráfico da função $y = a^x$ em relação à reta bissetriz do 1º e do 3º quadrantes;
d) toma o aspecto de um dos gráficos abaixo:

$a > 1$



$0 < a < 1$



Exercícios

6 Seja f: $\mathbb{R} \to]+2, +\infty[$ definida por $f(x) = 3^x + 2$.

a) Obtenha a lei que define $f^{-1}(x)$.

b) Represente f e f^{-1} no mesmo gráfico.

7 Seja f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_5 x$.

a) Calcule $f(25)$ e $f^{-1}(2)$.

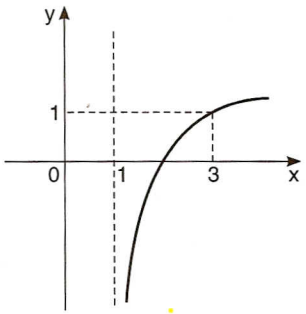
b) Qual é a lei que define $f^{-1}(x)$?

c) Represente f e f^{-1} no mesmo gráfico.

8 Seja f: $]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a (x - 1)$, cujo gráfico está representado ao lado.

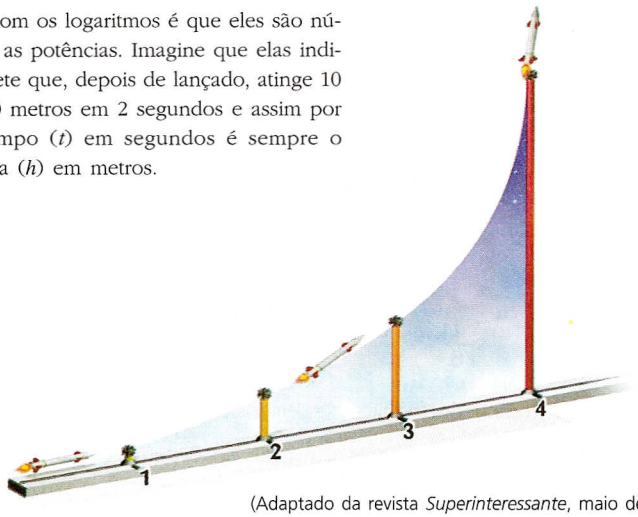
a) Determine o valor de a.

b) Calcule $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(-1)$.



9 (UF-MT)

[...] A vantagem de lidar com os logaritmos é que eles são números mais curtos do que as potências. Imagine que elas indiquem a altura de um foguete que, depois de lançado, atinge 10 metros em 1 segundo, 100 metros em 2 segundos e assim por diante. Nesse caso, o tempo (t) em segundos é sempre o logaritmo decimal da altura (h) em metros.



(Adaptado da revista *Superinteressante*, maio de 2000. p. 86.)

A partir das informações dadas, julgue os itens, assinalando V ou F e justificando:

a) Pode-se representar a relação descrita por meio da função $h = \log t$.

b) Se o foguete pudesse ir tão longe, atingiria 1 bilhão de metros em 9 segundos.

c) Em 2,5 segundos o foguete atinge 550 metros.

10 Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

b) $f(x) = \log_3 (x^2 - 4)$

c) $f(x) = \log_x (-x + 2)$

11 (UC-GO, adaptado) Suponha que o número de peças produzidas por uma indústria aumente mensalmente de acordo com a função $N(t) = 200 \cdot \log_3 (1 + t)$. Nessa função, t é o número de meses contados a partir de um certo período e N é o número de peças produzidas.

a) Quantas peças serão produzidas no segundo mês?

b) Quantos meses serão necessários para que a produção obtida seja o dobro da produção do segundo mês?

12 (FGV-SP) A função $P = 60 \cdot (1{,}04)^t$ representa a estimativa do Produto Interno Bruto em bilhões de dólares (PIB) de um país no ano t adotando-se a seguinte convenção:
t = 0 representa o ano de 1996;
t = 1 representa o ano de 1997;
t = 2 representa o ano de 1998;
e assim por diante. Use a calculadora e responda:

a) Qual é a estimativa do PIB em 2005?
b) Em que ano o PIB será o dobro do que era em 1996? E o triplo?
Em geral, em que ano o PIB será igual ao PIB inicial multiplicado por x?

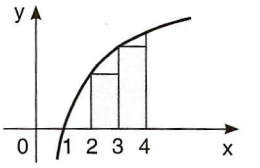
13 Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

14 Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = 2 + \log_2 x$ b) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

15 (UF-PE) Se a curva ao lado representa o gráfico da função $y = \log_2 x$, $x > 0$, e a é o valor da área sombreada, quanto vale $(2^a)^2$?



Propriedades

Vejamos agora algumas propriedades envolvendo funções logarítmicas.

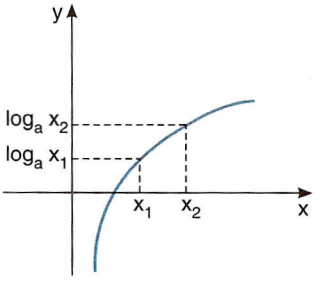
▶ **1ª** Se $a > 1$, então a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é *crescente*.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

De fato, temos:

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2} \underset{a > 1}{\Longleftrightarrow} \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Outro modo de entender essa propriedade: se $a > 1$, então a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos tem o *mesmo sentido* que a relação entre esses números.



Vejamos alguns exemplos:

$$5 > 3 \Rightarrow \log_3 5 > \log_3 3$$
$$11 > 7 \Rightarrow \log_2 11 > \log_2 7$$
$$\sqrt{2} < 2 \Rightarrow \log_{10} \sqrt{2} < \log_{10} 2$$
$$3 > 0{,}7 \Rightarrow \log_5 3 > \log_5 0{,}7$$

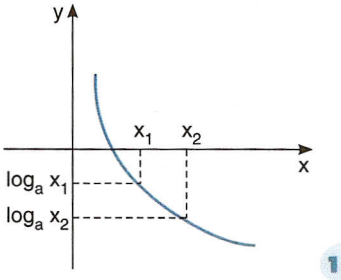
▶ **2ª** Se $0 < a < 1$, então a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é *decrescente*.

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

De fato, temos:

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2} \underset{0 < a < 1}{\Longleftrightarrow} \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Outro modo de entender essa propriedade: se $0 < a < 1$, então a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos tem o *sentido contrário* ao da relação entre esses números.



Vejamos alguns exemplos:

$$3 < 7 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 3 > \log_{\frac{1}{3}} 7$$
$$11 > 5 \Rightarrow \log_{0,1} 11 < \log_{0,1} 5$$
$$\sqrt{3} < 2 \Rightarrow \log_{0,2} \sqrt{3} > \log_{0,2} 2$$
$$0,2 < 2,5 \Rightarrow \log_{\frac{3}{5}} 0,2 > \log_{\frac{3}{5}} 2,5$$

▶ **3ª** Se $a > 1$, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos negativos na base a e os números maiores que 1 têm logaritmos positivos na base a.
De fato, se $a > 1$, temos:

$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$
$x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log 0,75 < 0$$
$$\log_2 0,51 < 0$$
$$\log_7 32 > 0$$
$$\log_2 \sqrt{3} > 0$$

▶ **4ª** Se $0 < a < 1$, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos positivos na base a e os números maiores que 1 têm logaritmos negativos na base a.
De fato, se $0 < a < 1$, temos:

$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$
$x > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log_{0,3} 0,75 > 0$$
$$\log_{0,5} 0,72 > 0$$
$$\log_{0,2} 16 < 0$$
$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2} < 0$$

Exercícios

16 Assinale *V* ou *F*, justificando:

a) $\log_2 9 > \log_2 \pi^2$

b) $\log_{0,2} 0,1 > \log_{0,2} 2$

c) $\log_8 5 > 0$

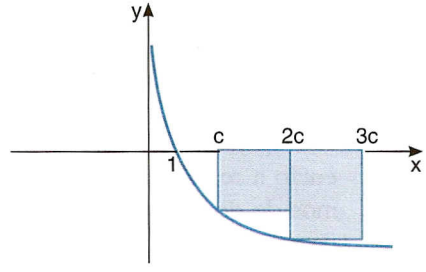
d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < 0$

e) $\log \frac{1}{2} < \log \frac{1}{3}$

f) $\ell n \sqrt{3} > \ell n \left(\frac{8}{5}\right)$

17 (UF-MA) A figura ao lado representa o gráfico da função $f(x) = \log_a \left(\frac{1}{x}\right)$.

Mostre que o valor da área hachurada é $-c \cdot (\log_a 2c^2)$ e explique por que esse valor é um número positivo.



7 ○ Equações exponenciais

Há equações que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base. A resolução de uma equação desse tipo baseia-se na definição de logaritmo:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

com $0 < a \neq 1$ e $b > 0$.

Exemplo 6

Vamos resolver as equações:

a) $2^x = 7$ b) $3^{2x-1} = 5$

a) $2^x = 7 \Rightarrow x = \log_2 7$.

Com o auxílio de uma calculadora, podemos continuar assim:

$$x = \log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} = \frac{0{,}8451}{0{,}3010} \cong 2{,}8$$

b) $3^{2x-1} = 5 \Rightarrow 2x - 1 = \log_3 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 + \log_3 5)$

Usando a calculadora, vem:

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\log 5}{\log 3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{0{,}6990}{0{,}4771}\right) = \frac{1}{2}(1 + 1{,}465) =$$

$$= 1{,}233$$

Exercícios

18 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $2^x = 3$ c) $3^{-x} = 4$ e) $10^{1-x} = 5$

b) $e^{2x} = 3$ d) $e^{x+1} = 2$ f) $0{,}1^{x+2} = 2$

Sugestão: Se desejar, use a calculadora para obter os valores dos logaritmos.

19 (FGV-SP) Um automóvel vale hoje R$ 20 000,00. Estima-se que seu valor (y) daqui a x anos seja dado pela função exponencial $y = a \cdot b^x$. Sabendo-se que o valor estimado para daqui a 3 anos é R$ 15 000,00:

a) Qual é o valor estimado para daqui a 6 anos?

b) Um outro automóvel tem um valor estimado (y) daqui a x anos, dado por $y = c \cdot (0{,}8)^x$. Daqui a quantos anos o valor deste veículo se reduzirá à metade? Adote o seguinte valor: log 2 = 0,3.

20 (UF-BA) O número de bactérias de determinada cultura varia de acordo com a lei $N(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$, em que o tempo t é dado em horas.
Nessas condições, assinale V ou F nas afirmações seguintes, justificando:

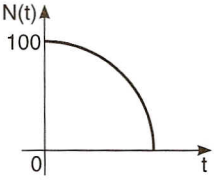
a) No instante t = 0, o número de bactérias existentes na cultura é igual a 200.

b) Depois de 8 horas, o número de bactérias existentes na cultura é menor que 7.

c) Em 4 horas, a quantidade de bactérias na cultura se reduz a $\frac{1}{4}$ da quantidade inicial.

d) Na cultura, a quantidade de bactérias se reduz de $\frac{2}{5}$ da quantidade inicial no tempo $t = 2 \log_2 \left(\frac{5}{3}\right)$.

e) Em relação ao tempo, a variação da quantidade de bactérias é representada pelo gráfico ao lado.



21 (FGV-SP) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, sendo e o número de Euler, que vale aproximadamente 2,7.

a) Para que valores de x teremos $f(x) = 1{,}5$?

b) Mostre que o gráfico dessa função é simétrico em relação ao eixo y.

22 (UF-CE) Suponha que o crescimento populacional de duas cidades, A e B, seja descrito pela equação $P(t) = P_0 e^{kt}$, em que:

P_0 é a população no início da observação;

k é a taxa de crescimento populacional na forma decimal;

t é o tempo medido em anos;

e é a base do logaritmo natural;

$P(t)$ é a população t anos após o início da observação.

Se no início de nossa observação a população da cidade A é o quíntuplo da população da cidade B, e se a taxa de crescimento populacional de A permanecer em 2% ao ano e a de B em 10% ao ano, em quantos anos, aproximadamente, as duas cidades possuirão o mesmo número de habitantes? Considere $\ell n\ 5 = 1{,}6$.

8 Equações logarítmicas

Vamos ver como são resolvidos quatro tipos de equações logarítmicas.

▶ **1º** *Equações redutíveis a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base:*

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

A solução pode ser obtida impondo-se $f(x) = g(x) > 0$.

Exemplo 7

Vamos resolver a seguinte equação: $\log_2 (2x + 5) = \log_2 7$.

Temos:

$2x + 5 = 7$ (I) e $7 > 0$ (II)

(I) $2x + 5 = 7 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

(II) $7 > 0$, para todo x real

Então: $S = \{1\}$.

Exercício

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_4 (3x + 2) = \log_4 (2x + 5)$

b) $\log_2 (5x^2 - 14x + 1) = \log_2 (4x^2 - 4x - 20)$

c) $\log_x (x^2 - 5x) = \log_x 6$

▶ **2º** *Equações redutíveis a uma igualdade entre um logaritmo e um número real:*

$$\log_a f(x) = r$$

A solução pode ser obtida impondo-se $f(x) = a^r$.

Exemplo 8

Vamos resolver a seguinte equação: $\log_2 (3x - 1) = 4$.
Temos:

$$\log_2 (3x - 1) = 4 \Rightarrow 3x - 1 = 2^4 \Rightarrow 3x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{3}$$

Então: $S = \left\{\frac{17}{3}\right\}$.

Exercícios

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_3 (2x - 11) = 3$ b) $\log_{\frac{1}{5}} (4 - x) = 0$ c) $\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 9x + 4) = -2$ d) $\log_x (x + 2) = 2$

25 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_4 (\log_2 x) = 1$ b) $\log_{\frac{1}{3}} [\log_3 (\log_4 x)] = 0$ c) $\log_{\sqrt{2}} \{2 \cdot \log_3 [1 + \log_4 (x + 3)]\} = 2$

▶ **3º** *Equações que são resolvidas por meio de uma mudança de incógnita.*

Exemplo 9

Vamos resolver a equação $(\log_4 x)^2 - 3 \cdot \log_4 x = 4$.
Fazendo $\log_4 x = y$, temos:

$$y^2 - 3y = 4 \Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ ou } y = 4$$

Assim, vem:

$$\log_4 x = -1 \text{ ou } \log_4 x = 4$$

$$x = 4^{-1} = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 4^4 = 256$$

Então: $S = \left\{\frac{1}{4}, 256\right\}$.

Exercício

26 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_2^2 x - 7 \log_2 x + 6 = 0$ b) $2 \log_4^2 x + 2 = 5 \log_4 x$ c) $\log x (\log x - 1) = 12$

▶ **4º** *Equações que envolvem utilização de propriedades ou de mudança de base.*

Exemplo 10

Vamos resolver a equação $\frac{\log_2 x^2}{\log_2 2x} = 3$.

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 2x} = 3 \Rightarrow \frac{2 \cdot \log_2 x}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3 \overset{(\log_2 x = y)}{\Rightarrow} \frac{2y}{1 + y} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 3 + 3y \Rightarrow y = -3 \Rightarrow \log_2 x = -3 \Rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

Então: $S = \left\{\frac{1}{8}\right\}$.

Exemplo 11

Vamos resolver a equação $\log (2x + 3) + \log (x + 2) = 2 \log x$.
Essa equação equivale a:

$$\log [(2x + 3)(x + 2)] = \log x^2$$

e daí vem:

$$(2x + 3)(x + 2) = x^2$$
$$2x^2 + 7x + 6 = x^2$$
$$x^2 + 7x + 6 = 0$$
$$x = -1 \text{ ou } x = -6$$

- $x = -1$ não pode ser aceito, pois não existe $\log x$.
- $x = -6$ também não, pois não existem $\log x$, $\log (2x + 3)$ e $\log (x + 2)$.

Então, a equação não tem solução, ou $S = \varnothing$.

Exemplo 12

Vamos resolver a equação $\log_3 x + \log_x 3 = -2$.

Fazendo $\log_3 x = y$, temos $\log_x 3 = \dfrac{1}{\log_3 x} = \dfrac{1}{y}$

e a equação proposta fica:

$$y + \frac{1}{y} = -2$$

e daí vem:

$$y^2 + 1 = -2y \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

- $x = \dfrac{1}{3}$ é a solução, pois existem $\log_x 3$ e $\log_3 x$.

Assim: $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Exercícios

27 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_3 (x + 1) + \log_3 (x - 1) = 1$
b) $\log_2 (3x + 5) - \log_2 (2x - 1) = 3$
c) $3 \log (x - 1) = \log (x^3 + 3x - 7)$

28 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_2 (5x - 2) - \log_2 x - \log_2 (x - 1) = 2$
b) $\log_2 (x + 4) + \log_2 (x - 3) = \log_2 18$
c) $2 \log x = \log 2 + \log (x + 4)$

29 Define-se *cologaritmo de* ***a*** *na base* ***b*** como o oposto do logaritmo de a na mesma base, isto é: $\text{colog}_b a = -\log_b a$.
Resolva a equação $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 13x) + \text{colog}_{\frac{1}{3}} (x + 3) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 1)$.

30 (EEM-SP) Resolva o sistema: $\begin{cases} y - x = 9 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$.

31 (U. F. Ouro Preto-MG) Resolva o sistema $\begin{cases} 2^x \cdot 8^y = 32 \\ \log_8 xy = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

32 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_3 (x + 2) - \log_{\frac{1}{3}} (x - 6) = \log_3 (2x - 5)$

b) $\log_3^2 x - 5 \log_9 x + 1 = 0$

c) $\log_2 x = \log_x 2$

33 (U. F. Ouro Preto-MG) Resolva a equação logarítmica:

$$(\log_2 8)(\log_8 (2 - x)) + \log_2 (1 - x) = 2 + 2(\log_4 3).$$

34 (UF-PA) Encontre a solução real da equação $\log (1 + 5^{x-1}) + \log 5^{x-1} = \dfrac{1}{\log_2 10}$.

35 (Unicamp-SP) As populações de duas cidades, *A* e *B*, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8 (1 + t)^6$ e $B(t) = \log_2 (4t + 4)$ em que a variável *t* representa o tempo em anos.

a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?

b) Após certo instante *t*, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante *t* e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.

36 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\dfrac{1}{3} + \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 4$

b) $\log_2 \sqrt[4]{x} = \log_4 \sqrt{x}$

37 (UF-MT) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação: $\log_x (1 - |x|) = 1$.

38 (Unicamp-SP) Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$.

9 ○ Inequações exponenciais

Há inequações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma desigualdade de potências de mesma base. A resolução de uma inequação desse tipo baseia-se no crescimento (quando a base é maior que 1) ou no decrescimento (quando a base está entre 0 e 1) da função logarítmica.

Assim:

$$a^x > b \Leftrightarrow \log_a a^x > \log_a b \Leftrightarrow x > \log_a b \text{ (se } a > 1)$$
$$a^x > b \Leftrightarrow \log_a a^x < \log_a b \Leftrightarrow x < \log_a b \text{ (se } 0 < a < 1)$$
$$a^x < b \Leftrightarrow \log_a a^x < \log_a b \Leftrightarrow x < \log_a b \text{ (se } a > 1)$$
$$a^x < b \Leftrightarrow \log_a a^x > \log_a b \Leftrightarrow x > \log_a b \text{ (se } 0 < a < 1)$$

Exemplo 13

Vamos resolver as seguintes inequações:

a) $2^x > 7$ b) $5^{2x-1} \leq 4$

a) $2^x > 7 \Rightarrow \log_2 2^x > \log_2 7 \Rightarrow x > \log_2 7$

Com auxílio de calculadora, prosseguimos:

$$x > \frac{\ell n\ 7}{\ell n\ 2} \Rightarrow x > \frac{1,9459}{0,6931} \Rightarrow x > 2,8$$

b) $5^{2x-1} \leq 4 \Rightarrow \log_5 5^{2x-1} \leq \log_5 4 \Rightarrow 2x - 1 \leq \log_5 4 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}(1 + \log_5 4)$

Com auxílio de calculadora, avançamos:

$$x \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\log 4}{\log 5}\right) \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{0,6020}{0,6989}\right) \Rightarrow x \leq 0,93$$

Exercício

39 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $3^x > 7$ b) $4^x < 3$ c) $\left(\frac{1}{e}\right)^x < 4$ d) $(0,4)^x \leq 2$ e) $2^{3x+1} \geq 5$

10 Inequações logarítmicas

Vamos ver como são resolvidos três tipos de inequações logarítmicas.

▶ **1º** *Inequações redutíveis a uma desigualdade entre logaritmos de mesma base.*

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

Aqui há dois casos a considerar:

- A base é maior que 1. Nesse caso, a relação de desigualdade entre f(x) e g(x) tem o mesmo sentido que a desigualdade entre os logaritmos. Para existirem os logaritmos, devemos impor também que f(x) e g(x) sejam positivos. Então, a solução pode ser obtida impondo-se que:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow 0 < f(x) < g(x)$$

- A base está entre 0 e 1. Nesse caso, a relação de desigualdade entre f(x) e g(x) tem sentido contrário ao da desigualdade entre os logaritmos. Para existirem os logaritmos, devemos impor também que f(x) e g(x) sejam positivos. Então, a solução pode ser obtida impondo-se que:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) > 0$$

Exemplo 14

Vamos resolver a inequação $\log_3 (3x - 2) \leq \log_3 x$.
Condições: $0 < 3x - 2 \leq x$.
Daí vem:

- $0 < 3x - 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$ (I)
- $3x - 2 \leq x \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$ (II)

Da interseção de (I) com (II), resulta:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x \leq 1\right\}$$

Exemplo 15

Vamos resolver a inequação $\log_2 (x^2 - 5x) > \log_2 (x - 5)$.
Condições: $x^2 - 5x > x - 5 > 0$.
Daí vem:

- $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$ (I)
- $x^2 - 5x > x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 > 0 \Rightarrow x < 1$ ou $x > 5$ (II)

Da interseção de (I) com (II), vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

Exemplo 16

Vamos resolver a inequação $\log_{\frac{1}{4}} 2x^2 < \log_{\frac{1}{4}} (x + 1)$.
Condições: $2x^2 > x + 1 > 0$.
Daí vem:

- $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$ (I)
- $2x^2 > x + 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 1$ (II)

Da interseção de (I) com (II), segue:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 1\right\}$$

▶ **2º** *Inequações redutíveis a uma desigualdade entre um logaritmo e um número real.*

$$\log_a f(x) > r \quad \text{ou} \quad \log_a f(x) < r$$

Para resolver uma inequação desse tipo, basta substituir r por $\log_a a^r$; assim, recaímos numa inequação do 1º tipo.

$$\log_a f(x) < r \text{ equivale a } \log_a f(x) < \log_a a^r$$
$$\log_a f(x) > r \text{ equivale a } \log_a f(x) > \log_a a^r$$

Exemplo 17

Vamos resolver a inequação $\log_3 (4x - 1) < 3$.
Temos:

$$\log_3 (4x - 1) < 3 \Rightarrow \log_3 (4x - 1) < \log_3 3^3 \Rightarrow 0 < 4x - 1 < 27 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 < 4x < 28 \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 7$$

Então: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 7\right\}$.

Exemplo 18

Vamos resolver a inequação $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 7x) > -3$.
Temos:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 7x) > -3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 7x) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow 0 < x^2 + 7x < 8$$

De $x^2 + 7x > 0$, vem $x < -7$ ou $x > 0$ (I).
De $x^2 + 7x < 8$, vem $x^2 + 7x - 8 < 0$ e daí $-8 < x < 1$ (II).
Fazendo a interseção de (I) com (II), resulta:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < -7 \text{ ou } 0 < x < 1\}$$

Exercícios

40 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $\log_3 x > \log_3 5$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 3$

c) $\log_3 (5x - 2) \leq \log_3 7$

d) $\log_2 x > 3$

e) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$

41 (UA-AM) Resolva a inequação em $\mathbb{R}$: $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 8) < -1$.

42 Estabeleça o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{\log_2 (-x + 1)}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 1)}}$

43 Determine m de modo que a equação de 2º grau (na variável x) $x^2 - 4x + \log_2 m = 0$ apresente duas raízes reais e distintas.

44 Resolva, em $\mathbb{R}$:

a) $2(\ell n\ x)^2 - \ell n\ x > 6$

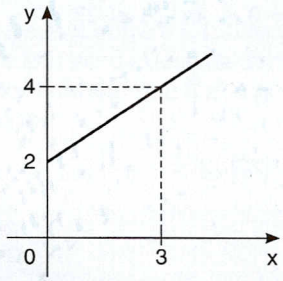
b) $\log^2_{\frac{1}{3}} x + 3 \log_{\frac{1}{3}} x < 10$

45 (U. F. Juiz de Fora-MG) Qual é o conjunto solução da inequação $\ell n\ (x^2 - 2x - 7) < 0$?

46 Para que valores reais de m a equação $-x^2 + (\log_3 m)x - \frac{1}{4} = 0$, na variável x, apresenta duas raízes reais?

Testes de vestibulares

1 (Unirio-RJ)



Consideremos a função inversível f cujo gráfico é visto acima. A lei que define f^{-1} é:

a) $y = 3x + \frac{3}{2}$

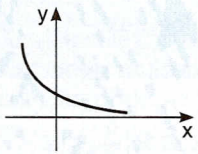
b) $y = 2x - \frac{3}{2}$

c) $y = \frac{3}{2} x - 3$

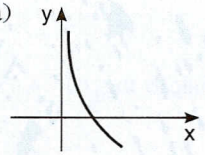
d) $y = \frac{2}{3} x + 2$

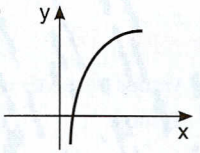
e) $y = -2x - \frac{3}{2}$

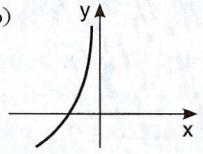
2 (Fafi-MG) Se o gráfico de f é

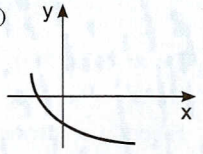


, então o gráfico da inversa de f é:

a)


c)


b)


d)


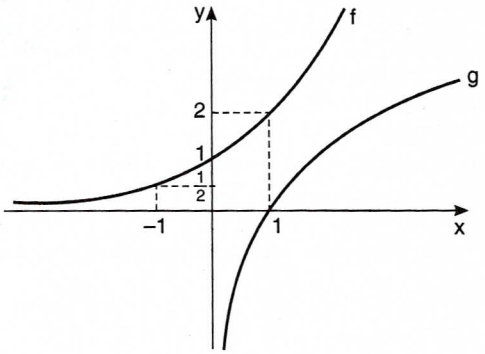
3 (U. F. São Carlos-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o modelo matemático:

$$h(t) = 1{,}5 + \log_3(t + 1),$$

com h(t) em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

a) 9 c) 5 e) 2
b) 8 d) 4

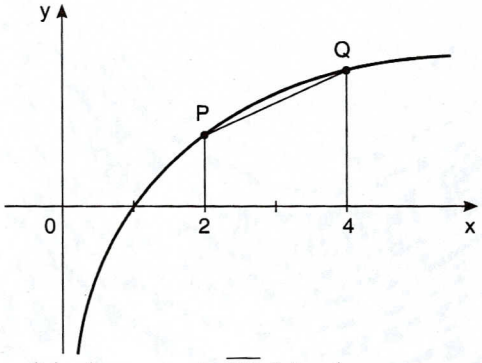
4 (Unifor-CE) Na figura abaixo têm-se os gráficos da função exponencial f e de sua inversa g.



O valor de k tal que g(k) = 3 é:

a) 2 c) 4 e) 8
b) 3 d) 6

5 (UFF-RJ) A figura representa o gráfico da função f definida por $f(x) = \log_2 x$.

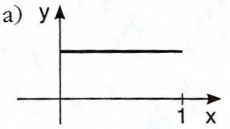


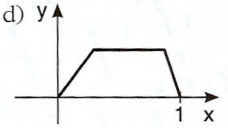
A medida do segmento $\overline{PQ}$ é igual a:

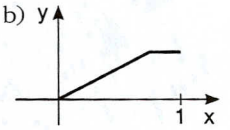
a) $\sqrt{6}$ c) $\log_2 5$ e) log 2
b) $\sqrt{5}$ d) 2

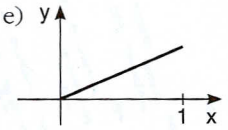
6 (Unifesp-SP) Há funções y = f(x) que possuem a seguinte propriedade "a valores distintos de x correspondem valores distintos de y". Tais funções são chamadas injetoras.

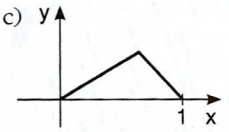
Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem abaixo, é injetora?

a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

7 (PUC-RS) Se $f(x) = \log x$, então $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$ é igual a:

a) 10 c) $-f(x)$ e) 0
b) $f(x^2)$ d) 1

8 (Cefet-PR) Se a e b são soluções do sistema:

$$\begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{2^{y-10}} \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}, \text{ então}$$

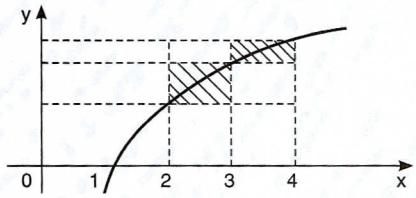
$2^a + 2^b$ é igual a:

a) 64 c) 514 e) 80
b) 260 d) 136

9 (UF-AL) A expressão $N(t) = 1\,500 \cdot 2^{0,2t}$ permite o cálculo do número de bactérias existentes em uma cultura, ao completar t horas do início de sua observação (t = 0). Após quantas horas da primeira observação haverá 250000 bactérias nessa cultura?
Dados: log 2 = 0,30; log 3 = 0,48.

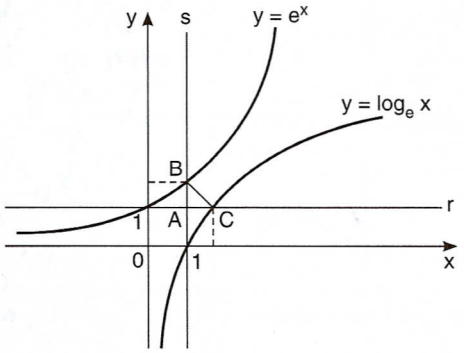
a) 37 c) 30 e) 25
b) 35 d) 27

10 (Fuvest-SP) A curva da figura que segue representa o gráfico da função $y = \log_{10} x$, para $x > 0$. Assim sendo, a área da região hachurada, formada pelos dois retângulos, é:



a) $\log_{10} 2$ c) $\log_{10} 4$ e) $\log_{10} 6$
b) $\log_{10} 3$ d) $\log_{10} 5$

11 (U. F. Uberlândia-MG) No sistema de coordenadas cartesianas considere os gráficos das funções $y = e^x$ e $y = \log_e x$, como mostra a figura abaixo. Considerando r // Ox e s // Oy, construímos o triângulo ABC. Assim, pode-se afirmar que a área desse triângulo, em unidades de área, é:



a) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(e - 1)^2$
c) $\frac{1}{2}e^2$
d) $\frac{1}{2}(e - 1)^2$

12 (Unimes-SP) Determine os valores de x que verificam a desigualdade:

$$\frac{1}{3} < \log_8 5x < 1$$

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{8}{5}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x < \frac{8}{3}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{8}{3}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{8} < x < 1\right\}$
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < 1\right\}$

13 (Cefet-MG) A solução x da equação $\log_2 (16x^2) = 4 \log_2 x + 3$ satisfaz:

a) $x < 0$
b) $0 < x < 1$
c) $1 < x < 2$
d) $2 \leq x \leq 4$
e) $x > 4$

14 (UF-MG) O conjunto de todos os valores reais de x que satisfazem a equação $2 \log_{10} x = 1 + \log_{10}\left(x + \frac{11}{10}\right)$ é:

a) {–1, 11}
b) {5, 6}
c) {10}
d) {11}

15 (Ucsal-BA) Se o número real m é solução da equação $\log (x + 2) + \log (x - 2) - \log (3x + 2) = \log 3$, então m é um número:

a) múltiplo de 10.
b) divisível por 3.
c) maior que 12.
d) menor que 5.
e) primo.

16 (UF-SE) Se $\log (5x) - 4 \cdot \log 5 = -3$, então x é igual a:

a) 0,025
b) 0,125
c) 0,25
d) 1,25
e) 2,5

17 (Mackenzie-SP) Supondo $\log 2 = 0{,}3$, o valor mais próximo de x tal que $2^{-2x} - 0{,}32 = 0$ é:

a) $\frac{2}{5}$
b) $\frac{5}{6}$
c) 5
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{1}{5}$

18 (Unificado-RJ) O conjunto solução da equação $\log_4 x + \log_x 4 = \frac{5}{2}$ sendo $U = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ é tal que a soma de seus elementos é igual a:

a) 0
b) 2
c) 14
d) 16
e) 18

19 (U. F. Ouro Preto-MG) A soma das raízes da equação $1 + \log_2 (1 + x^2) = \log_2 5 + \log_2 x$ é igual a:

a) 1
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{5}{2}$
d) 3
e) 5

20 (Mackenzie-SP) Se $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_6 x} = 2$, x^2 vale:

a) 81
b) 16
c) 36
d) 100
e) 25

21 (Fuvest-SP) Se (x, y) é solução do sistema $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = \frac{3}{4} \\ y^3 - \frac{1}{2}xy^2 = 0 \end{cases}$, pode-se afirmar que:

a) $x = 0$ ou $x = -2 - \log_2 3$
b) $x = 1$ ou $x = 3 + \log_2 3$
c) $x = 2$ ou $x = -3 + \log_2 3$
d) $x = \frac{\log_2 3}{2}$ ou $x = -1 + \log_2 3$
e) $x = -2 + \log_2 3$ ou $x = -1 + \frac{\log_2 3}{2}$

Desafios

1

Algas tóxicas na água

Depois da chuva, surge uma nova vilã da água fornecida pela Cedae: a alga *Anabaena*. Análises de amostras coletadas pela Feema na água bruta e tratada do Guandu, segunda e terça-feira passadas, identificaram a presença dessas algas potencialmente tóxicas, pertencentes ao grupo das cianobactérias. O secretário estadual de Meio Ambiente, André Corrêa, assegura, no entanto, que a quantidade encontrada está bem abaixo dos limites tolerados pelo organismo, não causando riscos à saúde. Segundo ele, a presença de algas explica o mau cheiro (semelhante ao do inseticida BHC) e o gosto ruim na água.

— Como identificamos as algas antes de o Guandu receber a água do rio dos Poços, concluímos que o problema ocorre com a água captada do rio Paraíba do Sul. Acreditamos que as algas tenham-se proliferado no reservatório de Funil (em Itatiaia, na divisa com São Paulo), que armazena a água do Paraíba do Sul — disse Corrêa.

[...]

• A explicação do secretário é que o reservatório teria ficado baixo em função da estiagem — a maior dos últimos 40 anos — e as algas teriam sido sugadas para o Guandu. A Feema, segundo ele, encontrou nas amostras até 2 mil células por mililitro de água (o padrão considerado preocupante é a partir de 20 mil células por mililitro). A partir de 10 mil células, o nível é tido como de vigilância.

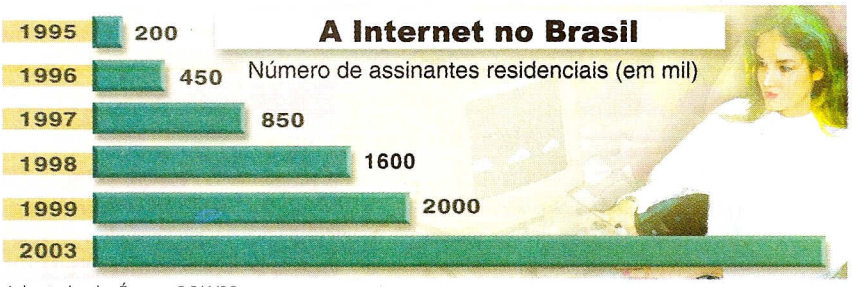
(*O Globo*, 17/11/2001.)

Márcia Foletto/O Globo

Se nenhuma providência tivesse sido tomada pelas autoridades sanitárias do Rio de Janeiro, acreditava-se que a população de algas pudesse se proliferar à taxa de 8% por semana.
A partir da data em que foram encontradas 2 mil células por mℓ de água, determine:

a) o tempo necessário para que as autoridades entrassem em vigilância;
b) o tempo necessário para que se entrasse no padrão "preocupante".

2 (UnB-DF) O gráfico abaixo ilustra o número de assinantes residenciais da Internet no Brasil, em milhares, nos últimos cinco anos.



Adaptado de *Época*, 26/4/99.

A partir desses dados, é importante obter um modelo matemático capaz de estimar o número de assinantes residenciais da Internet no Brasil em datas diferentes das fornecidas. Para isso, aproxima-se o número anual de assinantes, em milhares, por uma função exponencial do tipo

$$F(t) = A\ e^{k(t\ -\ 1998)},$$

em que t é o ano, $e = 2{,}718\ldots$ é a base do sistema neperiano de logaritmos, A e k são constantes a serem determinadas.

Considerando que $F(1998) = 1\,600$ e $F(1999) = 2\,000$, calcule, *em centenas de milhares*, a estimativa do número de assinantes no ano de 2003, desprezando a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

3 (Vunesp-SP) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h30min o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5 °C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5 °C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5 °C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja 36,5 °C e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por

$$D(t) = D_0 \cdot 2^{(-2\alpha t)}$$

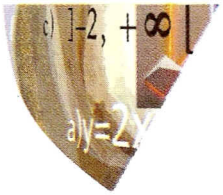
em que t é o tempo em horas, D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente no instante $t = 0$, $D(t)$ é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante t qualquer e α é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

	Hora	Temperatura do corpo (°C)	Temperatura do ambiente (°C)	Diferença de temperatura (°C)
$t = ?$	morte	36,5	16,5	$D(t) = 20$
$t = 0$	22h30min	32,5	16,5	$D(0) = D_0 = 16$
$t = 1$	23h30min	31,5	16,5	$D(1) = 15$

Considerando os valores aproximados $\log_2 5 = 2{,}3$ e $\log_2 3 = 1{,}6$, determine:

a) a constante α;

b) a hora em que a pessoa morreu.



9 PROGRESSÕES

1 Seqüências numéricas

Vamos pensar nos anos bissextos que virão a partir do ano 2000. Eles formam uma seqüência ou sucessão:

Uma seqüência numérica é um conjunto ordenado de números. No exemplo, 2000 é o primeiro termo da seqüência, 2004 é o segundo termo, e assim sucessivamente.

Costuma-se indicar o primeiro termo de uma seqüência por a_1, o segundo termo por a_2, e assim por diante. Dessa forma, uma seqüência de n elementos é indicada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

Há situações em que a seqüência é infinita, e a representaremos por $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Em nosso estudo, os elementos das seqüências serão sempre *números reais*.

Formação dos elementos de uma seqüência

Os elementos de uma seqüência podem ser determinados através de uma *lei de formação*. Observe os exemplos.

Exemplo 1

Vamos determinar os cinco primeiros termos da seqüência definida por:

$$a_n = 4n^2 - 2,\ n \in \mathbb{N}^*$$

a_n representa o termo que ocupa a n-ésima posição na seqüência, em que n = 1, 2, 3, ... Por esse motivo, a_n é chamado *termo geral* da seqüência.

Atribuindo valores permitidos para n, encontramos os termos procurados:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 4 \cdot 1^2 - 2 \Rightarrow a_1 = 2$$
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 4 \cdot 2^2 - 2 \Rightarrow a_2 = 14$$
$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 4 \cdot 3^2 - 2 \Rightarrow a_3 = 34$$
$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4 \cdot 4^2 - 2 \Rightarrow a_4 = 62$$
$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 4 \cdot 5^2 - 2 \Rightarrow a_5 = 98$$
$$\vdots$$

Assim, a seqüência procurada é (2, 14, 34, 62, 98, ...).

Exemplo 2

Consideremos a seqüência definida por $a_n = 2n - 7$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Podemos descobrir o valor de a_5:

$$a_5 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$$

Se quisermos saber se o número 83 pertence à seqüência, devemos substituir a_n por 83 e verificar se a equação obtida tem solução natural:

$$83 = 2n - 7 \Rightarrow 2n = 90 \Rightarrow n = 45$$

Concluímos, então, que o número 83 pertence à seqüência e ocupa a 45ª posição.

Outra maneira de determinarmos os elementos de uma seqüência é através da *lei de recorrência*. Essa lei nos permite encontrar um termo qualquer da seqüência a partir do termo anterior.

Exemplo 3

Vamos construir a seqüência definida pelas relações:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n + 3,\ n \in \mathbb{N}^* \ \text{(I)} \end{cases}$$

Determinaremos o 2º termo a partir do 1º; o 3º a partir do 2º, e assim por diante. Para isso, basta atribuirmos valores para n em (I):

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_2 = a_1 + 3 \Rightarrow a_2 = 7 + 3 \Rightarrow a_2 = 10 \\ n = 2 &\Rightarrow a_3 = a_2 + 3 \Rightarrow a_3 = 10 + 3 \Rightarrow a_3 = 13 \\ n = 3 &\Rightarrow a_4 = a_3 + 3 \Rightarrow a_4 = 13 + 3 \Rightarrow a_4 = 16 \\ n = 4 &\Rightarrow a_5 = a_4 + 3 \Rightarrow a_5 = 16 + 3 \Rightarrow a_5 = 19 \end{aligned}$$

Assim, a seqüência procurada é (7, 10, 13, 16, 19, ...).

Exercícios

1 Escreva os cinco primeiros termos da seqüência definida por $a_n = 2n + 3$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2 A respeito da seqüência dada por $a_n = \frac{1}{2 + n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, determine:

a) $a_5 + a_4$

b) a posição do elemento $\frac{1}{123}$ dessa seqüência

3 Considere a seqüência definida por: $a_n = -43 + 5n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Qual é o valor da soma de seus 3 primeiros termos?
b) Qual seu primeiro termo positivo? Que posição esse termo ocupa na seqüência?

4 Uma seqüência é definida pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$$

Escreva os 6 primeiros termos dessa seqüência.

5 Determine o 8º termo da seqüência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1;\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2};\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 3 \end{cases}$$

6 (Covest-PE) Sobre os números da seqüência $a_n = n^5 - n$, $n \in \mathbb{N}^*$, analise as seguintes afirmações:

a) São múltiplos de 3.
b) Não podem ser múltiplos de 7.
c) Não são primos.

7 (UF-RN) Uma pessoa que pesa 140 quilos submete-se a um regime alimentar, obtendo o seguinte resultado: nas quatro primeiras semanas, perde 3 quilos por semana; nas quatro seguintes, 2 quilos por semana; daí em diante, apenas $\frac{1}{2}$ quilo por semana.

Calcule em quantas semanas a pessoa estará pesando:

a) 122 quilos.

b) 72 quilos.

2 ○ Progressões Aritméticas

Observe a seqüência:

$$(4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots)$$

Notemos que a diferença entre um termo qualquer dessa seqüência e seu antecedente é sempre igual a 3:

$$7 - 4 = 3;\ 10 - 7 = 3;\ 13 - 10 = 3;$$
$$16 - 13 = 3;\ 19 - 16 = 3;\ \ldots$$

Definição

Progressão Aritmética (P.A.) é uma seqüência de números reais em que a *diferença entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante).*

Essa constante é chamada *razão* da P.A. e é indicada por *r.*

Vejamos alguns exemplos:

1. Na P.A. $(3, 6, 9, 12, \ldots)$ temos $r = 3$.
2. Na P.A. $\left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \ldots\right)$ temos $r = -\frac{1}{2}$.
3. Na P.A. $(-6, -1, 4, 9, \ldots)$ temos $r = 5$.
4. Na P.A. $(5, 5, 5, 5, \ldots)$ temos $r = 0$.
5. Na P.A. $(23, 20, 17, 14, \ldots)$ temos $r = -3$.

De acordo com o sinal da razão, podemos classificar as Progressões Aritméticas da seguinte forma:

a) Quando $r > 0$, dizemos que a P.A. é *crescente*, como nos exemplos 1 e 3.
b) Quando $r < 0$, dizemos que a P.A. é *decrescente*, como nos exemplos 2 e 5.
c) Quando $r = 0$, todos os termos da P.A. são iguais; nesse caso, dizemos que ela é *constante*, como no exemplo 4.

3 ○ Termo geral da P.A.

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.A., conhecendo apenas o 1º termo e a razão.

Isso é possível graças à obediência dos termos de uma P.A. a uma regra especial de formação.

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma P.A. de razão *r.* Temos:

- $a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$
- $a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$
- $a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na seqüência, é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Essa expressão, conhecida como *fórmula do termo geral da P.A.*, permite-nos conhecer qualquer termo da P.A. em função de a_1 e r. Assim, por exemplo, podemos escrever:

$$a_9 = a_1 + 8r; \quad a_{15} = a_1 + 14r; \quad a_{26} = a_1 + 25r$$

e assim por diante.

Exemplo 4

Vamos calcular o 50º termo da P.A. (–3, 1, 5, 9, ...).
Sabemos que $a_1 = -3$ e $r = 1 - (-3) = 4$.
Utilizando a expressão do termo geral, podemos escrever:

$$a_{50} = a_1 + 49r \Rightarrow a_{50} = (-3) + 49 \cdot 4 \Rightarrow a_{50} = 193$$

Exemplo 5

Vamos determinar a P.A. que possui as seguintes características: o 10º termo vale 48 e a soma do 5º com o 20º termo é igual a 121.
De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} a_{10} = 48 \\ a_5 + a_{20} = 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 9r = 48 \\ (a_1 + 4r) + (a_1 + 19r) = 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 9r = 48 \\ 2a_1 + 23r = 121 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, segue $r = 5$ e $a_1 = 3$.
Assim, a P.A. pedida é (3, 8, 13, 18, 23, ...).

Exemplo 6

Vamos encontrar o primeiro termo negativo da P.A. (37, 35, 33, ...).
Sabemos que $a_1 = 37$ e $r = -2$.
O termo geral da P.A. é $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.
Então:

$$a_n = 37 + (n - 1)(-2) \Rightarrow a_n = 37 - 2n + 2 \Rightarrow a_n = 39 - 2n$$

Agora podemos saber qual é o 1º termo negativo da P.A.

Façamos $a_n < 0$, isto é, $39 - 2n < 0 \Rightarrow n > \frac{39}{2} \Rightarrow n > 19{,}5$.

Como n é natural, concluímos que o 1º termo negativo da P.A. é o 20º, cujo valor é:

$$a_{20} = 37 + 19(-2) \Rightarrow a_{20} = -1$$

Exemplo 7

Determinemos x de modo que a seqüência $(x^2 + 1, x + 2, 4x)$ seja uma P.A.

Em qualquer P.A. (a_1, a_2, a_3), $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, isto é, o termo central é dado pela *média aritmética* entre os outros dois termos.
Assim,

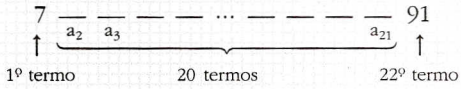
$$x + 2 = \frac{(x^2 + 1) + (4x)}{2} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

As raízes dessa equação são $x = 1$ ou $x = -3$.
Podemos verificar que, para $x = 1$, a P.A. é (2, 3, 4) e, para $x = -3$, a P.A. é (10, –1, –12).

Exemplo 8

Vamos interpolar 20 meios aritméticos entre 7 e 91.

"Interpolar" ou inserir 20 meios aritméticos entre 7 e 91 significa determinar 20 números reais de modo que se tenha uma P.A. em que $a_1 = 7$ e $a_{22} = 91$ e os vinte números sejam $a_2, a_3, \ldots, a_{21}$, como mostra o esquema abaixo:



Daí:

$$a_{22} = a_1 + 21 \cdot r$$
$$91 = 7 + 21 \cdot r$$
$$21r = 84 \Rightarrow r = 4$$

Assim, a seqüência procurada é (7, 11, 15, ..., 87, 91).

Exemplo 9

Vamos descobrir quantos múltiplos de 3 existem entre 200 e 400.

A seqüência dos múltiplos de 3 é uma P.A. de razão 3. O que nos interessa é estudar essa seqüência entre 200 e 400.

Para isso, temos:

- o primeiro múltiplo de 3 maior que 200 é $a_1 = 201$;
- o último múltiplo de 3 pertencente ao intervalo dado é 399, que indicaremos por a_n, pois não conhecemos sua posição na seqüência. Assim, $a_n = 399$.

Retomando, queremos determinar o número de termos (n) da seqüência (201, 204, ..., 399). Pelo termo geral da P.A., temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 399 = 201 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 67$$

Portanto, há 67 múltiplos de 3 entre 200 e 400.

Exercícios

8 Determine a razão de cada uma das seguintes progressões aritméticas e, em seguida, classifique-as em crescente, decrescente ou constante:

a) (13, 17, 21, 25, ...)

b) (40, 35, 30, 25, 20, ...)

c) (–7, –7, –7, ...)

d) (–4, –10, –16, –22, ...)

e) $\left(\frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8, \ldots\right)$

f) (–7, –1, 5, 11, ...)

9 Qual é o 10º termo da P.A. (43, 55, 67, 79, ...)?

10 Qual é o 72º múltiplo positivo de 3?

11 Considere a seqüência dos números naturais que são múltiplos *positivos* de 4.

a) Escreva o termo geral dessa seqüência.

b) Qual é o seu 50º termo?

12 Numa P.A., o primeiro termo é –12 e o décimo quinto termo é 30. Qual é o quarto termo?

13 Dada a P.A. $(-51, -47, -43, \ldots)$, determine:

a) seu termo geral.
b) o 40º termo.
c) seu primeiro termo positivo.

14 (Mackenzie-SP) Numa progressão aritmética de 7 termos, $a_7 = 3a_1$ e o termo central é 6. Qual é a razão da progressão?

15 Escreva a P.A. em que $a_1 + a_3 + a_4 = 0$ e $a_6 = 40$.

16 Dado um quadrado Q_1 de lado $\ell = 1$ cm, considere a seqüência de quadrados $\{Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\}$, em que o lado de cada quadrado é 2 cm maior que o lado do quadrado anterior.
Determine:

a) o perímetro de Q_{20}.
b) a área de Q_{31}.
c) a diagonal de Q_{10}.

17 Um banco financiou um lançamento imobiliário nas seguintes condições: em janeiro, aprovou crédito para 236 pessoas; em fevereiro, para 211; em março aprovou mais 186 nomes, e assim por diante.
Quantas pessoas tiveram seu crédito aprovado em junho?

18 Dada a seqüência $(2^x, 2^{x+1}, 3 \cdot 2^x, 2^{x+2}, \ldots)$:

a) *Se ela representar uma PA*, calcule sua razão.
b) Determine x a fim de que seu oitavo termo valha 32.

19 Determine m a fim de que a seqüência $(m - 14, 2m + 2, m^2)$ seja uma P.A.

20 Determine x para que a seqüência $(\log_2 (x - 2), \log_2 4x, \log_2 32x)$ seja uma P.A.

21 As medidas que exprimem a diagonal, o lado e a área de um quadrado podem estar, nessa ordem, em P.A.? Em caso afirmativo, qual é a razão da P.A.?

22 Qual é o número de termos da P.A. $(53, 62, 71, \ldots, 305)$?

23 Interpole seis meios aritméticos entre -22 e 20.

24 Quantos meios aritméticos devem ser inseridos entre 15 e 160, de modo que a razão da interpolação seja igual a 5?

25 Quantos números inteiros x, tais que $23 \leqslant x \leqslant 432$, *não* são múltiplos de 3?

26 (UF-RJ) Os números a, b e c são tais que seus logaritmos decimais log a, log b e log c, nesta ordem, estão em progressão aritmética.
Sabendo que log b = 2, determine o produto abc.

4 ○ Notação especial

Muitas vezes desejamos determinar uma P.A. a partir de informações sobre seus elementos.

Como já vimos, pela definição de P.A. podemos encontrar uma representação conveniente que nos facilite a resolução de alguns problemas.

- Para três termos em P.A., podemos escrever:

$$(x - r,\ x,\ x + r)$$

- Para cinco termos em P.A., podemos escrever:

$$(x - 2r,\ x - r,\ x,\ x + r,\ x + 2r)$$

- Para quatro termos em P.A., a fim de obtermos uma representação simétrica, podemos usar o seguinte artifício:

$$(x - 3y,\ x - y,\ x + y,\ x + 3y),$$

em que $r = x - y - (x - 3y)$, isto é, $r = 2y$.

Exemplo 10

Vamos encontrar três termos em P.A. cuja soma seja 33 e o produto, 440.
A P.A. procurada é $(x - r, x, x + r)$.
Devemos ter:

$$\begin{cases} \text{soma} = 33 \Rightarrow (x - r) + x + (x + r) = 33 \Rightarrow 3x = 33 \Rightarrow x = 11 \\ \text{produto} = 440 \overset{x = 11}{\Rightarrow} (11 - r) \cdot 11 \cdot (11 + r) = 440 \Rightarrow (11 - r)(11 + r) = 40 \Rightarrow \\ \qquad\qquad \Rightarrow 121 - r^2 = 40 \Rightarrow r = 9 \text{ ou } r = -9 \end{cases}$$

Para $r = 9$, a P.A. é $(2, 11, 20)$.
Para $r = -9$, a P.A. é $(20, 11, 2)$.

Exemplo 11

Vamos construir uma P.A. de quatro termos em que a soma dos dois primeiros é -8 e a dos dois últimos é 16.

Os termos procurados são $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$.
Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} (x - 3y) + (x - y) = -8 \\ (x + y) + (x + 3y) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -8 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Resolvendo por adição, vem:

$$x = 2 \text{ e } y = 3$$

Assim, a P.A. é $(-7, -1, 5, 11)$.

Exercícios

27 Determine três números em P.A. crescente cuja soma seja 39 e o produto dos extremos seja 144.

28 (Unicap-PE) Um triângulo retângulo tem as medidas dos seus lados em progressão aritmética de razão 4 cm. Determine, em centímetros, a soma da medida da hipotenusa com a medida do cateto de menor comprimento.

29 Num quadrilátero, os ângulos internos estão em P.A. e o maior deles mede 150°. Quais são as medidas dos outros ângulos internos?

30 (Fatec-SP) Na compra a prazo de um aparelho eletrodoméstico, o total pago por uma pessoa foi R$ 672,00. A entrada teve valor correspondente a $\frac{1}{6}$ do total, e o restante foi pago em 4 parcelas, cujos valores formaram uma progressão aritmética crescente de razão R$ 40,00.
Qual é o valor da última prestação?

31 Escreva cinco números em P.A. cuja soma seja 30 e o produto do 1º pelo 3º seja 18.

5 ○ Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A.

Observe a seqüência dos cem primeiros números naturais positivos: (1, 2, 3, ..., 100). Trata-se de uma P.A. de razão 1.

Suponhamos que se queira calcular a soma dos termos dessa seqüência, isto é, a soma dos cem primeiros números naturais.

Temos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100}, \text{ isto é,}$$
$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \quad \text{(I)}$$

Escrevendo (I) em outra ordem, vem:

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 1 \quad \text{(II)}$$

Fazendo (I) + (II) de acordo com o esquema abaixo indicado, temos:

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
\text{(I)} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
+ & & & & & & & & & & & & & & & \\
\text{(II)} & S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
2 \cdot & S & = & \multicolumn{13}{c}{\underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{\text{cem vezes}}}
\end{array}$$

Assim, $2 \cdot S = 100 \cdot 101$.

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5\,050$$

De modo geral, se a seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ é uma P.A. de razão *r*, podemos escrevê-la na forma:

$$(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \ldots, a_n - 2r, a_n - r, a_n)$$

Vamos calcular a soma dos *n* primeiros termos dessa P.A., que indicaremos por S_n. Repetindo o raciocínio anterior, temos:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
\text{(I)} & S_n = & a_1 & + (a_1 + \cancel{r}) & + (a_1 + \cancel{2r}) & + \ldots & + (a_n - \cancel{2r}) & + (a_n - \cancel{r}) & + & a_n \\
\text{(II)} & S_n = & a_n & + (a_n - \cancel{r}) & + (a_n - \cancel{2r}) & + \ldots & + (a_1 + \cancel{2r}) & + (a_1 + \cancel{r}) & + & a_1 \\
\hline
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\text{(I) + (II):} & 2 \cdot S_n = & \multicolumn{7}{c}{\underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}}
\end{array}$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Notemos que o cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma P.A. depende do conhecimento do *1º termo da P.A.* (a_1) e do *último termo a ser somado na P.A.* (a_n).

Exemplo 12

Calculemos a soma dos 50 primeiros termos da P.A. (11, 13, 15, ...).
Sabemos que $a_1 = 11$ e $r = 2$.
Precisamos determinar o 50º termo da P.A.:

$$a_{50} = a_1 + 49r \Rightarrow a_{50} = 11 + 49 \cdot 2 \Rightarrow a_{50} = 109$$

Assim, a soma dos 50 primeiros termos da P.A. é:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = (11 + 109) \cdot 25 = 3\,000$$

Exemplo 13

Em relação à seqüência dos números naturais ímpares, vamos calcular:

a) a soma dos trinta primeiros termos;
b) a soma dos n primeiros termos.

A seqüência é (1, 3, 5, 7, ...), com r = 2.

a) $a_{30} = a_1 + 29r \Rightarrow a_{30} = 1 + 29 \cdot 2 \Rightarrow a_{30} = 59$

Assim:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} \Rightarrow S_{30} = \frac{(1 + 59) \cdot 30}{2} \Rightarrow S_{30} = 900$$

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = -1 + 2n$

Daí:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 - 1 + 2n)n}{2} \Rightarrow S_n = n^2$$

Podemos verificar a resposta encontrada em *b*, atribuindo valores para n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$):

- n = 1: a seqüência é (1) e, assim, $S_1 = 1^2 = 1$.
- n = 2: a seqüência é $\underbrace{(1, 3)}_{S = 4}$, cuja soma é $S_2 = 2^2 = 4$.
- n = 3: a seqüência é $\underbrace{(1, 3, 5)}_{S = 9}$, cuja soma é $S_3 = 3^2 = 9$.

⋮

etc.

Exercícios

32 Calcule a soma dos quinze primeiros termos da P.A. (–14, –10, –6, ...).

33 O termo geral de uma P.A. é $a_n = 48 - 5n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calcule a soma de seus dez primeiros termos.

34 O primeiro termo de uma P.A. vale 0,7 e a soma de seus vinte primeiros termos é igual a 71. Determine:

a) o vigésimo termo dessa P.A.

b) o décimo termo dessa P.A.

35 Uma gravadora observou que, em um ano, a venda de *compact discs* aumentava mensalmente segundo uma P.A. de razão 400. Se em março foram vendidos 1 600 CDs, quantos CDs a gravadora vendeu naquele ano?

36 (Mackenzie-SP) As somas dos n primeiros termos das seqüências aritméticas (8, 12, ...) e (17, 19, ...) são iguais.
Qual é o valor de n?

37 Dada a P.A. (e^x, $e^x + 1$, $e^x + 2$, ...), determine o valor de x tal que a soma de seus dez primeiros termos seja igual a 50.

38 Suponha que, em um certo mês, o número de queixas diárias registradas em um órgão de defesa do consumidor aumente segundo uma P.A.
Sabendo que nos dez primeiros dias houve 245 reclamações e nos dez dias seguintes houve mais 745 reclamações, determine a seqüência do número de queixas naquele mês.

39 Verificou-se que o número de vendas eletrônicas de um aparelho de som em um portal de Internet aumentava diariamente segundo uma P.A. de razão 8. Sabendo que no primeiro dia foram registradas doze vendas, determine quantos dias esse produto ficou disponível no portal, se, ao todo, foram registradas 2 700 transações.

40 (UMC-SP) Um carro é vendido nas seguintes condições: uma entrada de R$ 5 000,00 e 24 prestações de valores crescentes. A primeira prestação é de R$ 450,00; a segunda, de R$ 460,00; a terceira, de R$ 470,00, ou seja, à prestação anterior são acrescentados R$ 10,00. Qual é o valor da última prestação e o total pago por esse carro?

41 Qual é o valor de:

a) $12 + 25 + 38 + \ldots + 350$?
b) $20^2 - 19^2 + 18^2 - 17^2 + 16^2 - 15^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$?

42 Numa P.A., sabe-se que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = n^2 + \frac{3}{2}n$. Determine:

a) S_4 b) a_4 c) a_{20}

43 Quantos termos devemos somar em $(-15, -12, -9, \ldots)$ para obtermos soma igual a 270?

44 (Unirio-RJ) Considere uma progressão aritmética de 4 elementos cujo primeiro elemento é $\log_2 3$. Sabendo-se que a soma desses elementos é $\log_2 5\,184$, determine a razão desta seqüência.

45 (UFF-RJ) Determine o valor de x na equação:

$$\log x + \log x^2 + \log x^3 + \ldots + \log x^{18} = 342$$

6 ○ Progressões Geométricas

Observe a seqüência:

$$(3, 6, 12, 24, 48, \ldots)$$

Notemos que, dividindo um termo qualquer dessa seqüência pelo termo antecedente, o resultado é sempre igual a 2:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2; \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2; \qquad \frac{a_4}{a_3} = \frac{24}{12} = 2;$$

e assim por diante.

Definição

Progressão Geométrica (P.G.) é a seqüência de números reais não nulos em que o *quociente entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente é sempre o mesmo (constante).*

Essa constante é chamada *razão* da P.G. e é indicada por q.

Vejamos alguns exemplos:

1. $(2, 6, 18, 54, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = 3$.
2. $(-5, 15, -45, 135, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = -3$.
3. $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{2}$.
4. $(4, -4, 4, -4, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = -1$.

Quando $q < 0$, dizemos que a P.G. é *alternada* ou *oscilante*.

Quando ($a_1 > 0$ e $q > 1$) ou ($a_1 < 0$ e $0 < q < 1$), a P.G. é *crescente*.

Quando ($a_1 > 0$ e $0 < q < 1$) ou ($a_1 < 0$ e $q > 1$), a P.G. é *decrescente*.

7 ○ Termo geral da P.G.

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.G. conhecendo apenas o 1º termo (a_1) e a razão (q).

Isso é possível graças à obediência dos termos de uma P.G. a uma lei especial de formação:

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma P.G. de razão q.

Temos:

- $\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$
- $\frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$
- $\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$

⋮ ⋮ ⋮

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na seqüência, é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Essa expressão, conhecida como *fórmula do termo geral da P.G.*, permite-nos conhecer qualquer termo da P.G. em função do 1º termo (a_1) e da razão (q).

Assim, temos:

$$a_6 = a_1 \cdot q^5; \quad a_{11} = a_1 \cdot q^{10}; \quad a_{29} = a_1 \cdot q^{28};$$

e assim por diante.

Exemplo 14

Vamos determinar o 10º termo da P.G. (2, 6, 18, ...).

Sabemos que $a_1 = 2$ e $q = 3$.

Assim, pela expressão do termo geral, podemos escrever:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^9 \Rightarrow a_{10} = 39\,366$$

Exemplo 15

Numa P.G., o 5º termo é igual a 112 e o 1º termo é igual a 7. Vamos determinar a razão da P.G. e, em seguida, obter seu 8º termo.

Como $a_5 = a_1 \cdot q^4$, vem:

$$112 = 7 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$$

(Observe que para $q = 2$ a P.G. é crescente, e para $q = -2$ a P.G. é oscilante.)

Usando novamente a expressão do termo geral, determinemos o 8º termo:

$$a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow a_8 = 7 \cdot (\pm 2)^7 \Rightarrow a_8 = \pm 7 \cdot (128) \Rightarrow a_8 = \pm 896$$

Exemplo 16

Vamos construir a P.G. em que a soma do 3º com o 5º termo é $\frac{5}{2}$ e a soma do 7º com o 9º termo é 40.

Do enunciado, vem:

$$\begin{cases} a_3 + a_5 = \frac{5}{2} \\ a_7 + a_9 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q^2 + a_1q^4 = \frac{5}{2} \\ a_1q^6 + a_1q^8 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q^2(1 + q^2) = \frac{5}{2} \quad (I) \\ a_1q^6(1 + q^2) = 40 \quad (II) \end{cases}$$

Dividindo membro a membro (I) por (II):

$$\frac{\cancel{a_1 q^2(1+q^2)}}{\cancel{a_1 q^6(1+q^2)}} = \frac{\frac{5}{2}}{40} \Rightarrow \frac{1}{q^4} = \frac{5}{80} \Rightarrow q = \pm 2$$

- Para $q = 2$, substituindo em (I), vem:

$$a_1 \cdot 2^2 \cdot (1 + 2^2) = \frac{5}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{8} \text{ e a P.G. é } \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots\right)$$

- Para $q = -2$, substituindo em (I), vem:

$$a_1(-2^2) \cdot [1 + (-2)^2] = \frac{5}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{8} \text{ e a P.G. é } \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, \ldots\right)$$

Exemplo 17

Vamos determinar x a fim de que a seqüência $\left(\frac{9x-4}{2}, x, x-3\right)$ seja uma P.G.

Em qualquer PG (a_1, a_2, a_3), $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, isto é, o termo central é dado pela média geométrica entre os outros dois termos:

$$x^2 = \left(\frac{9x-4}{2}\right) \cdot (x-3) \Rightarrow 2x^2 = 9x^2 - 31x + 12 \Rightarrow 7x^2 - 31x + 12 = 0$$

As raízes dessa equação são $x_1 = 4$ e $x_2 = \frac{3}{7}$.

Verificando, para $x = 4$, a P.G. é $(16, 4, 1)$ e, para $x = \frac{3}{7}$, a P.G. é $\left(-\frac{1}{14}, \frac{3}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.

Exemplo 18

Vamos determinar três números em P.G. cujo produto seja 3 375 e a soma do 1º com o 3º termo seja igual a 78.

Quando queremos encontrar três termos em P.G. e conhecemos algumas informações sobre eles, é interessante escrevê-los na forma $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$.

Do enunciado, vem:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 3375 \Rightarrow x^3 = 3375 \Rightarrow x = 15 \\ \frac{x}{q} + x \cdot q = 78 \underset{x=15}{\Rightarrow} \frac{15}{q} + 15q = 78 \Rightarrow 15q^2 - 78q + 15 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, vem $q = 5$ ou $q = \frac{1}{5}$.

- Para $q = 5$, temos $(3, 15, 75)$.
- Para $q = \frac{1}{5}$, temos $(75, 15, 3)$.

Exemplo 19

Vamos interpolar 3 meios geométricos entre $\frac{1}{2}$ e 128.

Devemos formar uma P.G. de 5 termos na qual $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_5 = 128$.

$$\left(\frac{1}{2}, \underbrace{\_, \_, \_}_{\text{3 meios}}, 128\right)$$

Temos:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 128 = \frac{1}{2} \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 256 \Rightarrow q = \pm 4$$

- Para $q = 4$, a P.G. é $\left(\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128\right)$.
- Para $q = -4$, a P.G. é $\left(\frac{1}{2}, -2, 8, -32, 128\right)$.

46 Calcule a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) $(3, 6, 12, 24, 48, \ldots)$

b) $(-2, 8, -32, 128, \ldots)$

c) $(3^{20}, 3^{22}, 3^{24}, \ldots)$

d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{48}, \frac{1}{192}, \ldots\right)$

e) $(\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25, \ldots)$

47 Qual é o 8º termo da P.G. $(800, 400, 200, \ldots)$?

48 Qual é o 6º termo da P.G. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right)$?

49 O 2º termo de uma P.G. de termos positivos é 10^5 e o 10º termo é 10^{21}.
Qual é a razão dessa P.G.?

50 Num programa de fisioterapia, um paciente recebeu a instrução de nadar, a cada dia, 50% a mais da distância percorrida no dia anterior. Se no primeiro dia o paciente conseguiu nadar 20 metros, qual será o número *inteiro* mais próximo da distância que ele deverá nadar no sexto dia?

51 O número de participantes de um bate-papo virtual (*chat*) em um portal de Internet varia segundo uma P.G. no período das 23 horas às 6 horas. Se às 2 horas da manhã havia 2000 pessoas nas salas de bate-papo e às 5 da manhã, 250 pessoas, determine o número de internautas nas salas:

a) às 23 horas.

b) às 6 horas.

52 (UF-PA) Um motorista aciona os freios de um automóvel. Após a freada, o veículo percorre 27 metros no primeiro segundo e, durante alguns segundos, percorre, em cada segundo, $\frac{1}{3}$ da distância que percorreu no segundo anterior. Ache a distância total a ser percorrida no tempo de 4 segundos após a freada.

53 Numa P.G. oscilante, a soma do 2º com o 5º termo é -210, e a soma do 4º com o 7º termo é -840. Qual é o 1º termo dessa P.G.?

54 Dada a P.G. $(2^x, 2^{2x}, 2^{3x}, \ldots)$, determine o valor de x de modo que seu décimo termo seja $\frac{1}{128}$.

55 (U. F. Santa Maria-RS) Um navio encalhado provoca, em torno de si, um vazamento circular de óleo. Constatou-se, ao fim do 1º dia de vazamento, que o raio da mancha de óleo media r metros. Verificou-se, ainda, que o raio da mancha de óleo dobrava a cada 24 horas.
Nessas condições, qual é a razão da área da mancha de óleo ao fim do 7º dia pela área da mancha no fim do 1º dia?

56 (UF-SC, adaptado) Sabendo que a seqüência $(4y, 2y - 1, y + 1)$ é uma P.G., determine:

a) o valor de y.

b) a razão da P.G.

57 Determine x de modo que a seqüência $(3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x+1})$ seja uma P.G.

58 Qual é o número de termos da P.G. $(\sqrt{3}, \sqrt{6}, \ldots, 16\sqrt{3})$?

59 As idades de três irmãos são números inteiros que estão em P.G. Se o produto dessas idades é 64 e a soma das idades dos dois mais velhos é 20, quantos anos tem cada um dos irmãos?

60 Os números que expressam as medidas do lado, da diagonal e da área de um quadrado podem estar, nessa ordem, em P.G.? Em caso afirmativo, qual é a razão dessa P.G.?

61 (U. F. Ouro Preto-MG, adaptado) Os números que expressam as medidas dos lados de um triângulo *retângulo* podem estar, nessa ordem, em P.G.? Em caso afirmativo, qual é a razão dessa P.G.?

62 Subtraindo-se um mesmo número de 6, 14 e 38, obtemos, nessa ordem, uma P.G. Qual é a razão dessa P.G.?

63 (Unicamp-SP) Considere uma progressão geométrica de termos não nulos, na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores.

a) Calcule os dois valores possíveis para a razão q dessa progressão.

b) Supondo que o primeiro termo seja $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $q > 0$, calcule a soma dos três primeiros termos dessa progressão.

64 (UF-MG) Três números reais a, b e c satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} \log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = 9 \\ a + b + c = 117 \end{cases}$$

Além disso, eles estão em progressão geométrica, isto é, existe um número real r tal que $b = ar$ e $c = br$. Determine todos os possíveis valores de r e os correspondentes valores de a, b e c.

8 ○ Trabalhando ao mesmo tempo com P.A. e P.G.

Há vários problemas que envolvem, simultaneamente, seqüências aritméticas e geométricas. Para resolvê-los, em geral, usamos a propriedade fundamental que caracteriza cada uma dessas seqüências.

Exemplo 20

Vamos encontrar x e y de modo que a seqüência $(5, y, x)$ seja uma P.A. de termos positivos e a seqüência $(x + 1, y - 2, 4)$ seja uma P.G.

- Se $(5, y, x)$ é P.A., então $y = \frac{x+5}{2}$. (I)
- Se $(x + 1, y - 2, 4)$ é P.G., então $(y - 2)^2 = 4(x + 1)$. (II)
- Substituindo (I) em (II), encontramos:

$$\left(\frac{x+5}{2} - 2\right)^2 = 4(x+1) \Rightarrow x^2 - 14x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$

- Se $x = 15$, em (I), encontramos $y = 10$. Assim a P.A. é $(5, 10, 15)$ e a P.G. é $(16, 8, 4)$.
- Se $x = -1$, em (I), encontramos $y = 2$. Assim a P.A. é $(5, 2, -1)$, que não possui todos os termos positivos e deve ser descartada.

Exercícios

65 Dada a P.G. $(3, 9, 27, \ldots)$:

a) escreva seu termo geral;

b) determine o produto de seus vinte primeiros termos.

66 A seqüência $(x + 1, x^2, 14)$ é uma P.A. crescente e $(x, 6, y)$ é uma P.G.

a) Qual é a razão da P.G.?

b) Qual é o valor de y?

67 (UF-MG) Os números reais 3, a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética cuja razão é positiva. Por sua vez, os números reais a, b e 8 são, também nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica.
Determine a e b.

68 Demonstre que, se (a, b, c) é uma P.G. de termos positivos, então a seqüência de seus logaritmos decimais, nessa mesma ordem, é uma P.A.

69 (UF-AL) Numa progressão aritmética crescente, cujo primeiro termo é 2, os termos a_1, a_4 e a_{10} estão em progressão geométrica. Determine a razão dessa progressão aritmética.

70 (Unifor-CE) Chama-se *progressão harmônica* uma seqüência de números tais que seus inversos constituem uma progressão aritmética. Assim sendo, se os três primeiros termos de uma *progressão harmônica* são 8, 5 e $\frac{40}{11}$, qual é o seu sexto termo?

9 Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma P.G. de razão $q \neq 1$.
Queremos encontrar uma expressão para:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad (I)$$

Multiplicando por q os dois membros da igualdade acima, e lembrando a formação dos elementos de uma P.G., vem:

$$q \cdot S_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n \cdot q \quad (II)$$

Fazendo (II) – (I), temos:

$$q \cdot S_n - S_n = (\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_n \cdot q) - (a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n})$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, então:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1, \text{ isto é,}$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^n - a_1 \overset{q \neq 1}{\Rightarrow} S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Observações

1ª) O cálculo da soma dos n primeiros termos de uma P.G., como vemos, depende do conhecimento da razão da P.G. e de seu 1º termo.

2ª) Note que a expressão encontrada é válida apenas para $q \neq 1$. Se $q = 1$, a P.G. tem todos os termos iguais entre si (ela é constante). Desse modo, se quisermos determinar o valor da soma de seus n primeiros termos, assim procederemos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \overset{q=1}{\Rightarrow} S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n \text{ vezes}} \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$$

Exemplo 21

Vamos calcular a soma dos 10 primeiros termos da P.G. (1, 2, 4, 8, ...).
Temos $a_1 = 1$ e $q = 2$, então:

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$$

Exemplo 22

Qual é o número mínimo de termos que devem ser considerados na P.G. (3, 9, 27, 81, ...) para se obter uma soma maior que 1000?
Nessa P.G. temos $a_1 = 3$ e $q = 3$, então:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

Impondo $S_n > 1000$, temos:

$$\frac{3^{n+1} - 3}{2} > 1000 \Rightarrow 3^{n+1} - 3 > 2000 \Rightarrow 3^{n+1} > 2003 \text{ (I)}$$

Notando que $3^6 = 729$ e $3^7 = 2187$, concluímos que o menor valor de $n + 1$ para satisfazer a condição (I) é $n + 1 = 7$ e, portanto, $n = 6$. Outro caminho é usar a calculadora: $n + 1 > \frac{\log 2003}{\log 3}$.

Exercícios

71 Calcule a soma dos oito primeiros termos da P.G. (–2, 6, –18, ...).

72 Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G. (m, m^2, m^3, m^4, ...):

a) para $m = 1$. b) para $m = 2$. c) para $m = -2$.

73 Quantos termos da P.G. (2, –6, 18, –54) devemos considerar a fim de que a soma resulte 9842?

74 (Umesp-SP) Duas pessoas ficam sabendo de uma informação. No dia seguinte, cada uma delas passa essa informação para outras três pessoas. Cada uma dessas pessoas, no dia seguinte, conta para outras três e assim sucessivamente. Passados cinco dias, quantas tomarão conhecimento daquela informação inicial?

75 (UF-BA) Um jogador faz uma série de apostas e, na primeira vez, perde R$ 1,00; na segunda, duplica a aposta e perde R$ 2,00; na terceira, duplica a aposta anterior e perde R$ 4,00; e assim, sucessivamente, até ter perdido um total de R$ 255,00.
Calcule quantas vezes o jogador apostou.

76 (UF-CE) Seja $x = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}$ e $y = 10^n + 5$. Determine $\sqrt{xy + 1}$.

77 (U. F. Ouro Preto-MG) A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é dada por $S_n = 3^n - 1$, sendo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Pede-se:

a) Encontre o primeiro e o segundo termos da P.G.
b) Obtenha a razão da P.G.
c) Expresse o termo geral a_n da P.G.
d) Utilize a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G. para verificar que, de fato, $S_n = 3^n - 1$.

10 ○ Série geométrica convergente

Vejamos o seguinte problema:

O que acontece com a soma dos termos de uma P.G. quando levamos em conta um número cada vez maior de termos a serem somados?

Vamos considerar dois casos:

1º) Seja a P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ de razão $q = \frac{1}{2}$. Calculemos a soma de seus n primeiros termos para alguns valores de n:

$$S_5 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = 1{,}9375$$

$$S_{10} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \cong 1{,}998$$

$$S_{20} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \cong 1{,}999998$$

Podemos notar que, à medida que n aumenta, o valor de S_n fica cada vez mais próximo de 2. Dizemos que, para valores de n tão grandes quanto se queira, a soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ *converge* para 2, ou, ainda, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$.

2º) Seja a P.G. (2, 4, 8, 16, ...) de razão $q = 2$.

Calculando alguns valores de S_n, temos:

$$S_5 = 62;\ S_{10} = 2046;\ S_{20} = 2097150$$

Podemos notar que, à medida que n aumenta, S_n também aumenta, isto é, o valor de S_n fica tão grande quanto se queira. Dizemos que a soma $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ *diverge*.

Nosso objetivo é estudar apenas as *séries geométricas convergentes*.

Seja a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ cuja razão q é tal que:

$$-1 < q < 1$$

Assim, *q^n é um número cada vez mais próximo de zero à medida que o expoente* n *aumenta.*

Então, quando calculamos S_n para *n suficientemente grande*, temos:

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$ (esse é o valor para o qual a soma converge).

Assim:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{a_1}{1 - q};\ -1 < q < 1$$

Exemplo 23

Vamos calcular o valor de $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

Queremos somar os "infinitos" termos da P.G. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$.

Trata-se de uma série geométrica *convergente*, pois $q = \frac{1}{3}$ $(-1 < q < 1)$.

Assim, a soma converge para:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow S = \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

Exemplo 24

Vamos resolver a equação $x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{64} + \ldots = \frac{4}{3}$.

O 1º membro da equação representa a soma dos termos da P.G. infinita $\left(x, \frac{-x^2}{4}, \frac{x^3}{16}, \ldots\right)$, cujo valor é $\frac{a_1}{1 - q} = \frac{x}{1 - \left(-\frac{x}{4}\right)} = \frac{x}{1 + \frac{x}{4}}$.

Daí:

$$\frac{x}{1 + \frac{x}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 2$$

Notemos que, para $x = 2$, temos $q = -\frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$ $(-1 < q < 1)$.

Exemplo 25

Vamos obter a fração geratriz da dízima 0,272727...
Seja $x = 0{,}272727\ldots$ Podemos escrever x na forma:

$$x = 0{,}27 + 0{,}0027 + 0{,}000027 + \ldots$$

Observemos que x representa a soma dos termos de uma P.G. infinita, cujo 1º termo é $a_1 = 0{,}27$ e a razão é $q = \frac{0{,}0027}{0{,}27} = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

Assim, a série converge para:

$$x = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0{,}27}{1 - 0{,}01} \Rightarrow x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Exercícios

78 Calcule o valor de cada uma das seguintes somas:

a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$

b) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \ldots$

c) $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots$

79 Qual é o valor de $S = 2 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \frac{1}{4} - \frac{1}{81} + \ldots$?

80 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots = 6$

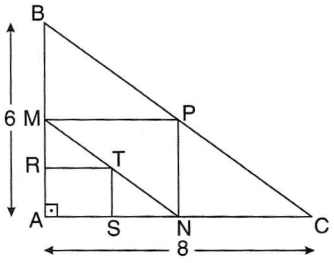
b) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 1$

81 Encontre a fração geratriz de cada uma das seguintes dízimas periódicas:

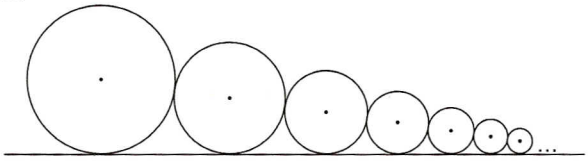
a) 0,444... b) 1,7777... c) 0,434343... d) 1,0222...

82 (UF-RN) Qual é a soma dos termos da progressão geométrica infinita 2, $\sqrt{2}$, 1, ...?

83 Seja ABC o triângulo retângulo da figura. Por M e N, pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, construímos o retângulo AMPN. Unindo M e N, construímos o triângulo retângulo AMN; por R e S, pontos médios de $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$, respectivamente, construímos o retângulo ARTS e assim indefinidamente. Determine a diferença entre a soma das áreas de todos os triângulos assim construídos e a soma das áreas de todos os retângulos assim construídos.



84 O logotipo de uma empresa é uma seqüência infinita de círculos tangentes externamente entre si, como mostra a figura abaixo:



Se o raio de um círculo qualquer é $\frac{3}{4}$ do raio do círculo anterior, e o raio do maior círculo é r, calcule, em função de r:

a) a soma dos perímetros de todos os círculos construídos.
b) a soma das áreas de todos os círculos construídos.

Testes de vestibulares

1 (Uneb-BA) A seqüência $(3^{x+1}, 3^{x+2}, 3^{x+3}, \ldots)$:

a) é uma progressão aritmética de razão 1.
b) é uma progressão aritmética de razão 3.
c) é uma progressão geométrica de razão x.
d) é uma progressão geométrica de razão 3.
e) não é progressão aritmética nem geométrica.

2 (UF-SE) Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ a seqüência dos números naturais pares e $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ a seqüência dos números naturais ímpares. A seqüência $(c_1, c_2, c_3, \ldots)$ com $c_n = a_n + b_n$, com n natural não nulo, é uma progressão:

a) geométrica de razão 2.
b) aritmética de razão 2.
c) geométrica de razão 4.
d) aritmética de razão 4.
e) aritmética de razão 5.

3 (Vunesp-SP) Numa cerimônia de formatura de uma faculdade, os formandos foram dispostos em 20 filas de modo a formar um triângulo, com 1 formando na primeira fila, 3 formandos na segunda, 5 na terceira e assim por diante, constituindo uma progressão aritmética. O número de formandos na cerimônia é:

a) 400 c) 420 e) 840
b) 410 d) 800

4 (UF-PB) Seja (x, y, z) uma progressão geométrica de razão r, com $x \neq y$ e $x \neq 0$. Se (x, 2y, 3z) é uma progressão aritmética, então r é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ e) 4
b) $\frac{1}{3}$ d) 2

5 (Mackenzie-SP) Se numa progressão geométrica de termos positivos o terceiro termo é igual à metade da razão, o produto dos três primeiros termos é igual a:

a) 8 c) 4 e) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{16}$

6 (Famec-PR) Segundo cálculos do Serviço Social Autônomo Paranacidade, baseados em dados do IBGE, a população do município de Curitiba, no início de 1999, era de cerca de 1 milhão e meio de habitantes. Sabe-se também que a taxa anual de crescimento dessa população é de 2,3%. Se essa taxa se mantiver constante, pode-se concluir que, no início do ano 2010, a população do município de Curitiba, em milhões de habitantes, será de:

a) $1{,}5 \cdot 12 \cdot (0{,}23)$ d) $1{,}5 \cdot (1{,}23)^{12}$

b) $1{,}5 \cdot (1{,}023)^{11}$ e) $1{,}5 \cdot (2{,}3)^{11}$

c) $1{,}5 \cdot (1{,}23)^{11}$

7 (Unifor-CE) Subtraindo-se um mesmo número de cada termo da seqüência (13, 7, 5) obtém-se uma progressão geométrica. A razão dessa progressão é:

a) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{3}$

8 (Ucsal-BA) Uma pessoa tomou emprestada a quantia de R$ 1 200,00 e vai devolvê-la com juros que totalizam R$ 750,00. O pagamento será feito em 10 prestações, sendo cada uma delas maior que a anterior em R$ 10,00. O valor da primeira prestação deverá ser:

a) R$ 130,00 d) R$ 160,00

b) R$ 140,00 e) R$ 170,00

c) R$ 150,00

9 (Unirio-RJ) Considere uma progressão geométrica de 5 termos e razão positiva, em que a soma do primeiro com o terceiro termo é $\frac{9}{2}$ e o produto de seus termos é 1024. O produto dos três termos iniciais dessa progressão é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ c) $2\sqrt{2}$ e) $8\sqrt{2}$

b) 1 d) $4\sqrt{2}$

10 (U. F. Viçosa-MG) Se x, y e z são números inteiros e estão, nesta ordem, em progressão aritmética, então o produto $2^x\ 2^y\ 2^z$ vale:

a) 4^y c) 8^y e) 8^x

b) 6^y d) 6^z

11 (Unirio-RJ) Um agricultor estava perdendo a sua plantação, em virtude da ação de uma praga. Ao consultar um especialista, foi orientado para que pulverizasse, uma vez ao dia, uma determinada quantidade de um certo produto, todos os dias, da seguinte maneira:

primeiro dia: 1,0 litro;
segundo dia: 1,2 litro;
terceiro dia: 1,4 litro;
... e assim sucessivamente.

Sabendo-se que o total de produto pulverizado foi de 63 litros, o número de dias de duração desse tratamento nessa plantação foi de:

a) 21 c) 25 e) 30

b) 22 d) 27

12 (U. F. Uberlândia-MG) Sejam a_1, a_2, a_3 números reais cuja soma é igual a 38. Sabendo-se que $a_1 - 2$, a_2, a_3 estão, nessa ordem, em progressão aritmética de razão 6, determine o maior desses números.

a) 6 c) 18 e) 32

b) 12 d) 24

13 (Unifor-CE) O número real x que satisfaz a sentença $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{8}{x^4} + \ldots = 1$ é:

a) 1 c) 3 e) 5

b) 2 d) 4

14 (Fuvest-SP) A soma das frações irredutíveis, positivas, menores do que 10, de denominador 4, é:

a) 10 c) 60 e) 100

b) 20 d) 80

15 (Fatec-SP) Se o lado, a altura e a área de um triângulo eqüilátero formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, então a medida do lado desse triângulo é um número:

a) irracional.
b) racional.
c) inteiro.
d) real e maior que $\sqrt{3}$.
e) real e compreendido entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

16 (FEI-SP) Um trabalho escolar de 150 páginas deverá ser impresso em uma impressora que apresenta os seguintes problemas: nas páginas 6, 12, 18, ... (múltiplos de 6) o cartucho de tinta amarela falha e nas páginas 8, 16, 24, ... (múltiplos de 8) falha o cartucho de tinta azul. Supondo-se que em todas as páginas do trabalho sejam necessárias as cores amarela e azul, quantas páginas serão impressas sem falhas?

a) 105 c) 113 e) 120

b) 107 d) 116

17 (UF-RS) Considere esta progressão geométrica: 3; 0,3; 0,03; 0,003; ...
Os logaritmos decimais de cada um desses números, na ordem em que estão dispostos, formam uma:

a) progressão geométrica de razão 0,01.
b) progressão geométrica de razão 0,1.
c) progressão aritmética de razão 0,1.
d) progressão aritmética de razão –1.
e) progressão geométrica de razão –1.

18 (Unaerp-SP) Seja S a soma dos termos de uma progressão aritmética com um número par de termos, todos inteiros. Se o primeiro termo é –2, e o último é 23, pode-se afirmar que S é um número inteiro divisível por:

a) 2 c) 5 e) 9
b) 4 d) 7

19 (UPE-PE) A soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente com uma infinidade de termos é 6. Se a soma dos dois primeiros termos é $\frac{9}{2}$, podemos afirmar que a razão é:

a) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{2}{5}$

20 (UFF-RJ) São dadas duas progressões: uma aritmética (P.A.) e outra geométrica (P.G.).
Sabe-se que:

- a razão da P.G. é 2;
- em ambas o primeiro termo é igual a 1;
- a soma dos termos da P.A. é igual à soma dos termos da P.G.;
- ambas têm 4 termos.

Pode-se afirmar que a razão da P.A. é:

a) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{6}$ e) $\frac{11}{6}$
b) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{9}{6}$

21 (Unirio-RJ) O professor G. Ninho, depois de formar uma progressão aritmética de 8 termos, começando pelo número 3 e composta apenas de números naturais, notou que o 2º, o 4º e o 8º termos formavam, nessa ordem, uma progressão geométrica. G. Ninho observou ainda que a soma dos termos dessa progressão geométrica era igual a:

a) 42 c) 32 e) 24
b) 36 d) 28

22 (UFR-RJ) Observe a seqüência abaixo.

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \frac{1}{8} + \frac{1}{81} + \frac{1}{16} - \frac{1}{243} \ldots$$

O valor da soma S é:

a) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{14}{3}$
b) $\frac{14}{9}$ d) $\frac{7}{2}$

23 (Fuvest-SP) Uma P.A. e uma P.G. têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da P.A. excede o segundo termo da P.G. em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:

a) 10 d) 16
b) 12 e) 18
c) 14

24 (Mackenzie-SP)

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = 11x - 5$$

Supondo $0 < x < 1$, o produto dos valores de x que verificam a igualdade acima é:

a) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{5}{12}$
b) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{4}$

25 (Fuvest-SP) A seqüência a_n é uma P.A. estritamente crescente, de termos positivos. Então, a seqüência $b_n = 3^{a_n}$, $n \geq 1$, é uma:

a) P.G. crescente.
b) P.A. crescente.
c) P.G. decrescente.
d) P.A. decrescente.
e) seqüência que não é uma P.A. e não é uma P.G.

26 (PUC-SP) A soma dos n primeiros termos da seqüência $(6, 36, 216, \ldots, 6^n, \ldots)$ é 55 986. Nessas condições, considerando log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, o valor de log n é:

a) 0,78 d) 1,56
b) 1,08 e) 1,68
c) 1,26

Desafios

1 (UnB-DF) Conta uma lenda que o rei de certo país ficou tão impressionado ao conhecer o jogo de xadrez que quis recompensar seu inventor, dando-lhe qualquer coisa que ele pedisse. O inventor, então, disse ao rei: "Dê-me simplesmente 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda casa, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta e assim sucessivamente, até a 64ª casa do tabuleiro". O rei considerou o pedido bastante simples e ordenou que fosse cumprido. Supondo que um grão de trigo tem massa igual a 0,05 g e que a produção mundial de trigo em 1997 foi de 560 milhões de toneladas, julgue se os itens abaixo são verdadeiros ou falsos:

a) O número de grãos de trigo devido ao inventor apenas pela 11ª casa do tabuleiro é menor que 1 000.

b) Até a 30ª casa, seriam devidas ao inventor mais de 50 toneladas de grãos.

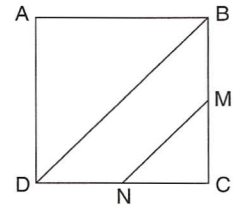
c) A quantidade de trigo devida apenas pela 31ª casa corresponde à quantidade recebida até a 30ª casa acrescida de um grão.

d) Seriam necessárias mais de 1 000 vezes a produção mundial de trigo de 1997 para recompensar o inventor.

2 (UF-RJ, adaptado) Mister MM, o Mágico da Matemática, apresentou-se diante de uma platéia com 50 fichas, cada uma contendo um número. Ele pediu a uma espectadora que ordenasse as fichas de forma que o número de cada uma, excetuando-se a primeira e a última, fosse a média aritmética do número da anterior com o da posterior. Mister MM solicitou a seguir à espectadora que lhe informasse o valor da soma da décima sexta com a trigésima quinta ficha, obtendo como resposta, 149. Para delírio da platéia, Mister MM adivinhou o valor da soma de todos os números que constavam nas fichas. Determine você também esse valor.

3 (Vunesp-SP) A área do quadrado ABCD da figura é 1. Nos lados $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$ tomam-se, respectivamente, os pontos M e N de modo que $\overline{MN}$ seja paralelo à diagonal $\overline{DB}$.

Se as áreas do triângulo CMN, do trapézio MNDB e do triângulo ABD formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, calcule a medida de $\overline{MC}$.



4 (Fuvest-SP) 500 moedas são distribuídas entre três pessoas A, B e C, sentadas em círculo, da seguinte maneira: A recebe uma moeda, B duas, C três, A quatro, B cinco, C seis, A sete, e assim por diante, até não haver mais moedas suficientes para continuar o processo. A pessoa seguinte, então, receberá as moedas restantes.

a) Quantas foram as moedas restantes e quem as recebeu? (Deixe explícito como você obteve a resposta.)

b) Quantas moedas recebeu cada uma das três pessoas?

Respostas dos exercícios e testes

1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

EXERCÍCIOS

1 $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2 $D \cap E = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \leq x \leq 10\}$

3 b, c, d, f, i

4 a) -2 b) -13 c) 0

5 a) $a + b = 0$ b) $c \neq \pm d$

6 a) V b) F c) V d) V e) V f) F

7 $\frac{9}{10}$ ou 0,9

8 a) $0,\overline{3}$ b) 0,4 c) 0,04 d) $0,0\overline{3}$ e) 5,6 f) $0,6\overline{3}$

9 a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{16}{9}$ c) $\frac{20}{11}$ d) $\frac{163}{9}$ e) $\frac{116}{495}$ f) $\frac{4097}{3300}$

10 19

11 $\frac{74}{15}$ ou $4,9\overline{3}$

12 $0,\overline{6}$

14 13; $0,5416\overline{6}$

15 a) $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{17}{18} < \frac{18}{19} < 1 < 1,\overline{1} < \frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{2}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{3} < \frac{4\sqrt{3}}{7} < \frac{98}{99} < \frac{\pi}{\sqrt{10}} < 0,\overline{9} =$

$= 1 < \frac{99}{98} < \frac{\sqrt{10}}{3}$

16 $0,\overline{9}$ e 1; $\frac{98}{99}$ e $\frac{99}{98}$

17 a) 9 b) $\frac{4}{55} = 0,0\overline{72}$

18 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{11}$

19 $2,\overline{72} = \frac{30}{11}$

20 $1,\overline{36}$; -3

21 Transformar um número irracional em racional.

22 a) sim; $A = -14$ b) racional; $B = -0,4$

23 Todas as afirmações são verdadeiras.

25 O menor valor de p é 1571 e o maior, 1581.

26 Impossível.

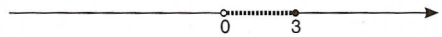
28 12345679

29 47

30 a)

b)

c)



d)

e)

f)

31 a) $G = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < -\frac{5}{3}\right\}$

b) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

c) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

d) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\sqrt{3} \text{ ou } x > 0\}$

e) $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

32 $L \cup M = \mathbb{R}$; $L \cap M =]-3, -1[\cup [2, 3[$

33 $S \cap T = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

TESTES DE VESTIBULARES

1 c **4** c **7** b **10** a **13** a

2 c **5** d **8** b **11** e **14** e

3 b **6** e **9** c **12** e

2 FUNÇÕES

EXERCÍCIOS

1 a) sim; $t = 15n$ b) 5 horas c) não; faltarão 3 páginas

2 a) R$ 14,00 b) $y = 14 + 2x$ c) 28

3 a)

Lado (m)	Área (m^2)
2	84
3,5	92,25
5	105
6	116

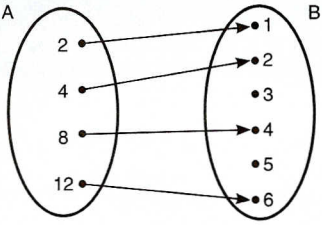
b) $A(x) = 80 + x^2$ c) 144 m^2

4 a) 23 ℓ/min b) 3h20 min c) $v(t) = 4600 - 23t$, com $t \leq 200$

5 a) 200 e 800 b) $n(t) = 50 \cdot 2^t$ c) 8×10^8 bactérias

6 Os esquemas *a* e *c* representam funções, pois a cada elemento de *A* corresponde um único elemento em *B*.
O esquema *b* não representa função, pois o elemento 2 de *A* foi associado a dois valores em *B*, 1 e 2.
O esquema *d* não representa função, pois o elemento 1 de *A* não está associado a nenhum elemento de *B*.

7 sim



8 a) sim
b) sim
c) Não, pois x = 2 deveria estar associado a y = 5, mas 5 ∉ B.

9 a) 10 e 34
b) Não, pois –1 não pertence ao domínio ℕ.

10 a) 3 b) $\frac{9}{4}$ c) 6 d) $8 - 2\sqrt{5}$

11 a) –2 b) 8 c) –1

12 $\frac{26}{9}$

13 a) 64 b) 51

14 a) –6 b) 1 c) $x = \frac{6}{5}$

15 a) 90 b) 50

16 a) 25000 b) 9000; 15000 c) daqui a 8 anos

17 a) 300; 525; 1200 b) janeiro e maio

18 a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 2x$
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = x^2$
c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$h(x) = 3x - 1$

19 a) 0 b) 3

20 a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}$
c) $\mathbb{R} - \{1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$

21 a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x \neq \frac{2}{3}\right\}$
b) $\mathbb{R}^*$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$

22 $\mathbb{R}$

23 a) população (dependente) e tempo (independente)
b) 76405406 habitantes
c) sim
d) Não, tornou-se 2,89 vezes maior.

24 a) V; a cada ano corresponde um único número de declarações
b) V; a função é crescente
c) V; o acréscimo foi de 1,66 milhão, aproximadamente
d) F; chegará aos 21,027 milhões

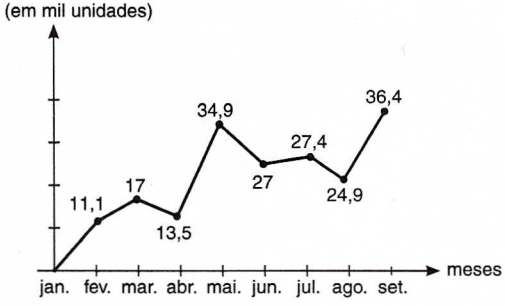
25 a) De 1991 a 1992, de 1993 a 1996, de 1998 a 1999.
b) melhor: 1996; 86%
pior: 2001; 42%
c) 1992, 1994, 1995, 1996, 1997, 1999 e 2000
d) Empatou três e perdeu dois jogos.

26 a) V b) V
c) F; a diferença aumentou no decorrer do tempo
d) F; em 31/7 a situação estava pior

27 a) março, abril, maio, junho
b) mínimo: agosto; máximo: março
c) de maio a junho; 5800 motos
d) 1º trimestre: aproximadamente 172000 motos
2º trimestre: aproximadamente 184000 motos

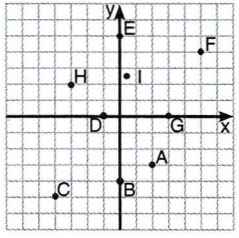
28 a) US$ 29,20 b) US$ 30,65
c) 10h15min e 10h30min; 10h45min e 11h45min; 11h45min e 12h; 12h15min e 12h30min
d) Sim. 10% → 2,745 e 5% → 1,3725. Assim, um acréscimo de 5% levaria a cotação para US$ 28,82.

29 a) janeiro a março; abril a maio; julho a agosto
b) setembro; 36400
c)



30 A(4, 2), B(–4, 6), C(–5, –3), D(4, –5), E(0, 4), F(–3, 0), G(0, –6), H(5, 0), I(0, 0)

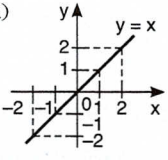
31



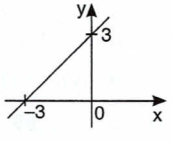
32 $x = -\frac{1}{5}$ e $y = \frac{13}{5}$

33 2

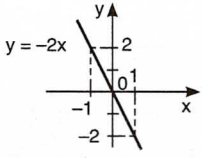
34 a)



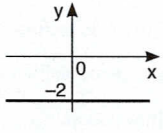
b)



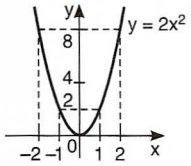
c)



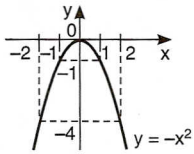
d)



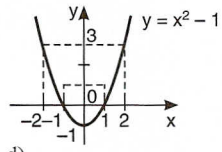
35 a)



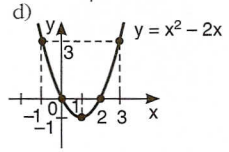
b)



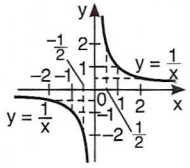
c)



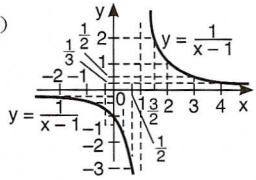
d)



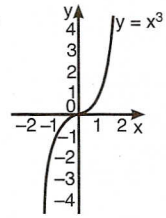
36 a)



b)

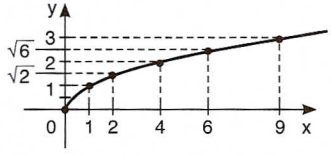


c)

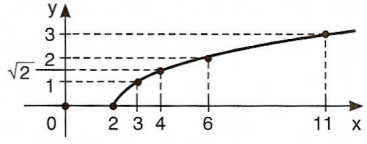


37 a) Trace uma reta vertical por x = 1, por exemplo. Note que ela encontra o gráfico duas vezes.
b) O número x = 3 está associado a infinitos valores de *y*.

38 a)



b)



39 a) {–2, 0, 2}
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$
c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y = 1 \text{ ou } y \geq 2\}$
d) $\mathbb{R}$
e) $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ ou } y > 4\}$
f) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

40 a) decrescente para $x \leq 2$ e crescente para $x \geq 2$
b) crescente para $x \leq 0$, constante para $0 \leq x \leq \frac{9}{2}$ e decrescente para $x \geq \frac{9}{2}$
c) crescente para todo $x \in \mathbb{R}$
d) crescente para $x \geq 0$ e decrescente para $x \leq 0$

41 a) F; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$
b) F; $f(4) < 0$ e $f(-1) > 0$
c) V
d) V
e) F; $f(-2) > 0$ e $f(2) > 0$, logo $f(-2) + f(2) > 0$

42 a) $f(x) > 0$ quando $x < 4$
$f(x) < 0$ quando $x > 4$
raiz: 4
b) $f(x) > 0$ quando $0 < x < 2$
$f(x) < 0$ quando $x < 0$ ou $x > 2$
raízes: 0 e 2
c) $f(x) > 0$ quando $x < -5$ ou $-3 < x < 2$ ou $x > 6$
$f(x) < 0$ quando $-5 < x < -3$ ou $2 < x < 6$
raízes: –5, –3, 2, 6
d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$. Não há raízes reais.

43 a) I c) 0 e) I
b) P d) P

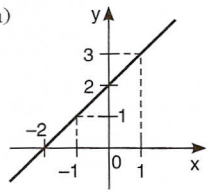
TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**5**	e	**9**	d	**13**	c	**17**	d
2	d	**6**	e	**10**	e	**14**	d		
3	d	**7**	a	**11**	d	**15**	a		
4	d	**8**	d	**12**	c	**16**	a		

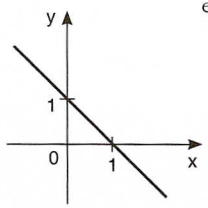
3 FUNÇÃO AFIM

EXERCÍCIOS

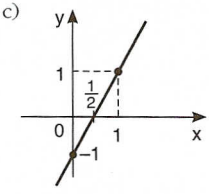
1 a)



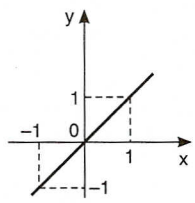
b)



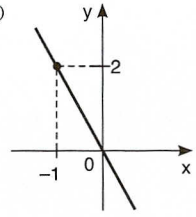
c)



d)

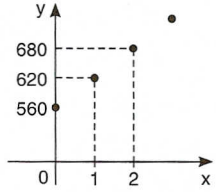


e)



2 a) R$ 740,00
b) y = 560 + 60x

c)



3 112,5 kg **4** –8

5 a) $v = \frac{5m}{4}$ b) 24 g **6** 5

7 a) $v(t) = 5{,}2 + 0{,}18t$ b) 60 meses

8 a) 7,2 b) $n(x) = 10 - 0{,}4x$ c) 5

9 P(1000, 30) **10** $\frac{1}{2}$

11 a) a = 2 e b = –5
b) $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$
c) $a = \sqrt{2}$ e b = 0
d) a = –2 e b = 1

12 a) R$ 160 000,00 b) y = 4x + 40 000

13 a) S = {34}
b) S = ℝ
c) $S = \left\{\frac{22}{3}\right\}$
d) $S = \left\{\frac{157}{22}\right\}$
e) S = {12}
f) S = ∅

14 11 **15** R$ 7 000,00

16 a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 3 d) $-\frac{1}{2}$

17 y = –2x + 6 **18** R$ 3 600,00

19 crescentes: a, b, e
decrescentes: c, d, f

20 a) m > –2: crescente
m = –2: constante
m < –2: decrescente
b) m < 4: crescente
m = 4: constante
m > 4: decrescente

21 a) $y > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$
$y < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$
b) $y > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$
$y < 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$
c) $y > 0 \Leftrightarrow x > 0$
$y < 0 \Leftrightarrow x < 0$
d) $y > 0 \Leftrightarrow x < 6$
$y < 0 \Leftrightarrow x > 6$

22 a) x > –1 b) $x > \frac{1}{2}$ c) x = –1 ou $x = \frac{1}{2}$

23 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{9}{2}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{23}{18}\right\}$
c) S = {x ∈ ℝ | x < –1}
d) S = {x ∈ ℝ | x ⩽ –2}
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{51}{113}\right\}$

24 a) A segunda opção.
b) A partir de 1h16min mensais de uso.

25 a) s(n) = –732 + 40n
b) em 23 meses
c) 19 meses

26 1 143 peças

27 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\right\}$
b) S = {x ∈ ℝ | –1 < x < 3}
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x < 4\right\}$
d) S = {x ∈ ℝ | x > 1}

28 a) S = {x ∈ ℝ | 1 ⩽ x ⩽ 2} b) S = ∅

29 a) L(x) = 3x + 200 b) 34 ⩽ x < 67

30 15 meses

31 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{3}{5}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{6}\right\}$

32 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{3}{4} \text{ ou } -\frac{2}{5} < x < 2\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3} \text{ ou } x > 6\right\}$
c) S = ∅
d) $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

33 2; 1 e 2

34 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -\frac{1}{2}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > \frac{3}{2}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} < x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 4\right\}$

35 a) S = {x ∈ ℝ | x > 1}
b) S = {x ∈ ℝ | 0 < x < 1 ou x > 2}
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

36 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 < x < 1\right\}$

37 S = {x ∈ ℝ | 1 ⩽ x ⩽ 4}

38 D = {x ∈ ℝ | –2 < x < 0 ou x > 2}

39 S = {x ∈ ℝ | x < –1}

TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**5**	e	**9**	e	**13**	c
2	a	**6**	b	**10**	d	**14**	b
3	a	**7**	d	**11**	e	**15**	c
4	a	**8**	a	**12**	b	**16**	d

17 a) V; b) V; c) V; d) F; e) V

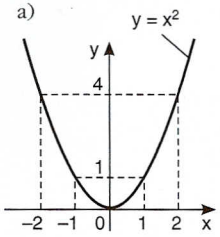
18 c **19** a

4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

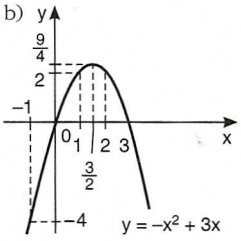
EXERCÍCIOS

1 a) a = 1, b = –3 e c = 10
b) a = –2, b = –5 e c = 1
c) a = 3, b = 0 e c = –9
d) a = 1, b = 2 e c = 0
e) $a = 3$, $b = -2\sqrt{3}$ e c = 1
f) a = 2, b = 0 e c = –14

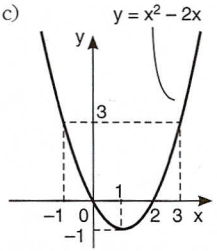
2 a)



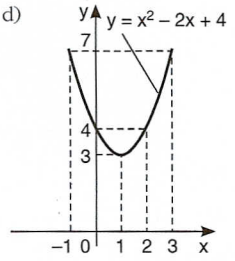
b)



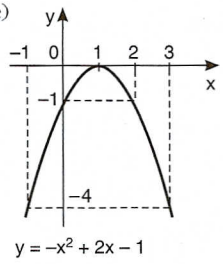
c)



d)



e)



3 a) 2 e $\frac{1}{3}$ d) 0 e $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$ e 2 e) Não há.

c) $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

4 a) $S = \left\{\frac{3}{2}, 5, 2\right\}$ c) $S = \{2\sqrt{3}\}$

b) $S = \{-3, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ d) $S = \{-11, 11\}$

5 (x = 2 e y = 3) ou (x = 3 e y = 2)

6 1,5 **7** 4

8 a) V; isso ocorre às 19 h

b) F; o número de bactérias é 13 590

c) F; foram coletadas 100 bactérias

9 $m < \frac{9}{4}$ **10** $p > \frac{9}{8}$

11 $\Delta = 4 - 4 \cdot m \cdot \frac{1}{m} = 4 - 4 = 0$

12 $p = \frac{1}{3}$ → raiz é –2

p = –1 → raiz é 0

13 a) $y = \frac{x^2 - x}{2}$ b) 2 415 c) 30

14 a) $\frac{5}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) –5

15 a) $\frac{29}{4}$ b) $-\frac{29}{2}$ c) $\frac{155}{8}$

16 a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$

17 90 **18** m = –1

19 m = –5 **20** p = 3

21 a) valor mínimo: $-\frac{25}{8}$

ponto de mínimo: $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

b) valor máximo: 12

ponto de máximo: (2, 12)

c) valor mínimo: 0

ponto de mínimo: (1, 0)

d) valor máximo: $\frac{7}{18}$

ponto de máximo: $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{18}\right)$

22 a) V b) V

c) F; Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 100\}$ d) V

e) F; o custo total é R$ 50 000,00

23 20 m **24** R$ 2 500,00

25 a) $p(x) = -\frac{1}{4}x + 60$ b) R$ 40,00

26 a) $L(x) = x^2 + 120x - 2\,700$

b) R$ 500,00 c) 60; R$ 900,00

27 a) F; empresa A → R$ 880,50

empresa B → R$ 750,00

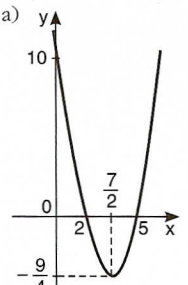
b) V; o vértice da função $-0{,}5n^2 + 35n + 250$ é: (35; 862,50)

c) V; para 50 passageiros *A* cobra R$ 880,50 e *B*, R$ 750,00

d) V; *A* levará 35 passageiros e *B* levará 17

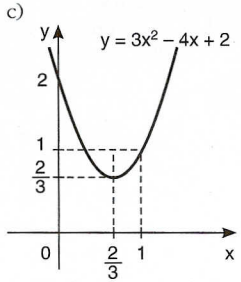
28 x = 30 m; y = 90 m

29 a)



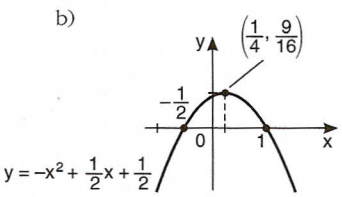
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{4}\right\}$

c)



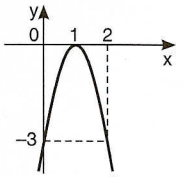
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{2}{3}\right\}$

b)



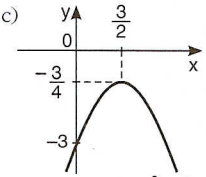
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{9}{16}\right\}$

30 a)



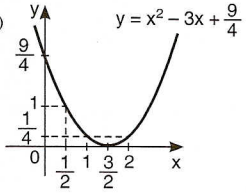
$y = -3x^2 + 6x - 3$

c)



$y = -x^2 + 3x - 3$

b)



31 3,5 m

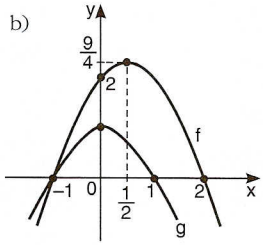
32 $y = -x + 3$

33 $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$

34 $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

35 a) $y = \frac{3x}{2}$ b) 6º dia; 9 cm

36 a) –1 e 1 b)



37 a) $y > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ou $x > 2$

$y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$

b) $y > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

$y < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 3$

c) $y > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$

$\nexists$ x tal que $y < 0$

d) $y > 0 \Leftrightarrow -5 < x < 3$

$y < 0 \Leftrightarrow x < -5$ ou $x > 3$

38 a) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $y < 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y > 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, y > 0$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$

d) $y > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 0$

$y < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

39 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 3\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$

d) $\mathbb{R}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$

40 a) $S = \varnothing$

b) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \sqrt{2}\}$

e) $S = \varnothing$

41 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0 \text{ ou } x \geq 8\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < -7 \text{ ou } x > 7\}$

c) $S = \{0\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < -3 \text{ ou } x > 7\}$

42 7

43 a) De 1990 a 2001. b) A partir de 2012.

44 a) 220 b) $10 \leq x \leq 20$

45 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 0 \text{ ou } 0 < x \leq 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 4\}$

46 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | -4 < x < -3 \text{ ou } 3 < x < 4\}$

47 $0 < x < 2$

48 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{-3}{2} < x < \frac{-1}{2} \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3 \text{ ou } x \geq 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$

49 $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{-1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 3\right\}$

50 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{-5}{4} \text{ ou } -\frac{1}{2} < x < 1 \text{ ou } x > 2\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < -3 \text{ ou } x \geq 0\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{2}{3}\right\}$

51 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ ou } 0 \leq x < 1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

52 a) (7, 24) b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 5 \text{ e } x \neq 1\}$

53 $\{m \in \mathbb{R} | -2 < m < 2\}$

54 $\{m \in \mathbb{R} | m < -1\}$

55 15

56 $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

57 a) $\left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{-1}{6} \text{ ou } x > 1\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{-5}{3} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 7\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} | x < -3 \text{ ou } 2 < x \leq 5\}$

58 $\{a \in \mathbb{R} | -6 < a < 6\}$

TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**6**	d	**11**	a	**16**	c	**21**	c
2	c	**7**	c	**12**	e	**17**	b	**22**	a
3	a	**8**	d	**13**	e	**18**	c		
4	e	**9**	e	**14**	e	**19**	e		
5	c	**10**	b	**15**	d	**20**	c		

5 FUNÇÃO MODULAR

EXERCÍCIOS

1 a) 5 b) –7 c) 1 d) $\sqrt{2}$

2 a) 6 b) 2 c) $\frac{5}{3}$

3 a) R$ 400,00; R$ 755,00

b) $g(x) = \begin{cases} 80x, \text{ se } 0 \leq x \leq 7 \\ 65x + 105, \text{ se } x > 7 \end{cases}$

4 a) R$ 12,10

b) $p(x) = \begin{cases} 0{,}10x, \text{ se } 0 < x \leq 100 \\ 3 + 0{,}07x, \text{ se } x > 100 \end{cases}$

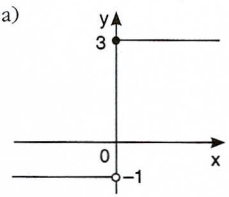
5 a) –9 b) $2 + 5\sqrt{2}$ c) $\frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$

6 a) R$ 681,00; R$ 918,00

b) $p(x) = \begin{cases} 30x, \text{ se } 1 \leq x \leq 20 \\ 27x + 60, \text{ se } 21 \leq x \leq 30 \\ 24x + 150, \text{ se } x > 30 \end{cases}$

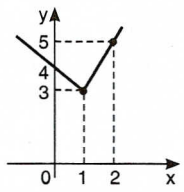
c) 27

7 a)



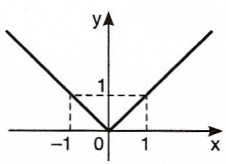
Im = {–1, 3}

c)



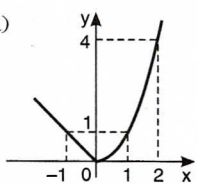
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$

b)



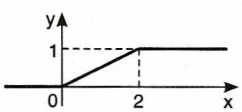
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

8 a)



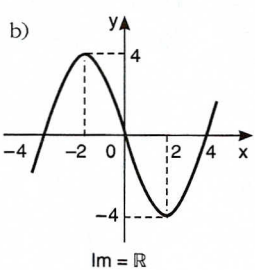
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

c)



Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 1\}$

b)

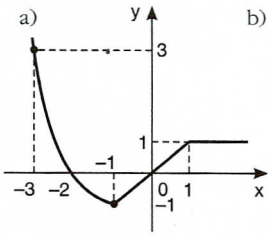


Im = $\mathbb{R}$

9 a) $y = \begin{cases} 2, \text{ se } x \leq 0 \\ 2 - x, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 1 + x, \text{ se } x < 1 \\ -x + 2, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$

10 a)



b) Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$

11 a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{3}$

12 a) 7 b) 3 c) 0 d) 0,2 e) $2 - \sqrt{3}$ f) $-6 + 2\pi$ g) 0

13 0 **14** 3

15 a) 10 b) –7 c) 3x – 5 d) 3x – 1

16 a) 0 b) 1 c) 63 d) 3

17 –1

18 a) 4 ppm b) 4,8 ppm c) 10 anos d) $C(t) = 4 + 0{,}05t^2$

19 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

20 a) 8 b) 6 c) 2 **21** –x

22 a) S = {–2, 2} b) S = {–1, 3} c) $S = \{1, -1, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

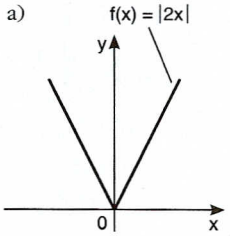
23 a) f(x) = 3x + 5 b) $f \circ f(x) = 9x + 20$

24 g(x) = x – 2

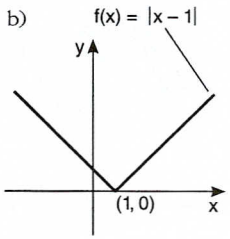
25 a) $s = 65 + \frac{43p + 7{,}5}{8}$ b) 68 centenas

26 15

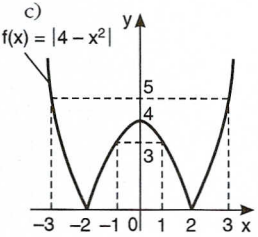
27 a)



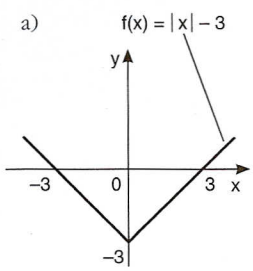
b)



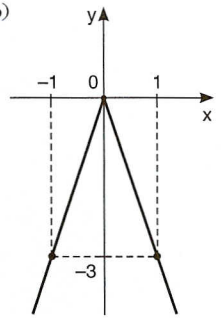
c)



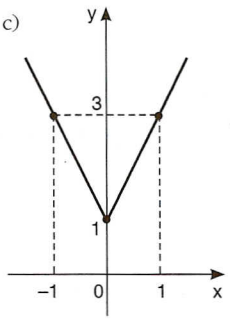
28 a)



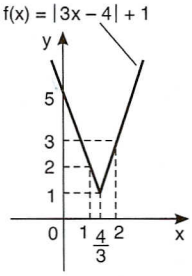
b)



c)

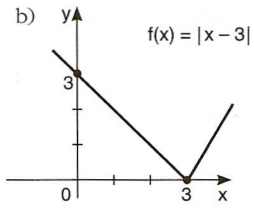


d)

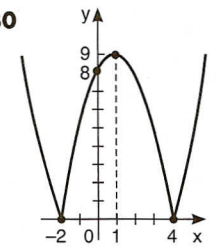


29 a) $2\sqrt{2}$

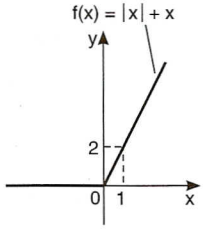
b)



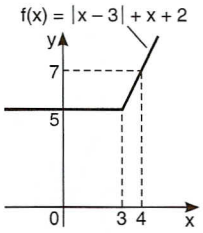
30



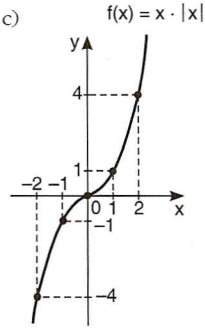
31 a)



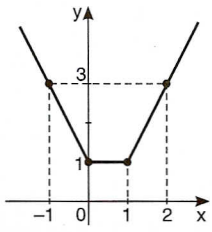
b)



c)

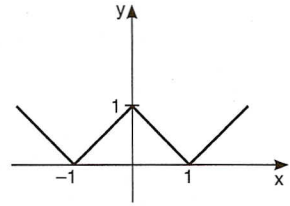


32



33 a) F; $f(-4) = |1 - |-4|| = |1 - 4| = 3$

b) V; veja o gráfico de f:



c) F; veja o gráfico

d) V; as soluções são: 0, –2 e 2

34 a) $S = \{-4, 4\}$ c) $S = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $S = \{2, -1\}$ d) $S = \varnothing$

35 a) $S = \left\{\frac{16}{5}, 6\right\}$ c) $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

b) $S = \{1, 3\}$ d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

36 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

37 250º e 50º dias

38 $S = \{-6, -1, 0, 1, 6\}$

39 5

40 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{13}{3}\right\}$

41 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

42 a) $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

43 a) 20 e 30

b) no dia 25; 300 pessoas

c) do dia 1º ao dia 22 e nos dias 28, 29 e 30

44 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**6**	a	**11**	d	**16**	c	**21**	e
2	b	**7**	e	**12**	a	**17**	c		
3	c	**8**	c	**13**	c	**18**	d		
4	b	**9**	b	**14**	a	**19**	a		
5	c	**10**	b	**15**	a	**20**	b		

6 FUNÇÃO EXPONENCIAL

EXERCÍCIOS

1 a) 16 c) –16 e) –1

b) –16 d) 1 f) $\frac{9}{25}$

2 $E = \frac{9}{4}$

3 a) 5 832 b) 12 321 c) 2 401

4 a) $\frac{1}{8}$ c) $-\frac{1}{125}$ e) $\frac{1}{27}$
b) 2 d) 100 f) 81

5 a) 4 b) 19 c) 6

6 1 **7** $\frac{82}{3}$

8 $\left\{a \in \mathbb{R} \mid a > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

9 a) 8 b) 2 c) 1

10 a) $-\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$

11 $1 < \sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{6} < \sqrt{5}$

12 a) $3\sqrt{7}$ b) 2 c) $\sqrt{\frac{6}{5}}$ d) 2

13 a) $3 + 2\sqrt{2}$ c) 9
b) $5 - 2\sqrt{6}$ d) $20 + 14\sqrt{2}$

14 a) 7 b) 2

15 a) 3 b) $2 \cdot \sqrt[4]{2}$ c) $\sqrt[6]{32}$

16 a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

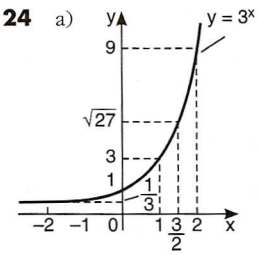
17 a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ d) $\frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{6}$

18 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **19** 1 **20** $\frac{14 - 7\sqrt{3}}{3}$

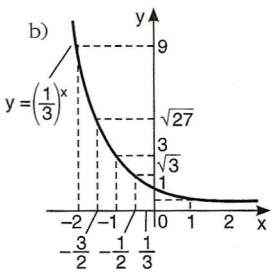
21 a) 27 c) $\frac{1}{16}$ e) 100
b) 16 d) $\frac{1}{3}$

22 2^{22} **23** a) 0,44 m² b) 22,4 kg

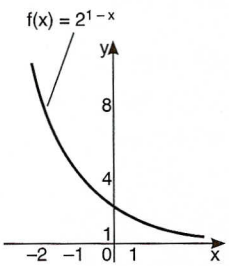
24 a)



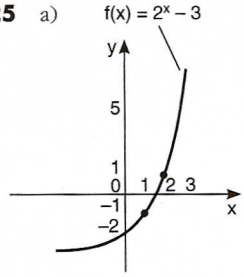
b)



c)

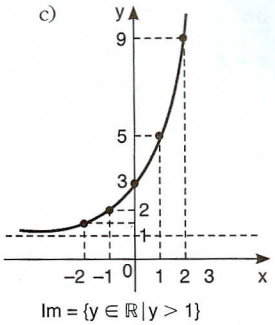


25 a)



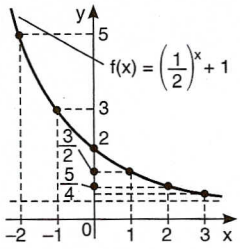
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y > -3\}$

c)



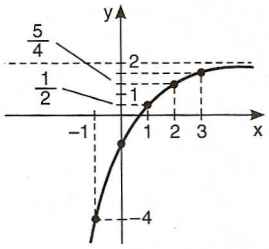
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

b)



Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

d)



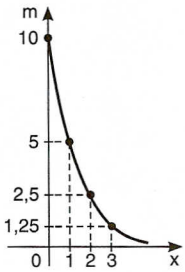
Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 2\}$

26 p = 1 e q = 2

27 a) a = 1 e b = 2
b) Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$ c) $\frac{3}{2}$

28 2^{30} **29** a) 552 b) 300; sim

30 a) 5 g; 2,5 g
b) $m = \frac{10}{2^x}$



c) 0,3125 g e $10 \cdot 2^{-20}$ g

31 a) V b) V
c) F; f(1) = 37 e g(1) = 20
d) F; observe que g(2) = f(2); construa os gráficos das duas funções.

32 a) S = {5} c) S = {−3} e) S = {−1}
b) S = {3} d) $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

33 a) $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$ c) $S = \left\{-\frac{11}{16}\right\}$ e) S = {−5}
b) S = {1} d) $S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$.

34 3 anos

35 a) R$ 60 000,00 c) R$ 48 600,00
b) 10% d) 5 anos

36 a) 3,75 g b) 224 anos

37 a) 200 b) $\frac{2}{3}$

c) Aproximadamente $1{,}3 \cdot 10^7$ bactérias.

38 a) $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$ c) $S = \left\{-\frac{19}{8}\right\}$

b) $S = \{5\}$ d) $S = \{-8\}$

39 a) $S = \{4\}$ c) $S = \{2\}$

b) $S = \{1\}$ d) $S = \{-2, 1\}$

40 $x = 3$

41 a) $S = \{(2, -3)\}$ c) $S = \{(2, -1)\}$

b) $S = \{(1, 3)\}$

42 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

43 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

44 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{4}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\}$

45 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{9}{8}\right\}$

46 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

47 a) 3 000 e $b = \frac{3}{2}$

b) 6 000

e) 7 dias

48 $a < \frac{1}{3}$

49 a) $t = 0 \rightarrow x^2 + x + 512 = 0$ e $\Delta = -2\,047$

b) 3

TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**6**	a	**11**	a	**16**	d	**21**	d
2	a	**7**	c	**12**	e	**17**	b	**22**	c
3	a	**8**	b	**13**	e	**18**	b	**23**	c
4	c	**9**	e	**14**	c	**19**	c	**24**	c
5	b	**10**	d	**15**	b	**20**	b		

7 LOGARITMOS

EXERCÍCIOS

1 a) 3 c) 3 e) $-\frac{7}{2}$

b) 6 d) $\frac{5}{3}$ f) 8

2 a) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{12}$ e) -3

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

3 a) $\frac{1}{6}$ b) -2 c) 2

4 a) 2 b) 4 c) 10 d) $\frac{e^2}{3} \cong 2{,}46$

5 $y = \frac{1}{6}$ **6** 27 **7** $\frac{1}{2}$

8 a) -3 b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$

9 a) 5 b) -1 c) 4 d) 0 e) $\frac{7}{2}$

10 a) $\frac{a}{2} - 2b$ b) $2 + a + \frac{b}{2}$ c) $1 + a - \frac{b}{3}$

11 $y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **12** $x = \frac{a^2b}{c^3}$ **13** $S = \{-3, 3\}$

14 a) $a + b$ e) $1 - a$

b) $2a + b$ f) $a + 2b + 1$

c) $b - a$ g) $\frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b$

d) $-2a$ h) $3 - a$

15 a) 2,301 b) 0,1455 c) $-4{,}899$

16 a) $1 - k$ c) $k + 3$

b) $\frac{2}{3}k$ d) $3k + 1$

17 7,26

18 Sim; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow xy = x + y$ e $\log(xy) = \log(x + y)$, isto é, $\log x + \log y = \log(x + y)$.

19 $a - 1$ **20** 1

21 a) $\frac{\log 3}{\log 2} \cong 1{,}58$ c) $\frac{\frac{1}{2}}{\log 3} \cong 1{,}048$

b) $\frac{\log 2}{2} \cong 0{,}15$

22 a) $\frac{\ell n\, 7}{\ell n\, 2} \cong 2{,}8$ b) $\frac{\ell n\, 3}{\ell n\, 5} \cong 0{,}68$

23 0,696

24 a) $T = \frac{2S}{3}$

b) T; pois $3 < S < 4$ e $2 < T < \frac{8}{3}$.

25 $-\frac{2}{x}$

26 a) $\frac{a + 2b}{a + b}$ b) $\frac{2 - 4a}{2a + b}$ **27** m = 103

TESTES DE VESTIBULARES

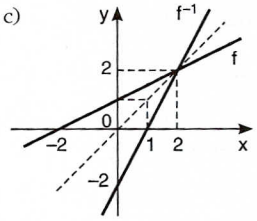
1 b **4** d **7** c **10** d
2 a **5** e **8** c
3 d **6** d **9** b

8 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

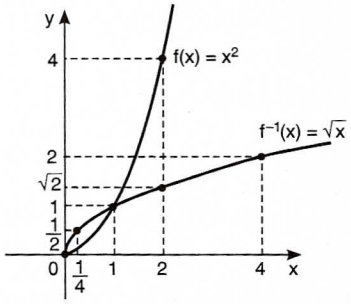
EXERCÍCIOS

1 a) sim; $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$
b) não; f(–1) = f(1) = 1
c) sim; $f^{-1}(x) = \log x$
d) sim; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
e) não; f(1) = f(–1) = 1
f) sim; $f^{-1}(x) = e^x$

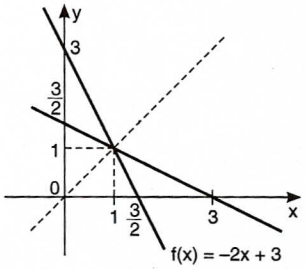
2 a) 4; –2
b) $f^{-1}(x) = 2x - 2$
c)



3 a) II
b) $f^{-1}(x)$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
c) y = 4, por exemplo, é imagem de x = 2 e de x = –2



4 a)

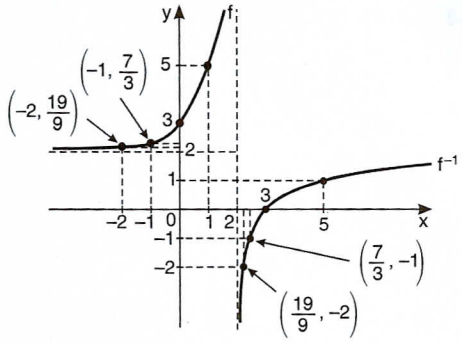


b) (1, 1)

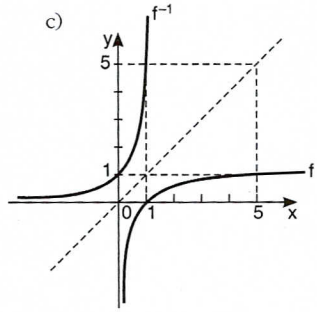
5 $y^{-1} = \frac{3x + 5}{2x - 1}$; $x \neq \frac{1}{2}$

6 a) $f^{-1}(x) = \log_3 (x - 2)$

b)



7 a) 2; 25
b) $f^{-1}(x) = 5^x$
c)



8 a) 2 b) 3; $\frac{3}{2}$

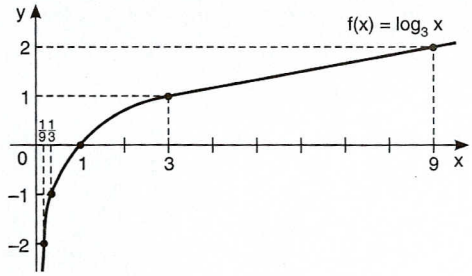
9 a) F; t = log h
b) V; $t = \log 10^9 = 9$ s
c) F; alcançaria $100\sqrt{10} \cong 316$ m

10 a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ e } x \neq 1\}$

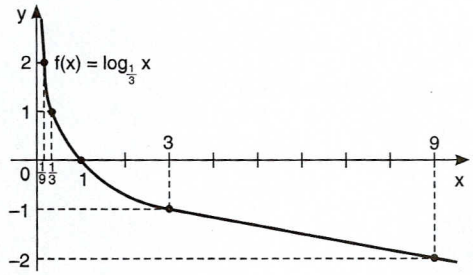
11 a) 200 b) 8 meses

12 a) $60 \cdot (1{,}04)^9 \cong 85{,}4$ bilhões
b) $\log_{1,04} 2 \cong 18 \to$ ano de 2014;
$\log_{1,04} 3 \cong 28 \to$ ano de 2024;
$\log_{1,04} x$

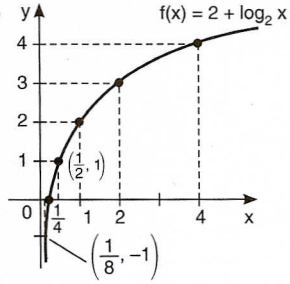
13 a)



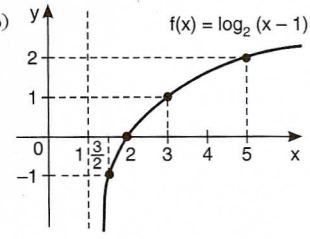
b)



14 a)



b)



15 36

16 a) F; $9 < \pi^2 \overset{\text{base} > 1}{\Longrightarrow} \log_2 9 < \log_2 \pi^2$

b) V; $0{,}1 < 2 \overset{0 < \text{base} < 1}{\Longrightarrow} \log_{0,2} 0{,}1 > \log_{0,2} 2$

c) V; $5 > 1 \overset{\text{base} > 1}{\Longrightarrow} \log_8 5 > \log_8 1$, isto é, $\log_8 5 > 0$

d) F; $\frac{1}{2} < 1 \overset{0 < \text{base} < 1}{\Longrightarrow} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 1$, isto é, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$

e) F; pois $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \overset{\text{base} > 1}{\Longrightarrow} \log \frac{1}{2} > \log \frac{1}{3}$

f) V; pois $\sqrt{3} > \frac{8}{5} \overset{\text{base} > 1}{\Longrightarrow} \ell n\sqrt{3} > \ell n\left(\frac{8}{5}\right)$

17 Como $0 < a < 1$ e $2c^2 > 1$, $\log_a 2c^2 < 0$. Pelo gráfico, $c > 0$, de modo que o produto é positivo.

18 a) $S = \{\log_2 3\}$ d) $S = \{\ell n\, 2 - 1\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{2}\ell n\, 3\right\}$ e) $S = \{1 - \log 5\}$

c) $S = \{-\log_3 4\}$ f) $S = \{-2 - \log 2\}$

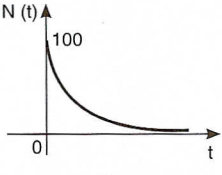
19 a) R$ 11250,00 b) 3 anos

20 a) F; 100 e) F

b) V; é $\frac{100}{16}$

c) V; 25 bactérias

d) V; 60 bactérias



21 a) $x = \ell n \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \ell n \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

b) f é par : $f(-x) = f(x)$

22 20 anos

23 a) $S = \{3\}$ b) $S = \{3, 7\}$ c) $S = \{6\}$

24 a) $S = \{19\}$ c) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 5\right\}$

b) $S = \{3\}$ d) $S = \{2\}$

25 a) $S = \{16\}$ c) $S = \{13\}$

b) $S = \{64\}$

26 a) $S = \{64, 2\}$ c) $S = \left\{\frac{1}{1000}, 10000\right\}$

b) $S = \{2, 16\}$

27 a) $S = \{2\}$ b) $S = \{1\}$ c) $S = \{\sqrt{2}\}$

28 a) $S = \{2\}$ b) $S = \{5\}$ c) $S = \{4\}$

29 $S = \{3\}$ **30** $S = \{(1, 10)\}$

31 $S = \left\{(2, 1); \left(3, \frac{2}{3}\right)\right\}$

32 a) $S = \{7\}$ b) $S = \{9, \sqrt{3}\}$ c) $S = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

33 $S = \{-2\}$ **34** $S = \{1\}$

35 a) população $A \rightarrow$ 2000 e 6000
população $B \rightarrow$ 3000 e 5000

b) após 3 anos; cidade A

36 a) $S = \{4\}$ b) $S = \mathbb{R}_+^*$

37 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **38** $S = \left\{\left(32, \frac{1}{4}\right)\right\}$

39 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_3 7\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_4 3\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \ell n \frac{1}{4}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \log_{0,4} 2\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \log_8 \frac{5}{2}\right\}$

40 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x \leqslant \frac{9}{5}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{3}\right\}$

41 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

42 a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < -1 \text{ ou } 1 < x < \sqrt{2}\}$

43 $S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 16\}$

44 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ ou } x > e^2\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{9} < x < 243\right\}$

45 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 - 2\sqrt{2} \text{ ou } 1 + 2\sqrt{2} < x < 4\}$

46 $0 < m \leqslant \frac{1}{3}$ ou $m \geqslant 3$

TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**7**	e	**13**	c	**19**	c
2	a	**8**	b	**14**	d	**20**	c
3	b	**9**	a	**15**	a	**21**	e
4	e	**10**	a	**16**	b		
5	b	**11**	d	**17**	b		
6	e	**12**	a	**18**	e		

9 PROGRESSÕES

EXERCÍCIOS

1 (5, 7, 9, 11, 13)

2 a) $\frac{5}{54}$ b) 11º termo

3 a) –99 b) 2; 9º termo

4 (10, 8, 6, 4, 2, 0) **5** 34

6 Note, inicialmente, que $a_n = (n - 1)\ n\ (n + 1)\ (n^2 + 1)$.
a) V, pois a_n contém o produto de 3 números naturais consecutivos.
b) F, tome n = 6.
c) V, pois para todo $n \in \mathbb{N}^*$, n é divisor de a_n.

7 a) 7 b) 104

8 a) r = 4; crescente
b) r = –5; decrescente
c) r = 0; constante
d) r = –6; decrescente
e) $r = \frac{5}{2}$; crescente
f) r = 6; crescente

9 151 **10** 216

11 a) $a_n = 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$ b) 200

12 –3

13 a) $a_n = 4n - 55$ b) 105 c) $a_{14} = 1$

14 1 **15** (–20, –8, 4, 16, 28, ...)

16 a) 156 cm c) $19\sqrt{2}$ cm
b) 3 721 cm²

17 111 **18** a) Sim; $r = 2^x$ b) x = 2

19 m = 6 ou m = –3 **20** x = 4

21 sim; $4 - 3\sqrt{2}$ **22** 29

23 (–22, –16, –10, –4, 2, 8, 14, 20)

24 28 **25** 273 **26** 10^6

27 (8, 13, 18) **28** 32 cm

29 30°, 70° e 110° **30** R$ 200,00

31 $\left(3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, 9\right)$ **32** 210

33 205 **34** a) 6,4 b) 3,4

35 36 000 **36** 10 **37** $-\ell n\ 2$

38 (2, 7, 12, 17, ...) **39** 25

40 R$ 680,00 e R$ 18 560,00

41 a) 4 887 b) 210

42 a) 22 b) $\frac{17}{2}$ c) $\frac{81}{2}$

43 20 **44** 1 **45** x = 100

46 a) 2 c) 9 e) $\sqrt{5}$
b) –4 d) $\frac{1}{4}$

47 $\frac{25}{4}$ **48** $\frac{64}{729}$

49 100 **50** 152 metros

51 a) 16 000 b) 125

52 40 metros **53** –15

54 $-\frac{7}{10}$ **55** 4 096

56 a) $\frac{1}{8}$ b) $-\frac{3}{2}$

57 x = 1 **58** 9

59 1, 4 e 16 **60** sim; $q = \sqrt{2}$

61 sim; $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ **62** 3

63 a) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ b) $-1 - \sqrt{5}$

64 Quando r = 3, a = 9, b = 27 e c = 81.
Quando $r = \frac{1}{3}$, a = 81, b = 27 e c = 9

65 a) $a_n = 3^n$; $n \in \mathbb{N}^*$
b) 3^{210}

66 a) 2 b) 12

67 $a = \frac{9}{2}$ e b = 6

69 $\frac{2}{3}$ **70** 2 **71** 3 280

72 a) 10 b) 2 046 c) 682

73 9 **74** 242 **75** 8

76 $\frac{10^n + 2}{3}$

77 a) $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$
b) q = 3
c) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

78 a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{90}$

79 $\frac{7}{2}$

80 a) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ b) S = {–1}

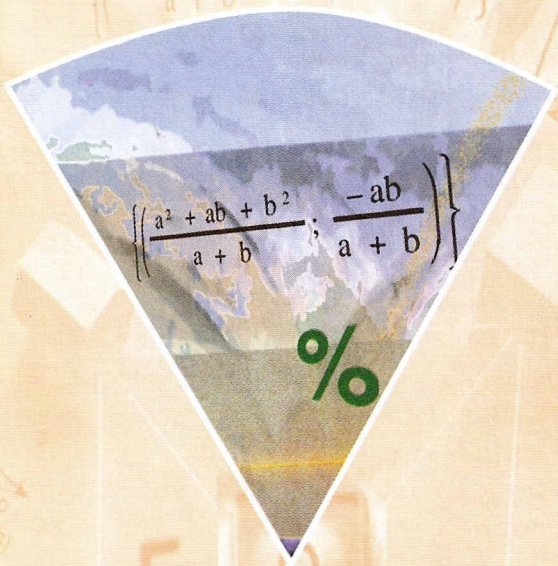
81 a) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{43}{99}$
b) $\frac{16}{9}$ d) $\frac{46}{45}$

82 $4 + 2\sqrt{2}$ **83** 16

84 a) $8\pi r$ b) $\frac{16\pi r^2}{7}$

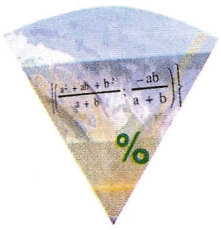
TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**7**	d	**13**	c	**19**	c	**25**	a
2	d	**8**	c	**14**	e	**20**	e	**26**	a
3	a	**9**	c	**15**	a	**21**	a		
4	b	**10**	c	**16**	c	**22**	a		
5	b	**11**	a	**17**	d	**23**	d		
6	b	**12**	c	**18**	d	**24**	e		



• MATEMÁTICA FINANCEIRA •

Parte 2



10

NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

1 ○ Razão e proporção

Sejam dois números reais a e b, com $b \neq 0$. Chama-se *razão entre a e b* (nessa ordem) o quociente $a : b$, ou $\frac{a}{b}$.

O número a é denominado *antecedente* (numerador) e b é o *conseqüente* (denominador).

Exemplo 1

Na fila de um guichê de venda de ingressos em um estádio de futebol, havia 48 torcedores, sendo 20 palmeirenses e 28 corintianos.

A razão entre o número de palmeirenses e o número de corintianos é $\frac{20}{28} = \frac{5}{7}$, o que significa que "para cada 5 palmeirenses há 7 corintianos".

A igualdade entre duas razões recebe o nome de *proporção*.

Na proporção $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (lê-se: "3 *está para* 5 *assim como* 6 *está para* 10"), os números 3 e 10 são chamados *extremos*, e os números 5 e 6 são chamados *meios*.

Observemos que o produto $3 \times 10 = 30$ é igual ao produto $5 \times 6 = 30$, o que caracteriza a *propriedade fundamental* das proporções:

"Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos".

Exercícios

1 Num concurso público, constatou-se que a razão entre o número de homens e o número de mulheres era $\frac{3}{5}$. Se o total de inscritos era 1600 pessoas, determine:

a) o número de mulheres que fizeram o concurso;

b) a razão entre o número de aprovados e o número total de inscritos, sabendo que $\frac{5}{12}$ dos homens foram aprovados e $\frac{17}{25}$ das mulheres *não* conseguiram aprovação.

2 Até pouco tempo, de cada 5 crianças que nasciam no mundo uma era chinesa e, entre as chinesas, de cada 5 crianças 3 eram meninas. Sabendo-se que para as outras nacionalidades havia equilíbrio entre o número de meninas e o de meninos, pergunta-se:

a) Nascidas 250 crianças, quantas meninas chinesas seriam esperadas?

b) Qual era a razão entre o número de meninos recém-nascidos chineses e o das recém-nascidas de outras nacionalidades?

3 (Unicamp-SP) Dois estudantes A e B receberam Bolsas de Iniciação Científica de mesmo valor. No final do mês, o estudante A havia gasto $\frac{4}{5}$ do total de sua Bolsa, o estudante B havia gasto $\frac{5}{6}$ do total de sua Bolsa, sendo que o estudante A ficou com R$ 8,00 a mais que o estudante B.

a) Qual era o valor da Bolsa?
b) Quantos reais economizou cada um dos estudantes naquele mês?

4 Um ônibus sai da cidade X em direção à cidade Y. Após percorridos $\frac{4}{7}$ da distância entre X e Y, ele faz uma parada para lanche. Do local da parada até a cidade Y são mais 210 km.

a) Qual é a distância entre X e Y?
b) Quantos quilômetros são percorridos até a parada?

5 Duas companhias aéreas oferecem recompensas para seus clientes mais fiéis: a empresa A concede um trecho grátis ao cliente que completar dez vôos, e a empresa B oferece a décima passagem ao cliente que tiver feito uso de seus serviços por nove vezes. Admita que o preço da passagem nas duas empresas seja igual a x reais.

a) Qual companhia oferece mais vantagens a seus clientes?
b) Supondo-se que a menos generosa passe a praticar habitualmente preços $\frac{1}{40}$ menores, aquela empresa conseguirá oferecer tantas vantagens quanto esta? Justifique.

6 (Unisinos-RS) Colocando-se 27 litros de gasolina no tanque de um carro, o ponteiro do marcador, que indicava $\frac{1}{4}$ do tanque, passa a indicar $\frac{5}{8}$. Qual é a capacidade total desse tanque de gasolina?

7 (UF-RN) Um café é preparado e, logo depois, é servido em quatro xícaras, nas quais é colocado o mesmo tipo de açúcar.
A primeira xícara recebe 50 ml de café e 2 g de açúcar; a segunda, 70 ml de café e 3 g de açúcar; a terceira, 90 ml de café e 4 g de açúcar; a quarta, 120 ml de café e 5 g de açúcar.
Em qual das xícaras o café estará mais doce?

2 Porcentagem

A razão cujo denominador é 100 recebe o nome de *razão centesimal*. São exemplos de razões centesimais:

$$\frac{27}{100} \qquad \frac{4}{100} \qquad \frac{57{,}3}{100} \qquad \frac{215}{100}$$

Podemos representar as razões centesimais na forma decimal e também em taxas percentuais, como é mostrado a seguir:

$\frac{27}{100} = 0{,}27 = 27\%$ $\quad \frac{4}{100} = 0{,}04 = 4\%$ $\quad \frac{57{,}3}{100} = 0{,}573 = 57{,}3\%$ $\quad \frac{215}{100} = 2{,}15$ ou 215%

Exemplo 2

Em uma *blitz* ocorrida em uma rodovia, dos 25 automóveis fiscalizados 4 apresentaram documentação irregular. A razão entre o número de automóveis com documentação irregular e o número total de automóveis é:

$$\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$$

O número $0{,}16 = \frac{16}{100} = 16\%$ é a taxa percentual de automóveis com problemas na documentação.

Exemplo 3

Os 360 funcionários de uma empresa submeteram-se a exames clínicos para verificação dos níveis de colesterol no sangue. Desse total, 35% apresentaram taxas acima do limite sugerido pelo teste.

Para calcularmos o número de funcionários com taxa superior à recomendada, podemos estabelecer a proporção:

$$\begin{cases} 360 \text{ —— } 100\% \\ x \text{ —— } 35\% \end{cases} \Rightarrow \frac{360}{x} = \frac{100}{35} \Rightarrow x = 126 \text{ funcionários}$$

Poderíamos calcular diretamente 35% de 360 = 0,35 · 360 = 126.

Exemplo 4

Uma calça é vendida por R$ 36,00. Se seu preço for aumentado em 15%, quanto passará a custar? Temos:

$$\text{novo preço} = \underbrace{\text{preço antigo}}_{\downarrow} + \underbrace{\text{aumento}}_{\downarrow}$$

$$\text{novo preço} = 36 + 0{,}15 \cdot 36 = 36 \cdot (1 + 0{,}15) = 1{,}15 \cdot 36 = 41{,}40$$

Observe que o preço inicial fica multiplicado por 1,15, ou 1 + 0,15.

Exemplo 5

Uma agência de turismo anunciou redução de 28% no preço de seus pacotes. Se 3 dias em Buenos Aires custavam U$ 340,00, quanto passará a custar essa viagem?

Temos:

$$\text{novo valor} = \underbrace{\text{valor antigo}}_{\downarrow} - \underbrace{\text{desconto}}_{\downarrow}$$

$$\text{novo valor} = 340 - 0{,}28 \cdot 340 = 340(1 - 0{,}28) = 0{,}72 \cdot 340 = 244{,}80$$

Observe que o preço original fica multiplicado por 0,72, ou 1 – 0,28.

Exemplo 6

O gráfico ao lado compara o sentimento de orgulho de ser brasileiro antes e depois dos atentados terroristas nos EUA em setembro de 2001. Há duas formas de expressar tal aumento:

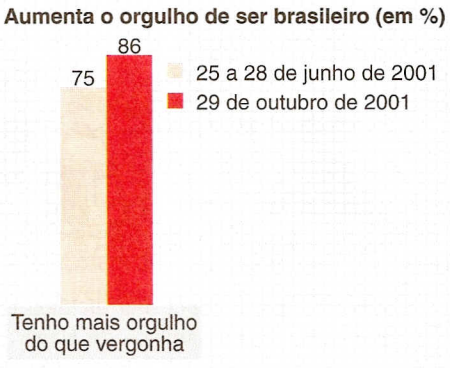
1ª) Dizemos que houve uma variação (aumento) de 86 – 75 = 11 *pontos percentuais*.

2ª) O *aumento percentual*, em relação à data anterior ao atentado, é dado por:

$$\frac{86 - 75}{75} \cong 0{,}147 = 14{,}7\%$$

Nesse caso, poderíamos simplesmente fazer:

$$\frac{86}{75} \cong 1{,}147 = 1 + 0{,}147 \rightarrow 14{,}7\% \text{ de aumento}$$



Fonte: *Folha de S.Paulo*, 4/11/2001.

Exemplo 7

O gráfico ao lado compara a queda do número de seqüestros relâmpagos na cidade de São Paulo, causada pelo fechamento dos caixas eletrônicos 24 horas, durante a crise energética de 2001.

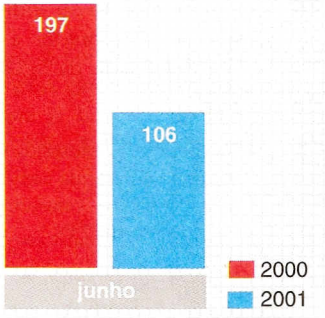
Vamos calcular a *redução percentual* registrada.

Temos:

$$197 - 106 = 91 \text{ (valor absoluto da redução)}$$

$$\frac{91}{197} = 0{,}4619 = 46{,}19\% \text{ (taxa de redução percentual)}$$

Poderíamos simplesmente fazer $\frac{106}{197} = 0{,}538$, o que significa uma redução de 1 – 0,538 = 0,4619 = 46,19%.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 14/8/2001.

Exercícios

8 (UF-CE) Um vendedor recebe, a título de rendimento mensal, um valor fixo de R$ 160,00 e mais um adicional de 2% das vendas por ele efetuadas no mês. Com base nisso, responda:

a) Qual é o rendimento desse vendedor em um mês no qual o total de vendas feitas por ele foi de R$ 8 350,00?

b) Qual é a função que expressa o valor do seu rendimento mensal em função de sua venda mensal?

9 O preço de venda de uma jaqueta é de R$ 42,00. Quanto passará a custar essa jaqueta se a loja anunciar:

a) um desconto de 5%?

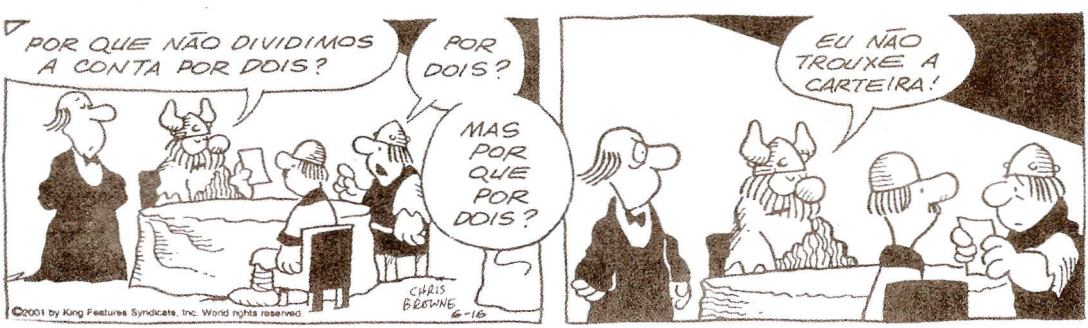
b) um acréscimo de 14%?

10 Após aumento de 12,5%, a passagem de ônibus em uma capital nordestina passou a custar R$ 0,90. Qual era o valor da passagem?

11 Um usuário recebeu uma conta telefônica 120% maior que a última conta, já paga. Assustado, recorreu à concessionária, que informou ter havido engano na cobrança, anunciando redução do valor apresentado à metade. Ainda assim, qual foi o acréscimo percentual do valor a pagar em relação ao da conta anterior?

12 Depois de muita insistência, um cliente conseguiu 12% de desconto na compra de uma TV, pagando então R$ 440,00. Qual era o preço sem desconto dessa TV?

13 **HAGAR, o horrível** — **Chris Browne**



(*O Globo*, 4/9/2001.)

Supondo que a conta seja dividida entre dois, e não entre três, e considerando o percentual da conta que cada um dos amigos de Hagar irá pagar, verifica-se um aumento de n pontos percentuais.

a) Determine n.

b) Qual é o aumento percentual verificado?

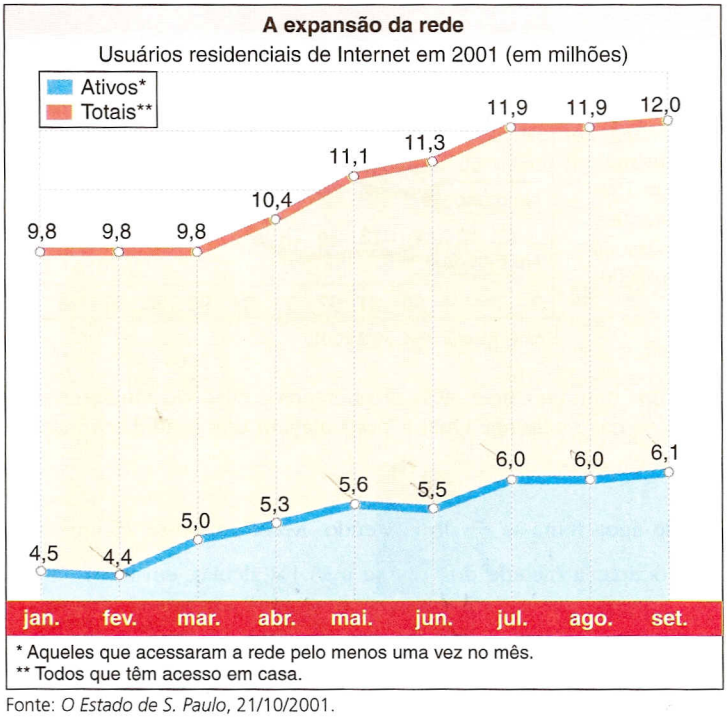
14 O teor de cloreto de sódio em uma amostra de 50 kg de água do mar é de 30%. Quantos litros de água devem ser evaporados a fim de que tal porcentagem dobre?
Dado: densidade da água = 1 kg/ℓ.

15 Começa a ser oferecida no Brasil uma nova opção de tratamento para a doença do refluxo gastroesofágico, também conhecida como azia crônica, que afeta cerca de 40% da população adulta brasileira. A técnica utiliza o endoscópio — mesmo equipamento empregado nos exames de gastrite, por exemplo — e tem um índice de sucesso de 75%.

(*Folha de S.Paulo*, 15/11/2001.)

Sendo x a população adulta brasileira e supondo que todos os adultos com refluxo utilizem a técnica citada no texto, qual é o número de adultos que obtêm sucesso no tratamento?

16



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 21/10/2001.

Analise cada uma das afirmações seguintes, assinalando V ou F e justificando as falsas:

a) O gráfico mostra que, de modo geral, aproximadamente metade dos usuários residenciais acessou a rede ao menos uma vez por mês.

b) O aumento percentual de usuários ativos foi menor que 1%, considerando os números de agosto e setembro.

c) Suponha que em setembro 30% dos usuários ativos acessaram *sites* de comércio eletrônico e, desse total, 16% das visitas resultaram em compras. Então, podemos dizer que aproximadamente 2,5% do *total de usuários residenciais* efetuaram compras eletrônicas.

d) O percentual de usuários ativos, em relação ao total, foi maior no mês de abril.

17 (Fuvest-SP) No início de sua manhã de trabalho, um feirante tinha 300 melões que ele começou a vender ao preço unitário de R$ 2,00. A partir das dez horas reduziu o preço em 20% e a partir das onze horas passou a vender cada melão por R$ 1,30. No final da manhã havia vendido todos os melões e recebido o total de R$ 461,00.

a) Qual o preço unitário do melão entre dez e onze horas?

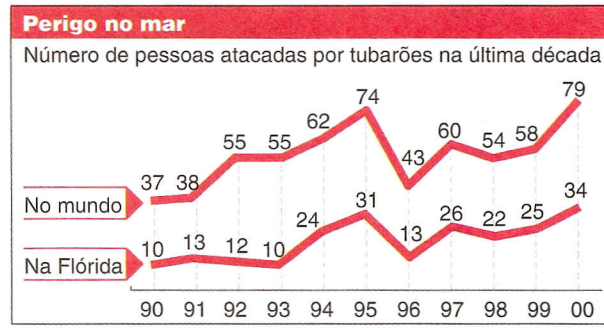
b) Sabendo que $\frac{5}{6}$ dos melões foram vendidos após as dez horas, calcule quantos foram vendidos antes das dez, entre dez e onze e após as onze horas.

18 Um avião com 120 lugares foi fretado para uma viagem do Rio de Janeiro a Fortaleza e partiu lotado. Durante o vôo, constatou-se que 60% dos passageiros estavam viajando pela primeira vez de avião e, entre eles, 87,5% não conheciam Fortaleza. Se o número de turistas que já haviam ido a Fortaleza corresponde a 25% do total, que porcentagem do total de turistas já havia viajado de avião e estado na capital cearense?

19 (Mackenzie-SP) O setor de recursos humanos de uma empresa entrevistou pessoas pretendentes a empregos, sendo $\frac{2}{3}$ a razão entre o número de aprovados e o de reprovados. Qual foi a taxa percentual de aprovação?

20 a) Considerando os dados referentes aos últimos *cinco anos*, em que ano a Flórida alcançou o maior percentual em relação ao total de ataques? Qual foi esse valor?

b) Supondo que em 2000 os ataques ocorridos no Brasil representavam 15% do total mundial e 76% desses ataques ocorreram no Recife, quantas pessoas foram atacadas por tubarões, em 2000, no Recife?



Fonte: Revista *Veja*, 29/8/2001.

21 (UF-PE) Dentre os candidatos inscritos num concurso, 40% são homens e 60% são mulheres. Destes já têm emprego 70% dos homens e 50% das mulheres. Qual a porcentagem dos candidatos inscritos que já têm emprego?

22 (UF-MS) De um recipiente cheio de água retira-se $\frac{2}{3}$ do conteúdo. Recolocando-se 25 litros de água, o conteúdo do recipiente passa a ocupar a metade do volume inicial. Calcular, em litros, 10% da capacidade do recipiente.

23 (UF-RJ) A comissão de um corretor de imóveis é igual a 5% do valor de cada venda efetuada.

a) Um apartamento foi vendido por R$ 62 400,00. Determine a comissão recebida pelo corretor.

b) Um proprietário recebe, pela venda de uma casa, R$ 79 800,00, já descontada a comissão do corretor. Determine o valor da comissão.

24 (UF-GO) O senhor José gasta hoje 25% do seu salário no pagamento da prestação de sua casa. Se a prestação for reajustada em 26%, e o salário somente em 5%, qual será a porcentagem do salário que ele deverá gastar no pagamento da prestação, após os reajustes?

25

Produtos em avaliação pelo Ipem
As mudanças por setores

Higiene e limpeza	
Papel higiênico	de 40 m para 30 m
Detergente em pó*	1 kg para 900 g
Cera em pasta	de 450 g para 400 g
Toalhas de papel	de 70 para 60 folhas
Sabonete	100 g para 90 g
Desodorante	50 ml para 44 ml

Alimentos	
Biscoitos*	de 200 g para 170 g/180 g
Pão de fôrma	de 550 g para 500 g
Caldos de galinha e carne	de 69 g para 57 g
Ovos	12 para 10 unidades
Sardinha em lata	135 g para 130 g
Requeijão	250 g para 240 g
Torrada	200 g para 160 g
Pizza	500 g para 460 g
Maionese	500 g para 450 g (nova embalagem)
Massa recheada	de 500 g para 400 g
Massa de bolo	de 300 g para 250 g

* Indústrias que prometeram voltar aos "pesos" anteriores

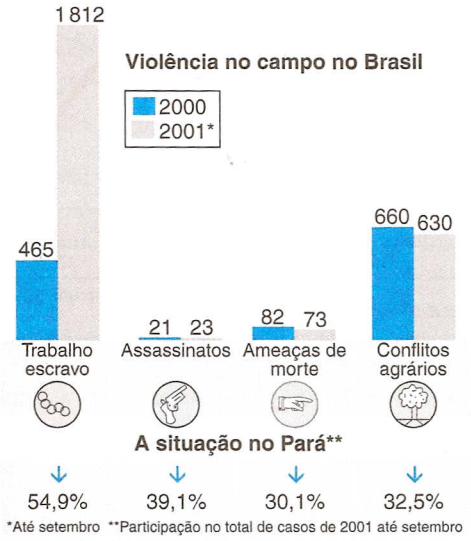
Fonte: *O Globo*, 30/8/2001.

O Ministério da Justiça decidiu, ontem, processar e multar os três maiores fabricantes de papel higiênico do país [...] em R$ 2 milhões cada um pela prática de alta maquiada de preços. O ministro José Gregori afirmou que as empresas foram punidas por abuso de poder econômico e desrespeito ao consumidor. Nos últimos meses, as indústrias passaram a fabricar rolos de papel higiênico com 30 metros, e não mais com 40 metros, sem informar os consumidores e, ainda, sem a queda equivalente de preço. As empresas que estão sendo multadas ainda correm o risco de ter seus produtos retirados das prateleiras dos supermercados.

(*O Globo*, 30/8/2001.)

a) Dos produtos de higiene e limpeza relacionados, qual apresentou a maior redução percentual de seu conteúdo? Qual apresentou a menor? Quais foram esses percentuais?
b) Qual foi a redução percentual constatada no conteúdo do pão de forma? E no dos ovos? E no da torrada?
c) Caso a redução percentual do conteúdo fosse acompanhada da redução percentual de preços, quanto deveria custar um rolo de 30 metros de papel higiênico, se o pacote com quatro unidades de 40 metros cada custava R$ 2,40?

26

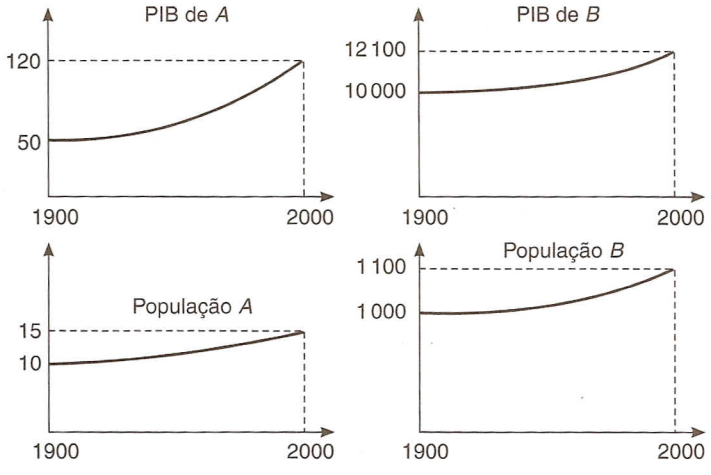


Fonte: *Folha de S.Paulo*, 16/11/2001.

a) Quais as categorias de violência rural que apresentaram redução nas ocorrências? Qual foi, em cada caso, o percentual de redução?
b) Qual foi o aumento percentual verificado nas ocorrências de trabalho escravo?
c) Em relação ao total de ocorrências em 2001, que porcentagem refere-se ao Pará?

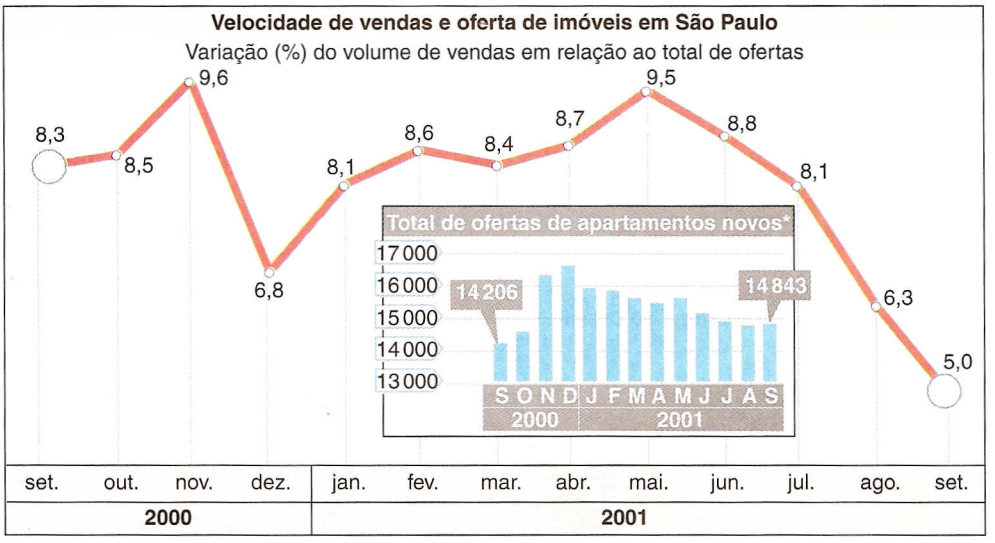
27 (UFF-RJ) A Loja Goiás paga, pela aquisição de certo produto, o correspondente ao preço x (em reais) de fabricação, mais 5% de impostos e 3% de frete, ambos calculados sobre o preço x. Vende esse produto ao consumidor por R$ 54,00, com lucro de 25% (em relação ao custo). Determine o valor de x.

28 (UF-RJ) Os gráficos abaixo correspondem às evoluções do Produto Interno Bruto (PIB), em bilhões de reais, e da população, em milhões de habitantes, de dois países hipotéticos, A e B, entre 1900 e 2000.



a) Qual dos dois países teve maior aumento percentual do PIB no período? Justifique.
b) Determine a variação do PIB *per capita* (razão entre o PIB e o número de habitantes de cada um dos países) no período.

29



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 4/11/2001. *Em unidades.

a) Entre que meses consecutivos de 2001 ocorreu a maior queda no volume de vendas? Qual foi a redução percentual registrada?

b) Qual o aumento percentual aproximado no volume de vendas de dezembro de 2000 a janeiro de 2001?

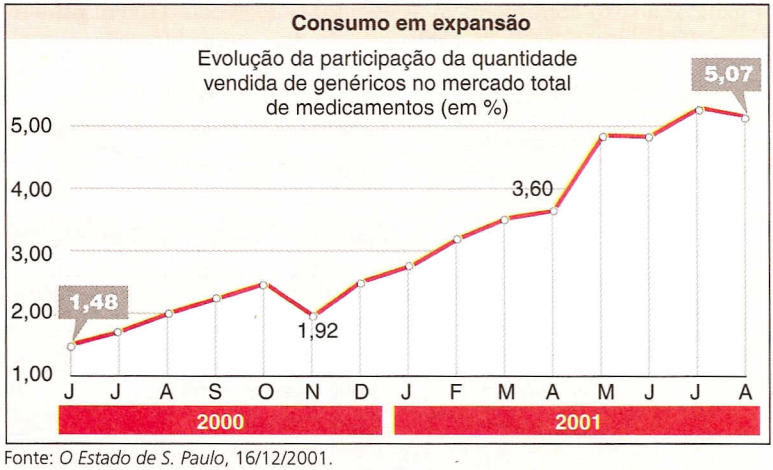
c) Quantos apartamentos novos foram vendidos em setembro de 2001?

30 (UF-RN) Dois supermercados (X e Y) vendem leite em pó, de uma mesma marca, ao preço de R$ 4,00 a lata. Numa promoção, o supermercado X oferece 4 latas pelo preço de 3 (para vendas acima de 3 latas), e o supermercado Y dá um desconto de 20% em cada lata adquirida.
Responda, justificando, em qual dessas promoções você economizaria mais, se comprasse

a) 12 latas;

b) 11 latas.

31



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 16/12/2001.

De acordo com dados da Anvisa, a quantidade de genéricos vendida no Brasil saltou x%, de junho de 2000 a agosto de 2001, chegando a 7,06 milhões de unidades, ou 5,07% do mercado total.

(*O Estado de S. Paulo*, 16/12/2001.)

a) Determine x.

b) Quantas unidades de remédios foram vendidas no Brasil em agosto de 2001?

32 (UF-BA) O proprietário de um depósito que continha 1 000 litros de gasolina resolveu misturá-la com álcool e usou a seguinte estratégia: 100 litros de gasolina foram retirados do depósito e substituídos por 100 litros de álcool; em seguida, 100 litros dessa mistura foram retirados e substituídos por 100 litros de álcool. Após esse procedimento, o percentual de gasolina contido na mistura é de x%. Calcule x.

33 (UF-GO) Analise o seguinte texto e responda às perguntas abaixo:

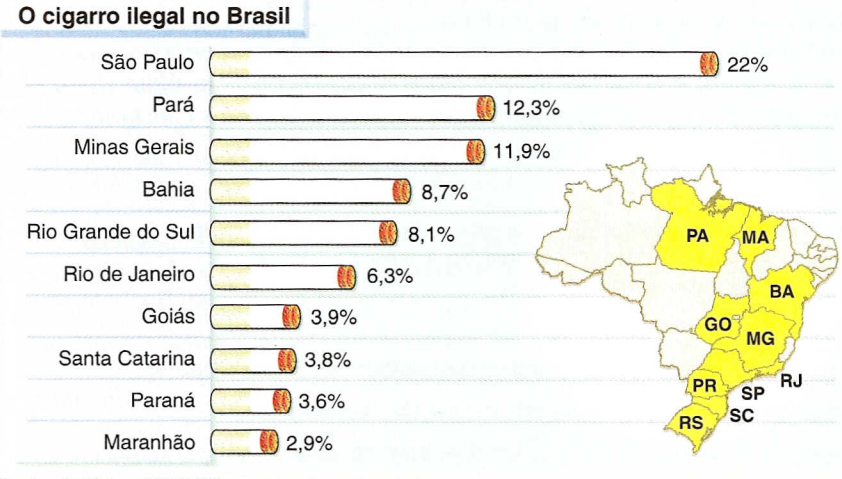
> Pela primeira vez, o número de mulheres conectadas [à Internet] ultrapassou o de homens nos Estados Unidos. Elas representam [em maio de 2000] 50,4% dos internautas. [...] De maio de 1999 a maio de 2000, a presença delas aumentou 34,9%, enquanto o número [total] de usuários da Internet cresceu 22,4%.
>
> (*Veja*, 23/8/2000. p. 84.)

a) Qual era o percentual de mulheres entre os usuários da Internet em maio de 1999?

b) No período considerado, de maio de 1999 a maio de 2000, qual foi o percentual de crescimento do número de usuários masculinos na Internet?

34

A indústria informal de cigarros



Fonte: *O Globo*, 25/2/2001.

Na cesta do cigarro ilegal, a indústria formal põe o contrabando (produtos transferidos clandestinamente de um país para o outro), a falsificação (produtos que copiam ou imitam marcas famosas e que, além de contrabandeados, são distribuídos nos países que os fabricam) e, ainda, a evasão fiscal (produtos com aparência formal mas que não recolhem impostos).

No mundo — que produz 5,6 trilhões de cigarros ao ano — o tamanho dessa cesta é de 350 bilhões de cigarros. Trata-se de uma montanha fumegante que equivale a 35% das exportações mundiais — as quais alcançam um trilhão de cigarros anuais — e corresponde a uma evasão fiscal de U$ 16 bilhões.

No Brasil, o cigarro ilegal responde por 32% do consumo total, que foi de 139,9 bilhões em 2000, numa evasão de impostos calculada em R$ 1,2 bilhão.

(*O Globo*, 25/2/2001.)

De acordo com o texto, responda:

a) Quantos cigarros ilegais foram consumidos no Brasil no ano de 2000?

b) Quais foram as quantidades de cigarro ilegal consumido, em 2000, nos Estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Pará, respectivamente?

c) Que porcentagem do consumo mundial de cigarros cabe ao Brasil? E no cenário de cigarro ilegal?

d) De quanto é, em reais, a evasão de impostos ocasionada pelo consumo de cigarro ilegal na Região Sul? (Suponha evasão distribuída como no gráfico acima.)

3 ○ Juros

Suponhamos que uma pessoa deseje comprar uma geladeira e não disponha de dinheiro suficiente para pagamento à vista. Nessas condições, ela pode efetuar a compra a prazo ou tentar um empréstimo em um banco. Em qualquer um desses casos, a pessoa geralmente paga uma quantia — além do preço da geladeira — a título de *juros*. O valor desses juros é justificado pelo prazo obtido para o pagamento ou pelo "aluguel" do dinheiro emprestado.

Há outras situações em que aparecem juros. Por exemplo: se uma pessoa dispõe de uma importância em dinheiro, ela pode aplicá-la em uma caderneta de poupança ou em algum outro investimento. Ao fim de certo período, ela receberá do banco a importância aplicada *acrescida* de um valor referente aos juros da aplicação. A essa quantia total recebida do banco damos o nome de *montante*.

Normalmente, quando se realiza alguma operação desse tipo, fica estabelecida uma *taxa de juros* por um período (mês, dia, ano), a qual incide sobre o valor da transação, chamado de *capital*.

4 ○ Juros simples

Suponhamos que sobre uma quantia devam ser calculados *juros simples*, a uma taxa fixa por período, durante certo número de períodos.

Isso significa que os juros correspondentes a cada um dos períodos serão *sempre calculados sobre a quantia inicial*, e só serão incorporados a ela ao final do último período.

Dizemos, portanto, que nesse regime há pagamento de *juros constantes por períodos iguais*.

Exemplo 8

Renato contraiu de um amigo um empréstimo de R$ 800,00 em regime de juros simples, à taxa de 2% ao mês, comprometendo-se a pagá-lo ao final de 4 meses.

Vamos calcular os juros a serem pagos:

- Em um mês, os juros são de

$$2\% \text{ de } 800{,}00 = 0{,}02 \cdot 800 = 16{,}00$$

- Como o prazo combinado é de 4 meses, o total de juros é:

$$J = 4 \times 16{,}00 = 64{,}00$$

Assim, ao todo, Renato pagará ao amigo:

$$\underbrace{800}_{\text{capital}} + \underbrace{64}_{\text{juros}} = \underbrace{864{,}00}_{\text{montante}}$$

De modo geral, um capital C, empregado durante n períodos, à taxa i, produz juros J dados por:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

e montante M igual a:

$$M = C + J = C + Cin \Rightarrow M = C(1 + in)$$

Observação

A taxa deve ser sempre compatível com a unidade de tempo considerada. Por exemplo, se a taxa for de 4% a.m., para um prazo de 60 dias adotaremos n = 2 (2 meses).

Exercícios

35 Calcule o montante de uma aplicação financeira a juros simples nas seguintes situações:

	Capital	Taxa	Tempo de rendimento
a)	R$ 10 000,00	3% ao mês	6 meses
b)	R$ 500,00	18% ao ano	4 meses
c)	R$ 4 000,00	2% ao mês	1,5 ano

36 Uma dívida de R$ 2 000,00 foi contraída a juros simples, por 4 meses, à taxa de 5% a.m. Qual será o montante da dívida após esse prazo?

37 Um capital aplicado a juros simples, durante 5 meses, à taxa de 1% a.m., gerou nesse período um montante de R$ 1 260,00. Qual foi o capital aplicado?

38 Um capital é aplicado, a juros simples, à taxa de 12% a.m. Quanto tempo, no mínimo, ele deve ficar aplicado, a fim de que seja possível resgatar o quádruplo da quantia aplicada?

39 (FGV-SP) Um investidor norte-americano traz para o Brasil 50 000 dólares, faz a conversão dos dólares para reais; aplica os reais por um ano à taxa de 18% ao ano e no resgate converte os reais recebidos para dólares e os envia para os Estados Unidos. No dia da aplicação um dólar valia R$ 1,10 e, um ano depois, na data do resgate um dólar valia R$ 1,20.

a) Qual a taxa de rendimento dessa aplicação, considerando os valores expressos em dólares?
b) Quanto deveria valer um dólar na data de resgate (um ano após a aplicação) para que a taxa de rendimento em dólares tivesse sido de 12% ao ano?

40 (FGV-SP) O sr. Mathias tem R$ 12 000,00 para investir pelo prazo de um ano. Ele pretende aplicar parte numa aplicação *A* que tem um rendimento esperado de 15% ao ano sobre o valor investido, e o restante numa outra aplicação *B*, que dá um rendimento de 20% sobre o valor investido.

a) Qual o rendimento anual esperado se ele aplicar R$ 7 000,00 em *A* e R$ 5 000,00 em *B*?
b) Qual o máximo que deve investir em *A* para auferir um ganho esperado de no mínimo R$ 2 200,00 daqui a um ano?

41 (U. F. Juiz de Fora-MG) O preço à vista de uma mercadoria é de R$ 130,00. O comprador pode pagar 20% de entrada no ato da compra e o restante em uma única parcela de R$ 128,96, vencível em 3 meses. Admitindo-se o regime de juros simples comerciais, qual é a taxa de juros anual cobrada na venda a prazo?

42 (FGV-SP) Carlos adquiriu um aparelho de TV em cores pagando uma entrada de R$ 200,00 mais uma parcela de R$ 450,00 dois meses após a compra. Sabendo-se que o preço à vista do aparelho é R$ 600,00:

a) Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?
b) Após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de R$ 450,00 para que a taxa de juros simples do financiamento fosse de 2,5% ao mês?

5 Juros compostos

O regime de capitalização mais utilizado nas transações comerciais e aplicações financeiras é o de *juros compostos*, que se baseia no seguinte princípio:

- Ao final do 1º período, os juros incidentes sobre o capital inicial são a ele incorporados, produzindo o 1º montante.
- Ao final do 2º período, os juros incidem sobre o 1º montante e incorporam-se a ele, gerando o 2º montante.
- Ao final do 3º período, os juros, calculados sobre o 2º montante, incorporam-se a ele, gerando o 3º montante; e assim por diante.

De modo geral, um capital C, a juros compostos, aplicado a uma taxa fixa i, durante n períodos, produz:

- ao final do 1º período: $M_1 = C + Ci \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$
- ao final do 2º período: $M_2 = M_1 + M_1 i = M_1(1 + i) \Rightarrow M_2 = C(1 + i)^2$
- ao final do 3º período: $M_3 = M_2 + M_2 i = M_2(1 + i) \Rightarrow M_3 = C(1 + i)^3$

⋮

- ao final do n-ésimo período: $M_n = C(1 + i)^n$

Devido à sua natureza, o sistema de juros compostos é chamado *capitalização acumulada*.

Exemplo 9

Lígia aplicou a quantia de R$ 700,00 em um fundo de investimento que rende 2% ao mês, em regime de juros compostos. Vamos aplicar a fórmula deduzida para saber seu saldo mês a mês.

Tempo decorrido	1 mês	2 meses	3 meses	4 meses	...	8 meses
Saldo de sua aplicação	$700 \cdot (1 + 0{,}02)^1$ ↓ 714	$700 \cdot (1{,}02)^2$ ↓ 728,28	$700 \cdot (1{,}02)^3$ ↓ 742,84	$700 \cdot (1{,}02)^4$ ↓ 757,70	...	$700 \cdot (1{,}02)^8$ ↓ 820,16

Observe que os montantes acima representam os termos de uma progressão geométrica de razão igual a 1,02.

Exemplo 10

A população de certo município cresce à taxa de 12% ao ano. Se atualmente essa população é estimada em 20 mil habitantes, qual será o número de habitantes daqui a cinco anos?

Podemos adaptar a expressão do montante dos juros compostos a essa situação, pois o acréscimo populacional em um determinado ano é incorporado à população do ano anterior, e assim sucessivamente.

Segue, portanto, a expressão: $p(t) = p_0 \cdot (1 + i)^t$, sendo p_0 a população atual, $p(t)$ a população daqui a t anos e i a taxa de crescimento anual.

Assim:

$$p(5) = 20\,000 \cdot (1{,}12)^5 = 35\,247 \text{ habitantes}$$

Mantido tal crescimento, em quanto tempo o município terá 120 mil habitantes?

Devemos determinar t tal que $p(t) = 120\,000$. Temos:

$$120\,000 = 20\,000 \cdot 1{,}12^t \Rightarrow 1{,}12^t = 6$$

A determinação de t é feita aplicando logaritmos (em base e, por exemplo):

$$t \cdot \ell n\ 1{,}12 = \ell n\ 6 \Rightarrow t = \frac{\ell n\ 6}{\ell n\ 1{,}12} \cong 15{,}8 \text{ anos}$$

Exemplo 11

Um produto sofreu reajustes sucessivos de 15% e de 20%. Vamos determinar seu preço após esses aumentos, se antes deles seu preço era x reais.

Aqui não podemos usar a fórmula aprendida, pois as taxas de aumento *não* são iguais. Entretanto, o princípio de capitalização (ou reajuste) acumulada é mantido. Temos:

- Após o 1º aumento, esse produto custará $x + 0{,}15x = 1{,}15 \cdot x$.
- O 2º aumento incidirá sobre esse valor, isto é:

$$\underbrace{1{,}15x}_{\substack{\text{preço após o} \\ \text{1º aumento}}} + \underbrace{0{,}2 \cdot 1{,}15 \cdot x}_{\substack{\text{20\% de} \\ \text{aumento}}} = 1{,}15 \cdot x(1 + 0{,}2) = 1{,}15 \cdot 1{,}2 \cdot x = 1{,}38 \cdot x$$

Note que, em relação a seu preço original, o aumento total foi de 38%.

Exercícios

43 Um capital de R$ 120,00 é aplicado em uma caderneta de poupança por 1 ano e meio, à taxa de 1% a.m. Qual é o montante dessa aplicação?

44 Um capital, empregado a juros compostos e à taxa de 8% ao mês, produziu em 9 meses um montante de R$ 9995,00. Qual foi o capital aplicado?

45 (PUC-RJ) Uma carteira de investimento rende 2% ao mês. Depois de três meses, R$ 1500,00 aplicados cumulativamente nessa carteira valem aproximadamente x reais. Determine o valor de x.

46 Uma aplicação financeira regida a juros compostos e a uma taxa fixa gera um aumento de 44% do capital investido em 2 meses. Qual é a taxa mensal de juros dessa aplicação?

47 Um pequeno poupador abriu uma caderneta de poupança com R$ 100,00. Supondo rendimento constante de 2% a.m., determine:

a) o montante após um ano de aplicação;
b) o tempo necessário para que o poupador possa resgatar a quantia de R$ 200,00.

48 (UF-PI) Um capital é empregado a uma taxa anual de 5% ao ano (juros compostos), calculada anualmente. Se o valor do montante depois de n anos é aproximadamente 34% maior que o capital inicial, qual é o valor de n?
(Use $\log_{10} 1{,}05 = 0{,}02$ e $\log_{10} 1{,}34 = 0{,}12$.)

49 (UF-PA) Suely recebeu R$ 1000,00 e pretende investi-los pelo prazo de dois anos. Um amigo lhe sugere duas opções de investimento. Na primeira delas a rentabilidade é de 20% ao ano e, no momento do resgate, há um desconto de 25% sobre o valor acumulado, referente ao imposto de renda. Na segunda, a rentabilidade é de 6% ao ano, sem incidência de imposto. Efetuando os cálculos necessários, determine qual a aplicação que renderá mais a Suely, após dois anos.

50 As taxas mensais de rendimento em uma aplicação, durante os três primeiros meses do ano, foram, respectivamente, iguais a 3%, 5% e 6%.

a) Qual o montante gerado no trimestre pela aplicação de R$ 1000,00 no início do ano?
b) Qual o rendimento dessa aplicação acumulado no trimestre?

51 (FGV-SP) Um produto cujo preço era R$ 220,00 teve dois aumentos sucessivos, de 15% e 20% respectivamente. Em seguida, o valor resultante teve um desconto percentual igual a x, resultando num preço final y.

a) Calcule y se x = 10%.
b) Calcule x se y = R$ 290,00.

52 Em certa região da Amazônia, verificou-se que a área atingida por desmatamento aumentava mensalmente segundo uma P.G. de razão 1,05.

a) Se atualmente essa área desmatada é igual a A_0 km^2, qual será a área desmatada daqui a 3 meses?
b) Se as autoridades só conseguirem deter o desmatamento após 6 meses, qual será o acréscimo percentual da área desmatada, em relação à sua dotação inicial?

53 (UF-PE) Em um país irreal, o governante costuma fazer empréstimos para viabilizar sua administração. Existem dois empréstimos possíveis: pode-se tomar emprestado de países ricos com juros de 4,2% ao ano (aqui incluída a taxa de risco) ou toma-se emprestado dos banqueiros do país irreal que cobram juros compostos de 3% ao mês. Pressões políticas da oposição obrigam o governante a contrair empréstimo com os banqueiros do seu país. Quantas vezes maiores que os juros anuais cobrados pelos países ricos são os juros anuais cobrados pelos banqueiros do país irreal? Dado: use a aproximação $1{,}03^{12} \cong 1{,}42$.

54 Em um rio, a população de peixes da espécie A cresce à taxa de 5% ao mês e a espécie B cresce à taxa de 8% ao mês. Recentes estudos estimaram em 50 000 e 30 000 as quantidades de peixes das espécies A e B, respectivamente.

a) Qual é a razão entre o número de peixes da espécie A e o da espécie B, atualmente?
b) Qual será essa razão daqui a 5 meses?
c) Em quantos anos, aproximadamente, a proporção será de 1:1?

55 (UFF-RJ) O tratamento com um novo xampu recomenda sua aplicação por duas vezes: em cada aplicação devem ser utilizados, exatamente, 5% do volume existente no frasco.
Determine a porcentagem do volume inicial que restará no frasco após a segunda aplicação.

56 (FGV-SP) Um terreno vale hoje A reais, e esse valor fica 20% maior a cada ano que passa (em relação ao valor de um ano atrás).

a) Qual o seu valor daqui a n anos? Qual a valorização sofrida ao longo do enésimo ano, expressa em reais?
b) Daqui a quantos anos aproximadamente o valor do terreno triplicará?

57 (UFF-RJ) Em 15 de julho Miguel deverá pagar a taxa de condomínio acrescida, a partir desse mês, de uma cota extra. Após o primeiro pagamento essa cota sofrerá, mensalmente, uma redução de 60%. Determine o mês em que, na taxa de condomínio a ser paga por Miguel, a cota extra original estará reduzida de 93,6%.

58 Consultado sobre o futuro das ações de uma empresa, um economista arriscou o palpite de que, durante os próximos 10 anos, o valor de uma ação da empresa, em cada ano, sofrerá uma desvalorização de 5% em relação ao seu valor do ano anterior.
Admita que o valor atual de uma ação seja V_0.

a) Encontre a fórmula que prevê o valor V dessa ação daqui a t anos ($t \leqslant 10$).
b) É possível que nesse período o valor da ação caia para a metade de seu valor atual?

59 Precisando de R$ 2 000,00, Otília procurou dois amigos, X e Y. O amigo X emprestaria esse valor a juros compostos de 5% a.m. por 4 meses. O amigo Y se propôs a emprestar essa quantia a juros simples de 5,39% a.m. por 4 meses. Qual amigo de Otília oferece melhores condições?

60 (UF-MG) Um televisor estava anunciado por R$ 500,00 para pagamento à vista ou em três prestações mensais de R$ 185,00 cada; a primeira delas a ser paga um mês após a compra. Paulo, em vez de pagar à vista, resolveu depositar, no dia da compra, os R$ 500,00 numa caderneta de poupança, que lhe renderia 2% ao mês nos próximos três meses. Desse modo, ele esperava liquidar a dívida, fazendo retiradas de R$ 185,00 daquela caderneta nas datas de vencimento de cada prestação. Mostre que a opção de Paulo não foi boa, calculando quanto a mais ele teve de desembolsar para pagar a última prestação.

Testes de vestibulares

1 (UF-SE) A prefeitura de certa cidade realizou dois concursos para preenchimento de suas vagas. No primeiro, a razão entre o número de vagas e o número de candidatos era de 2 para 5. Apesar do número de vagas ter ficado constante, no segundo concurso, aquela razão passou a ser de 1 para 4. É correto afirmar que o número de inscritos aumentou em:

a) 15%
b) 25%
c) 40%
d) 50%
e) 60%

2 (PUC-RJ) Um turista, ao viajar, comprou US$ 1 000,00 de reserva a uma taxa de 1,80 reais por dólar. Não havendo usado este dinheiro na viagem, ele o vendeu na sua volta a uma taxa de 1,90 reais por dólar. Então, o turista:

a) lucrou R$ 100,00.
b) lucrou R$ 180,00.
c) lucrou R$ 190,00.
d) perdeu R$ 180,00.
e) perdeu R$ 100,00.

3 (Enem-MEC) Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40 g. Em seguida, recortou, do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais 100 m × 100 m, pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08 g. Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metros quadrados, é de, aproximadamente:

a) 800
b) 10 000
c) 320 000
d) 400 000
e) 5 000 000

4 (Vunesp-SP) Os dados publicados na revista *Veja* de 12/4/2000 mostram que, de cada 100 pessoas com o ensino médio, apenas 54 conseguem emprego. Se num determinado grupo de 3 000 pessoas, 25% têm ensino médio, o número provável de pessoas do grupo, com ensino médio, que, de acordo com os dados da pesquisa, irão conseguir emprego, é:

a) 375 c) 450 e) 1 620
b) 405 d) 750

5 (UF-PE) Quando o preço da unidade de determinado produto diminuiu 10%, o consumo aumentou 20% durante certo período. No mesmo período, de que percentual aumentou o faturamento da venda deste produto?

a) 8% c) 12% e) 30%
b) 10% d) 15%

6 (Mackenzie-SP) Ao comprar um objeto, para pagamento em parcelas iguais, uma pessoa foi informada de que a parcela paga até a data do vencimento teria um desconto de 20% e aquela paga com atraso teria um acréscimo de 20%. Se a primeira parcela foi paga no vencimento e a segunda com atraso, o segundo pagamento teve, em relação ao primeiro, um acréscimo de:

a) 40% c) 50% e) 25%
b) 48% d) 20%

7 (UF-MG) Certa região do país, cuja área é de 300 000 km^2, possui 80% de terras cultiváveis, 25% das quais são improdutivas. Essas terras improdutivas deverão ser usadas no assentamento de famílias de agricultores sem terra. Supondo que cada família receba 30 hectares (1 ha = 10 000 m^2) e que o custo do assentamento de cada uma delas seja de R$ 30 000,00, o custo total do assentamento naquela região, em bilhões de reais, será de:

a) 2,4 c) 6,0 e) 3,0
b) 0,8 d) 4,8

8 (UFF-RJ) A empresa Acme concedeu a seus funcionários mensalmente, durante dois meses, um reajuste fixo de x% ao mês. Se ao final desses dois meses o reajuste acumulado foi de 21%, o valor de x é:

a) 10 c) 11 e) 21
b) 10,5 d) 11,5

9 (ESPM-SP) Numa loja um objeto custa R$ 100,00 à vista. Uma pessoa compra esse objeto em duas parcelas iguais de R$ 60,00, pagando a primeira parcela no ato da compra e a segunda parcela trinta dias depois. Os juros cobrados por essa loja foram a uma taxa mensal de:

a) 50% c) 30% e) 10%
b) 40% d) 20%

10 (Covest-PE) Uma pessoa, em repouso, respira 17 vezes por minuto e, a cada vez, inala 0,6 litro de ar. Do ar respirado, $\frac{1}{5}$ é de oxigênio, que será absorvido pelo organismo. Do total de oxigênio absorvido somente $\frac{1}{5}$ chega à corrente sangüínea. Quantos litros de oxigênio entram na corrente sangüínea em 1 (uma) hora?

a) 24,28 c) 24,08 e) 24,38
b) 24,18 d) 24,48

11 (Unaerp-SP) "O Poliduto Paulínia–Brasília, com base em Ribeirão Preto, tem capacidade para transportar 20 mil m^3/dia de óleo diesel, gasolina, querosene de aviação e GLP. Atualmente o Poliduto opera com 30% de sua capacidade, sendo o maior volume de diesel, com 65% do total bombeado."

Com base nos dados do texto acima, pode-se concluir que o volume diário, em litros, de óleo diesel bombeado pelo Poliduto Paulínia–Brasília é de:

a) 13 000 000 d) 3 900
b) 3 900 000 e) 1 300
c) 1 300 000

12 (UF-PE) Suponha que 8% da população adulta do Brasil esteja desempregada e que a jornada média de trabalho semanal seja de 44 horas. Qual deveria ser a jornada média de trabalho semanal para que todos os adultos estivessem empregados?

a) 40h01min48s d) 40h16min48s
b) 40h06min48s e) 40h28min48s
c) 40h10min48s

13 (Fund. Visconde de Cairu-BA) Uma loja vende um televisor por R$ 780,00 à vista. A prazo, o aparelho é vendido por R$ 838,50, sendo dada uma entrada de 20% do valor à vista e o restante pago após 45 dias.
A taxa anual de juros simples aplicada sobre o saldo devedor é igual a:

a) 75%
b) 60%
c) 30%
d) 20%
e) 9%

14 (Famec-PR) Para atrair clientes, uma loja de eletrodomésticos publicou o seguinte anúncio:

> Aproveite a promoção!
> Fogões e geladeiras em 5 vezes sem juros e sem entrada, ou à vista, com 20% de desconto.

Sabemos que, na verdade, oferecer descontos para pagamentos à vista é uma forma de "disfarçar" a cobrança de juros nas vendas a prazo. Portanto, no caso dessa loja, os juros cobrados em relação ao preço à vista, quando o consumidor opta por pagar a prazo, são de:

a) 20,0%
b) 22,5%
c) 25,0%
d) 27,5%
e) 30,0%

15 (Unopar-PR) Uma loja de eletrodomésticos faz o seguinte anúncio: "Compre uma TV por R$ 1200,00 e só pague daqui a 30 dias, ou então, pague hoje com um desconto de 20%". Se uma pessoa comprar essa TV e decidir pagar apenas daqui a 30 dias, a taxa de juros a ser paga é:

a) 20% ao mês.
b) 25% ao mês.
c) 30% ao mês.
d) 35% ao mês.
e) 40% ao mês.

16 (UF-RS) Uma loja instrui seus vendedores para calcular o preço de uma mercadoria, nas compras com cartão de crédito, dividindo o preço à vista por 0,80. Dessa forma, pode-se concluir que o valor da compra com cartão de crédito, em relação ao preço à vista, apresenta:

a) um desconto de 20%.
b) um aumento de 20%.
c) um desconto de 25%.
d) um aumento de 25%.
e) um aumento de 80%.

17 (UF-CE) José e João possuem uma empresa cujo capital é de R$ 150 000,00. José tem 40% de participação na sociedade e deseja aumentar a sua participação para 55%. Se João não deseja alterar o valor, em reais, de sua participação, o valor que José deve empregar na empresa é:

a) R$ 110 000,00
b) R$ 170 000,00
c) R$ 82 500,00
d) R$ 90 000,00
e) R$ 50 000,00

18 (Unaerp-SP) No último vestibular, uma universidade ofereceu 150 vagas para o curso de engenharia. A relação candidato/vaga era 3,5 e a razão entre o número de homens e o de mulheres que se candidataram a uma vaga nesse curso era igual a $\frac{3}{2}$. Se 40% das candidatas foram aprovadas, o número de candidatos aprovados, considerando-se que todas as vagas foram preenchidas, correspondeu a:

a) 105
b) 99
c) 90
d) 84
e) 66

19 (Covest-PE) As bebidas *L*, *V* e *R* possuem teores alcoólicos de 24%, 44% e 36%, respectivamente. Qual o teor alcoólico de um coquetel consistindo de 50 ml de *L*, 25 ml de *V*, 25 ml de *R* e 100 ml de água?

a) 15%
b) 20%
c) 16%
d) 17%
e) 19%

20 (U. F. Juiz de Fora-MG) Uma loja vende seus produtos nas seguintes condições: no cartão de crédito, com 5% de acréscimo sobre o preço de tabela, ou à vista, com 20% de desconto sobre o preço de venda no cartão de crédito. A compra à vista de um produto dessa loja terá um desconto sobre o preço de tabela de:

a) 15% b) 16% c) 17% d) 18%

21 (PUC-RS) Se o valor de um automóvel novo é P_0 e sofre uma desvalorização de 12% ao ano, o preço do veículo após x anos de uso é:

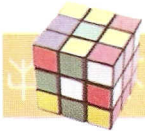
a) $P = P_0 + 12x$
b) $P = P_0 + (1,2)^x$
c) $P = P_0\,(0,12)^x$
d) $P = P_0 + (0,88)^x$
e) $P = P_0\,(0,88)^x$

22 (PUC-SP) Um equipamento de som está sendo vendido em uma loja por R$ 1 020,00 para pagamento à vista. Um comprador pode pedir um financiamento pelo plano 1 + 1 pagamentos iguais, isto é, o primeiro pagamento deve ser feito no ato da compra e o segundo, 1 mês após aquela data. Se a taxa de juro praticada pela empresa que irá financiar a compra for de 4% ao mês, então o valor de cada uma das prestações será de:

a) R$ 535,50
b) R$ 522,75
c) R$ 520,00
d) R$ 592,12
e) R$ 515,00

23 (Fuvest-SP) Numa barraca de feira, uma pessoa comprou maçãs, bananas, laranjas e pêras. Pelo preço normal da barraca, o valor pago pelas maçãs, bananas, laranjas e pêras corresponderia a 25%, 10%, 15% e 50% do preço total, respectivamente. Em virtude de uma promoção, essa pessoa ganhou um desconto de 10% no preço das maçãs e de 20% no preço das pêras. O desconto assim obtido no valor total de sua compra foi de:

a) 7,5% b) 10% c) 12,5% d) 15% e) 17,5%



Desafios

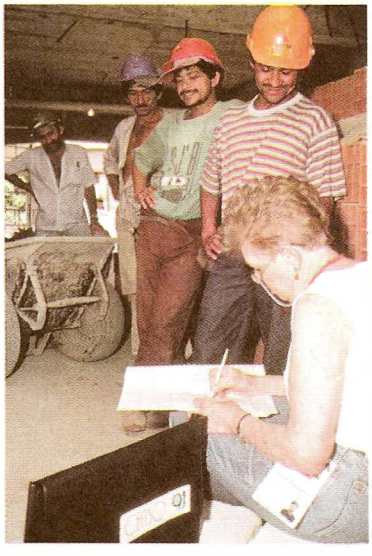
1

Censo revela novo perfil da população do país

O Brasil atingiu a marca de 169 544 443 habitantes. Os dados preliminares do Censo 2000 revelam que houve aumento de 22 718 968 no número da população em 9 anos. Mesmo assim a taxa de crescimento da população na última década ficou em 1,6% ao ano. Nos anos 80, essa taxa foi de 1,9%.

O crescimento da população brasileira na década de 90 aponta para a consolidação de novo modelo de expansão do país, com a presença crescente de pólos regionais de desenvolvimento. É o que mostram os dados preliminares do Censo 2000, divulgados ontem pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). O levantamento revela ainda a crescente urbanização e o ritmo cada vez menor de aumento populacional no país.

Esse desenho demográfico vai determinar alterações nas políticas públicas e nas decisões de investimentos privados. "Quanto mais soubermos sobre a realidade do nosso país, melhores condições teremos para focalizar e adequar os gastos públicos", explicou o ministro do Planejamento, Martus Tavares.



Delfim Martins/Pulsar

Os mais populosos

Municípios	População
São Paulo (SP)	10 406 166
Rio de Janeiro (RJ)	5 850 544
Salvador (BA)	2 440 886
Belo Horizonte (MG)	2 229 697
Fortaleza (CE)	2 138 234
Brasília (DF)	2 043 169
Curitiba (PR)	1 586 898
Recife (PE)	1 421 947
Manaus (AM)	1 403 796
Porto Alegre (RS)	1 359 932
Belém (PA)	1 279 861
Goiânia (GO)	1 090 581
Guarulhos (SP)	1 071 299
Campinas (SP)	967 921
Nova Iguaçu (RJ)	915 364

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 22/12/2000.

Apesar de os dados mostrarem alguma desconcentração do crescimento populacional, isto não quer dizer que as grandes cidades não estejam inchadas ou que a migração entre Estados tenha sido estancada.

O perfil traçado pelos resultados preliminares do Censo mostra que metrópoles como São Paulo e Rio, que tradicionalmente atraíam levas de habitantes de outras regiões, apresentaram as menores taxas de crescimento entre as capitais nos anos 90: 0,85% e 0,73% ao ano, respectivamente. O ritmo de expansão das duas maiores cidades brasileiras ficou abaixo da média estadual, o que mostra que as cidades do interior desses Estados é que foram responsáveis pelo aumento da população.

Diferentemente disso, em 16 Estados — a maioria no Norte e Nordeste —, as capitais tiveram aumento populacional acima das médias estaduais. "Isso mostra que de alguma maneira o crescimento está sendo mais descentralizado", disse Alícia Bercovich.

(Leandra Peres e Demétrio Weber. *O Estado de S. Paulo*, 22/12/2000.)

1ª parte

Suponha que a taxa de crescimento populacional no país permaneça, até 2010, em 1,6% ao ano.

a) Aproximando para 170 milhões a população em 2000, qual é a lei que define a população p do Brasil daqui a t anos ($t \leq 10$), contados a partir de 2000?
b) Qual será a população do Brasil em 2005?
c) Estime o tempo necessário para que a população brasileira ultrapasse 190 milhões.

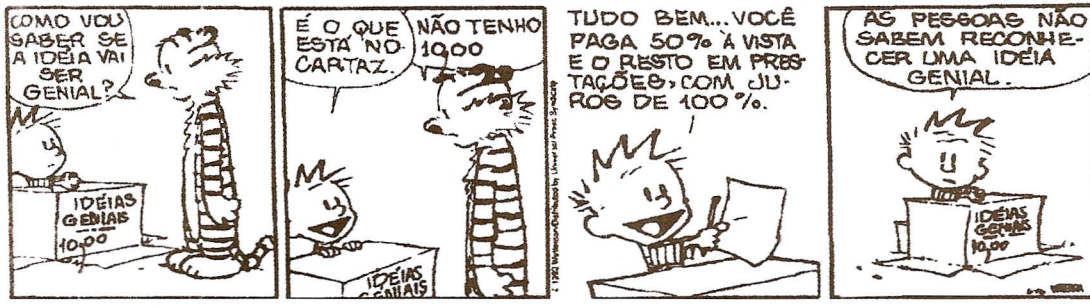
2ª parte

Suponha que a cidade de São Paulo mantenha até 2005 a taxa de crescimento populacional e, a partir de 2006, essa taxa se reduza a 0,75% ao ano, até 2010.
Qual será a população de São Paulo em 2010?

3ª parte

Supondo que Salvador cresça à taxa de 2% ao ano e que o Rio de Janeiro mantenha seu crescimento populacional, em quantos anos, contados a partir de 2000, a população de Salvador ultrapassará a do Rio de Janeiro?

2 O MELHOR DE CALVIN/*Bill Watterson*



(*O Estado de S. Paulo*, 30/1/2001.)

Suponha que um amigo de Calvin tenha aceitado sua proposta "genial": pagou 5,00 à vista e os outros 5,00 decidiu pagar em três parcelas iguais (30, 60 e 90 dias) com juros (compostos) de 100% ao mês. Qual foi o valor de cada parcela?

3 (UF-MG) Um fabricante gastava R$ 40,00 na produção de cada unidade de uma mercadoria, que ele vendia por R$ 100,00. Sobre o preço de venda, o fabricante pagava 40% de imposto.
Devido a problemas com os preços das matérias-primas, o custo de fabricação teve um aumento de 60%. Então, para evitar uma queda acentuada na produção, o governo resolveu diminuir a alíquota do imposto para 30% do preço de venda, e o fabricante concordou em diminuir o seu percentual de lucro, de 50% para 40%.
Calcule o novo preço de venda dessa mercadoria.

10 NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

EXERCÍCIOS

1 a) 1 000 b) $\frac{57}{160}$

2 a) 30 b) $\frac{1}{5}$

3 a) R$ 240,00 b) estudante *A*: R$ 48,00
estudante *B*: R$ 40,00

4 a) 490 km b) 280 km

5 a) *B*
b) sim; preço unitário *A*: $\left(1 - \frac{1}{40}\right) \cdot \frac{10}{11} x \cong 0{,}88x$ reais, preço unitário *B*: $\frac{9}{10} x = 0{,}9x$ reais

6 72 litros **7** Na terceira xícara.

8 a) R$ 327,00 b) $f(x) = 160 + \frac{1}{50} x$

9 a) R$ 39,90 b) R$ 47,88

10 R$ 0,80 **11** 10% **12** R$ 500,00

13 a) 16,67 pontos percentuais b) 50%

14 25 ℓ **15** 0,3x

16 a) V b) F; 1,67% c) V
d) F; o percentual de março (51,02%) foi maior que o de abril (50,96%)

17 a) R$ 1,60
b) antes das dez: 50; entre dez e onze: 120; após as onze: 130

18 17,5% **19** 40%

20 a) 1997; 43,33% b) 9 **21** 58%

22 15 litros

23 a) R$ 3 120,00 **24** 30%
b) R$ 4 200,00

25 a) maior: papel higiênico; 25%
menor: detergente e sabonete; 10%
b) pão de forma: 9,09%
ovos: 16,67%
torrada: 20%
c) R$ 0,45

26 a) ameaças de morte: 10,97%
conflitos agrários: 4,54%
b) 289,7%
c) 48,5%, aproximadamente

27 R$ 40,00

28 a) *A*: 140% b) *A*: 3 000 reais/habitante
B: 21% *B*: 1 000 reais/habitante

29 a) julho e agosto; 22,2% c) 742
b) 19,11%

30 a) supermercado *X*: R$ 36,00 b) *X*: R$ 36,00
supermercado *Y*: R$ 38,40 *Y*: R$ 35,20

31 a) 242,56% b) 139,25 milhões

32 81% **33** a) 45,7% b) 11,8%

34 a) 44,77 bilhões
b) SP → 9,85 bilhões
RJ → 2,82 bilhões
PA → 5,51 bilhões
c) 2,5% e 12,8%, aproximadamente
d) 186 milhões de reais

35 a) R$ 11 800,00 b) R$ 530,00 c) R$ 5 440,00

36 R$ 2 400,00 **37** R$ 1 200,00 **38** 25 meses

39 a) 8,17% b) R$ 1,16, aproximadamente

40 a) 17,08% b) R$ 4 000,00

41 96% ao ano **42** a) 6,25% a.m. b) 5 meses

43 R$ 143,54 **44** R$ 5 000,00 **45** R$ 1 592,00

46 20% ao mês **47** a) R$ 126,82 b) 35 meses

48 6 **49** A segunda totalizará R$ 1 123,60 e a primeira, R$ 1 080,00.

50 a) R$ 1 146,39 **51** a) R$ 273,24
b) 14,64% b) 4,48%

52 a) $A_0 \cdot 1{,}05^3$ km^2 **53** 10
b) 34%

54 a) 1,67 b) 1,45 c) 18 anos, aproximadamente.

55 90,25% **56** a) $1{,}2^n \cdot A$; $\frac{1{,}2^n - 1}{5} \cdot A$
b) 6

57 outubro

58 a) $V = V_0 \cdot 0{,}95^t$
b) Não; seriam necessários 13 anos e meio se tal desvalorização se mantivesse.

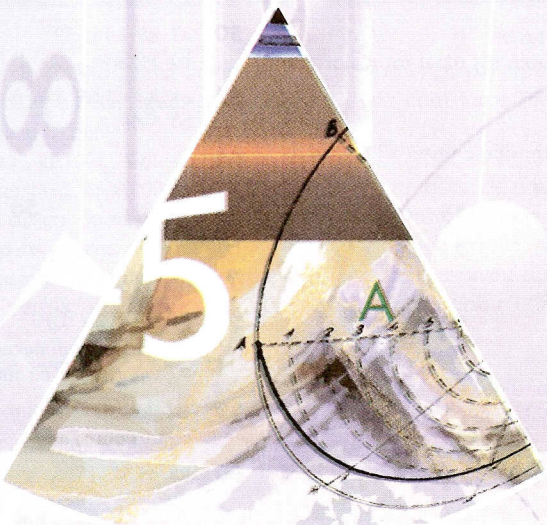
59 Os dois, pois os juros cobrados nas duas propostas se equivalem (ambos são de R$ 431,00).

60 R$ 35,57

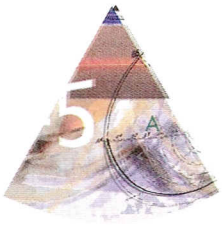
TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**7**	c	**13**	a	**19**	c
2	a	**8**	a	**14**	c	**20**	b
3	e	**9**	a	**15**	b	**21**	e
4	b	**10**	d	**16**	d	**22**	c
5	a	**11**	b	**17**	e	**23**	c
6	c	**12**	e	**18**	e		

• TRIGONOMETRIA •



Parte 3



11

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1 Introdução

Cada uma das figuras abaixo apresenta, em escalas diferentes, o esboço de um mapa contendo algumas capitais brasileiras.

Figura A

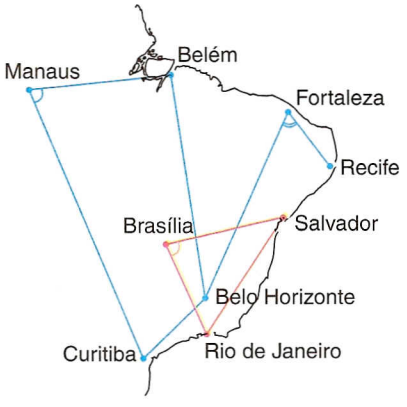


Figura B

Vamos relacionar elementos da figura *A* com os correspondentes na figura *B*, na busca de extrair conceitos importantes.

Vejamos:

- Medindo qualquer distância entre duas cidades assinaladas na figura *A* e a distância correspondente na figura *B*, observamos que a primeira é exatamente o dobro da segunda.

O mapa da figura B é uma redução em 50% do mapa da figura A.

- Medindo um ângulo qualquer de uma das figuras e o correspondente na outra, obtêm-se medidas iguais.

  Os ângulos indicam a "forma"; ela não se modifica na redução (ou ampliação).

- Percebe-se que, por exemplo, o quadrilátero assinalado em azul da figura B "cabe" mais que duas vezes no correspondente quadrilátero da figura A (ele "caberia" exatamente *quatro* vezes).

Exemplificando:

1. Medindo a distância entre Belo Horizonte e Fortaleza em A, obtemos $d_1 = 54$ mm; na figura B, tal distância corresponde a $d_2 = 27$ mm.
2. Em B, o triângulo em vermelho tem perímetro $p = 49$ mm, ao passo que em A o triângulo correspondente apresenta perímetro $P = 98$ mm.
3. Tanto em A como em B, os ângulos formados em Manaus, Brasília e Fortaleza medem, aproximadamente, 80°, 58° e 42°.

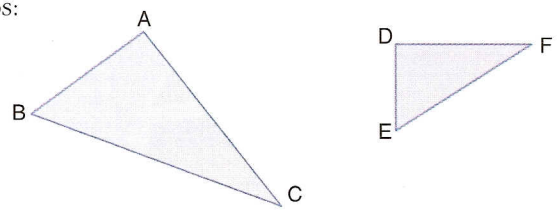
Resumo

Quando todas essas condições se verificam, dizemos que as figuras são *semelhantes*. Temos então:

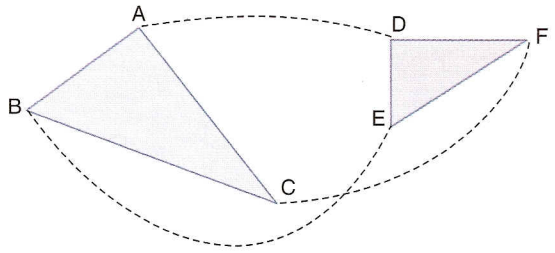
- A razão entre qualquer distância tomada na figura A e a distância correspondente na figura B é $k = 2 : 1 = \frac{2}{1} = 2$. Tal relação é chamada *razão de semelhança* entre as figuras, na ordem tomada (no caso, de A para B).
- Todos os ângulos se mantêm invariáveis entre as duas figuras.
- Do fato de a razão de semelhança ser k, é k^2 a razão entre as áreas das figuras.

2 Triângulos semelhantes

Observe os triângulos:



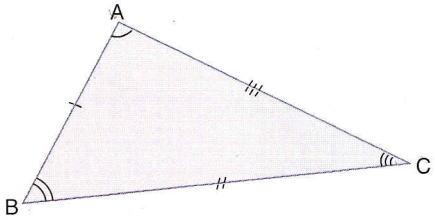
Vamos estabelecer uma correspondência entre os vértices dos triângulos. Por exemplo, associemos A com D, B com E e C com F.

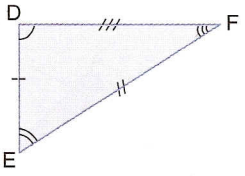


Nessa correspondência temos:

- vértices correspondentes: A e D, B e E, C e F;
- lados correspondentes (ou homólogos): $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{CA}$ e $\overline{FD}$;
- ângulos correspondentes: $\hat{A}$ e $\hat{D}$, $\hat{B}$ e $\hat{E}$, $\hat{C}$ e $\hat{F}$.

Um modo alternativo de marcar as correspondências entre lados e ângulos seria:





Marcas iguais denotam elementos correspondentes.

Quando ocorrem:

- a *congruência* entre os *ângulos* correspondentes ($\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$, $\hat{C} \equiv \hat{F}$) e
- a *proporcionalidade* entre os *lados* homólogos $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$,

dizemos que os triângulos são *semelhantes*: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Assim:

> Dois triângulos são semelhantes quando é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam dois a dois congruentes e os lados homólogos, proporcionais.

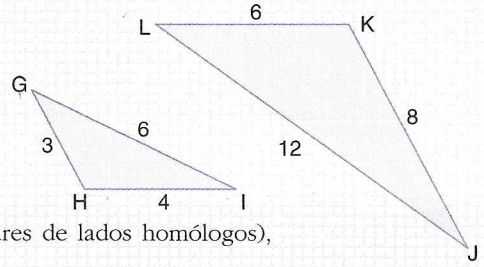
Essa é a definição de triângulos semelhantes. Ela impõe duas condições para que exista a semelhança:

- ângulos correspondentes dois a dois congruentes;
- lados homólogos proporcionais.

Entretanto, se uma dessas condições ocorre, então a outra "automaticamente" também se verifica.

Exemplo 1

Os triângulos GHI e JKL apresentados são semelhantes.



De fato, os lados dos triângulos são proporcionais:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12} = k = \frac{1}{2} \text{ (razão de semelhança)}$$

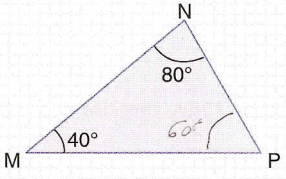
Além disso, podemos garantir que:

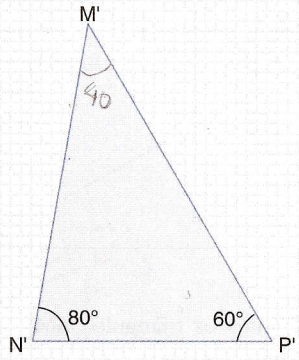
$\hat{G} \equiv \hat{L}$, $\hat{H} \equiv \hat{K}$ e $\hat{I} \equiv \hat{J}$ (ângulos formados por pares de lados homólogos),

embora não sejam conhecidas as medidas desses ângulos.

Exemplo 2

Os triângulos escalenos abaixo são semelhantes.



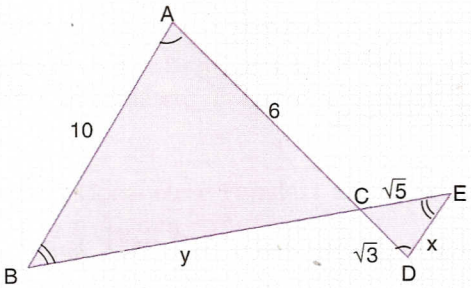


Basta notar que seus ângulos são congruentes; medem, num e noutro caso, 40°, 60° e 80°.
Por isso, podemos escrever a proporcionalidade entre os lados homólogos (correspondentes):

$$\triangle MNP \sim \triangle M'N'P' \Leftrightarrow \frac{MN}{M'N'} = \frac{MP}{M'P'} = \frac{NP}{N'P'} = k$$

Exemplo 3

Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são paralelos.



Para determinarmos os segmentos de medidas desconhecidas, x e y, devemos notar a congruência entre os ângulos:

$$\left.\begin{array}{l} C\hat{A}B \equiv C\hat{D}E \\ C\hat{B}A \equiv C\hat{E}D \end{array}\right\} \text{alternos internos}$$

Assim, $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ e

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{10\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \qquad y = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{15}$$

Também é possível calcular a razão de semelhança:

$$k = \frac{10}{\frac{5\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

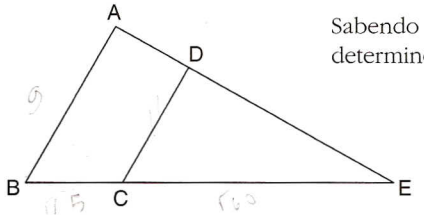
$k^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

$\triangle CDE$ "cabe" $(2\sqrt{3})^2 = 12$ vezes no $\triangle CAB$.

Exercícios

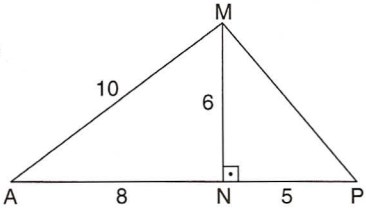
1 (UF-PE) Num mapa duas cidades distam 4 cm e a distância real entre elas é de 144 km. Se duas outras cidades distam entre si 2,5 cm no mapa, qual a distância real, em km, entre elas?

2

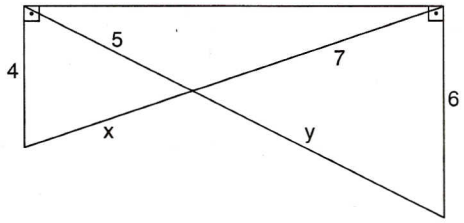


Sabendo que $BC = \sqrt{15}$ cm, $CE = \sqrt{60}$ cm, $AB = 9$ cm e que $\overline{AB} // \overline{CD}$, determine CD.

3 São semelhantes os triângulos AMN e PMN da figura ao lado? Justifique sua resposta.

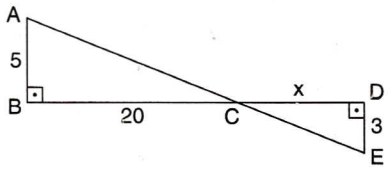


4 Determine x e y.



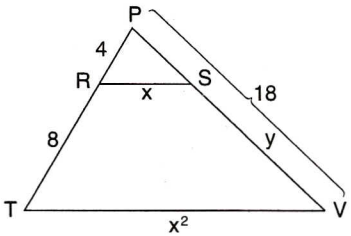
5 Os lados de um triângulo medem 30 cm, 40 cm e 60 cm. Ele é semelhante a um outro triângulo de perímetro 13 m. Ache as medidas dos lados do segundo triângulo e as razões de semelhança.

6 Observe a figura seguinte:



a) Explique por que os triângulos ABC e EDC são semelhantes.
b) Calcule x e a razão de semelhança k entre os lados dos triângulos ABC e EDC.
c) Calcule a área do triângulo ABC e use o item b para calcular a área do triângulo EDC.

7 Na figura, $\overline{RS} \,//\, \overline{TV}$. Determine x e y.



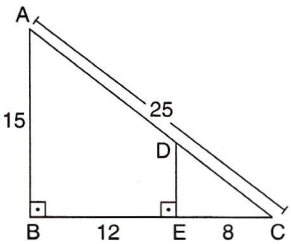
8 Assinale V ou F:

a) Todo triângulo eqüilátero é também eqüiângulo.
b) Todos os triângulos eqüiláteros são semelhantes.
c) Todos os triângulos isósceles são semelhantes.
d) Todos os triângulos que possuem ângulos medindo α e β (fixos) são semelhantes.
e) Todos os losangos são semelhantes.

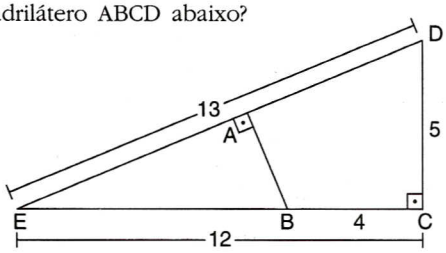
9 Dois triângulos isósceles e retângulos são tais que a hipotenusa de um mede o dobro da hipotenusa do outro. Ache a razão entre:

a) seus perímetros.
b) suas áreas.

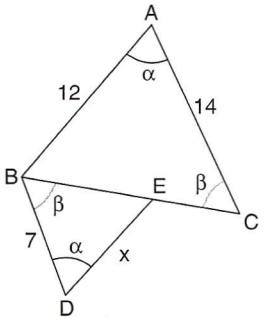
10 a) Que parcela da área do triângulo ABC é ocupada pelo triângulo CDE?
b) Qual é a razão entre a área do trapézio ABDE e a do triângulo CDE?



11 Qual é o perímetro do quadrilátero ABCD abaixo?



12



Sabendo que $\triangle ABC \sim \triangle DEB$, determine:

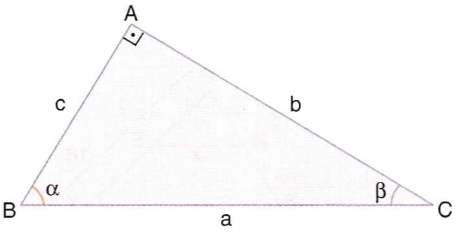
a) a medida x.

b) a razão $\frac{BE}{EC}$.

c) a razão de semelhança entre as áreas (da menor para a maior) dos triângulos.

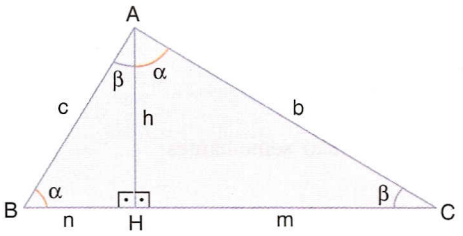
3 Relações métricas no triângulo retângulo

Todo triângulo retângulo possui dois ângulos agudos complementares e um ângulo reto, ao qual se opõe o seu maior lado, chamado hipotenusa; os outros dois lados são denominados catetos.



a: hipotenusa
b, c: catetos
$\alpha + \beta = 90°$

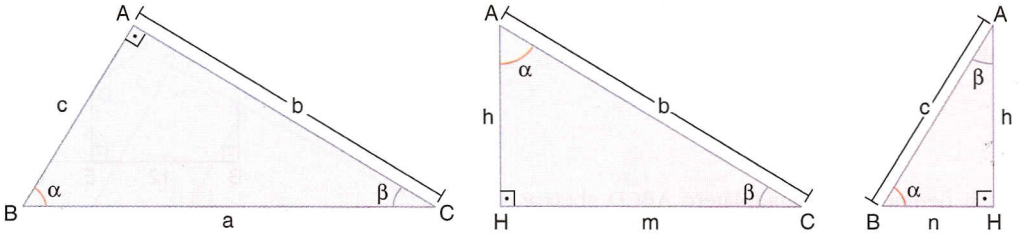
A perpendicular a $\overline{BC}$, traçada por A, é a altura h, relativa à hipotenusa do triângulo.



BH = n e CH = m são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Observando as medidas dos ângulos, pode-se concluir pela semelhança entre os três triângulos formados:

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \sim \triangle HBA$$



Considerando a semelhança entre os dois primeiros triângulos:

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = am \quad \text{(I)} \\ \quad\ \text{e} \\ ah = bc \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Pela semelhança entre o primeiro e o terceiro triângulos:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = an \quad (I)$$

Considerando agora a semelhança entre os dois últimos triângulos, podemos escrever:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \quad (III)$$

Interpretando

Em todo triângulo retângulo:

(I) O quadrado de cada cateto vale o produto da sua projeção sobre a hipotenusa pela hipotenusa.

(II) O produto da hipotenusa pela altura relativa a ela vale o produto dos catetos.

(III) O quadrado da altura relativa à hipotenusa vale o produto entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Lembrando que $a = m + n$ e considerando ainda as relações de (I), temos:

$$\left.\begin{array}{l} am = b^2 \\ an = c^2 \end{array}\right\} +$$

$$am + an = b^2 + c^2 \Rightarrow a(m + n) = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad (IV)$$

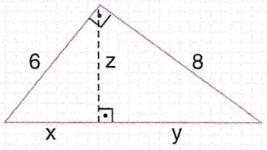
Essa última — e muito importante — relação é conhecida como teorema de Pitágoras, e é assim interpretada:

(IV) Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Exemplo 4

Um triângulo retângulo tem os catetos medindo 6 m e 8 m.

Encontremos as medidas da hipotenusa, da altura relativa a ela e das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



(IV): $(x + y)^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow x + y = 10$ (hipotenusa)

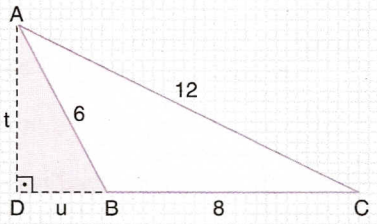
(I): $6^2 = 10 \cdot x \Rightarrow x = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$

$\Rightarrow y = 10 - \frac{18}{5} \Rightarrow y = \frac{32}{5}$

Por último (II): $10 \cdot z = 6 \cdot 8 \Rightarrow z = \frac{24}{5}$

Exemplo 5

Observe o triângulo ABC representado ao lado. Vamos encontrar a medida de sua altura t; como ABC é obtusângulo, é necessário prolongar, de um segmento de medida u, seu lado $\overline{BC}$ para construir a altura $\overline{AD}$.



Temos:

$$(IV): \left\{\begin{array}{l} \triangle ADC: 12^2 = (8 + u)^2 + t^2 \\ \triangle ADB: 6^2 = u^2 + t^2 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow 144 = 64 + 16u + \underbrace{u^2 + t^2}_{36}$$

$$16u = 44 \Rightarrow u = \frac{11}{4}$$

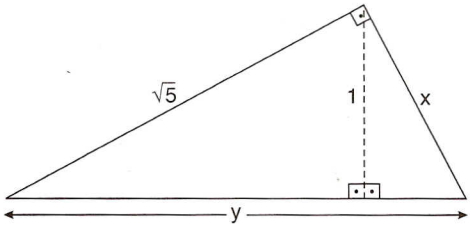
$$t^2 = 36 - \left(\frac{11}{4}\right)^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{455}}{4}$$

Exercícios

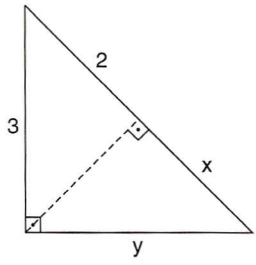
13 A altura relativa à hipotenusa determina sobre ela segmentos de medidas 3 cm e 4 cm. Quanto medem os catetos desse triângulo?

14 Determine x e y nas figuras seguintes:

a)



b)



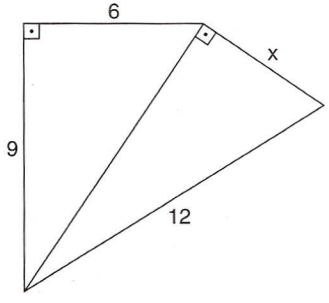
15 Qual é o perímetro de um quadrado de diagonal 2 cm?

16 Num triângulo retângulo ABC, a altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa $\overline{BC}$ mede 1,2 m. Sabendo que a medida da hipotenusa é 2,5 m, determine:

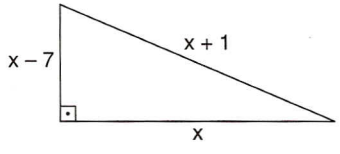
a) a razão de semelhança entre os lados dos triângulos ABH e ACH;
b) as áreas dos 3 triângulos assim construídos.

17 Determine o valor de x em cada caso:

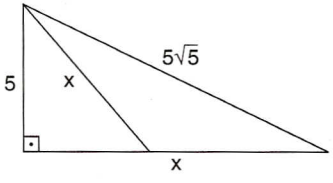
a)



b)

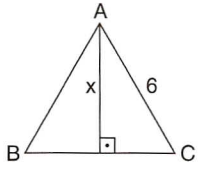


c)

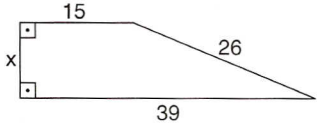


18 Calcule x nas figuras abaixo:

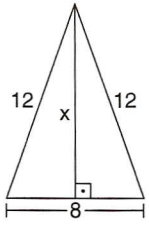
a) △ABC é eqüilátero



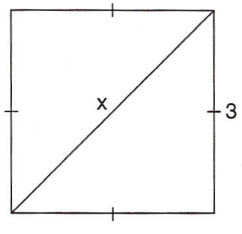
b)



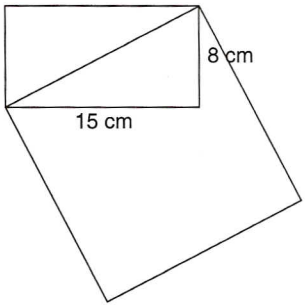
c)



d)

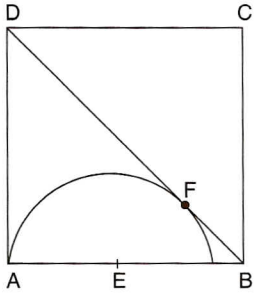


19 A diagonal do retângulo da figura coincide com o lado do quadrado. Determine a diagonal do quadrado.

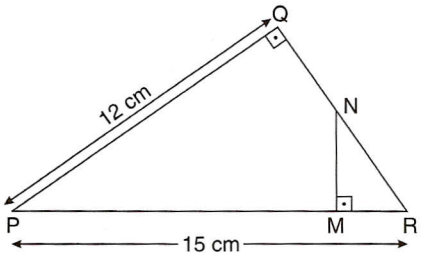


20 Uma escada de 5 m de comprimento está apoiada em uma parede, em um ponto distante 3,2 m do solo. Qual é a distância do pé da escada à parede?

21 (UF-MG) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado a e F é o ponto de tangência da diagonal BD com a semicircunferência de centro E. Calcule o raio da semicircunferência em função de a.



22 (UFF-RJ) O triângulo PQR é retângulo em Q, N é ponto médio de $\overline{QR}$ e $\overline{NM}$ é perpendicular a $\overline{PR}$, conforme a figura abaixo.



Determine a medida de $\overline{NM}$.

23 As medidas dos catetos de um triângulo diferem de 2 cm. Sabendo que um deles mede $(\sqrt{2} - 1)$ cm, qual é a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo?

24 (UF-PE) Uma embarcação está presa ao cais por um cabo horizontal de comprimento 2,9 m. Quando a maré baixar 2,0 m, qual será a distância, medida na horizontal, da embarcação ao cais?

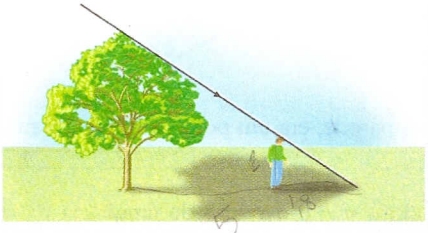
25 Numa certa cidade, um teleférico rudimentar passa sobre um pequeno rio para facilitar a mudança de margem aos turistas.

Em determinada situação, quando Dudu fazia a travessia, por falha na amarração do cabo de sustentação, a cadeira onde estava o menino se soltou. Graças à pronta intervenção do operador, que conseguiu puxar o cabo a tempo, interrompeu-se a queda, e o menino não chegou a tocar nas águas do rio.

Sabendo que no momento do final da queda, embora amedrontado, o menino conseguia enxergar os mastros das duas extremidades do percurso do teleférico sob ângulo reto e que, durante a queda, percorreu a mesma distância que antes dela, determine que percentual do caminho Dudu havia percorrido até o momento do acidente.

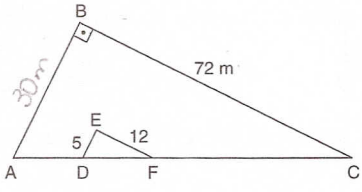
Testes de vestibulares

1 (Unama-PA) A incidência dos raios solares faz com que os extremos das sombras do homem e da árvore coincidam. O homem tem 1,80 m de altura e sua sombra mede 2 m. Se a sombra da árvore mede 5 m, a altura mede:



a) 6,3 m
b) 5,4 m
c) 4,5 m
d) 3,6 m
e) 2,7 m

2 (Covest-PE) A figura abaixo ilustra dois terrenos planos. Suponha que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, respectivamente, a $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ e que *A*, *D*, *F*, *C* são pontos colineares.

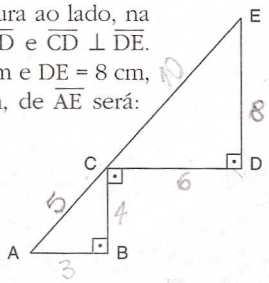


Qual a distância AC, em metros:

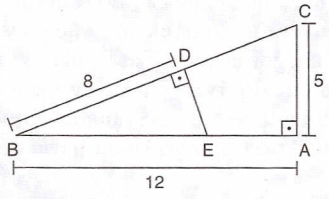
a) 75
b) 76
c) 78
d) 79
e) 80

3 (UF-CE) Considere a figura ao lado, na qual $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ e $\overline{CD} \perp \overline{DE}$. Se AB = 3 cm, BC = 4 cm e DE = 8 cm, então a medida, em cm, de $\overline{AE}$ será:

a) 17
b) 15
c) 13
d) 11
e) 6



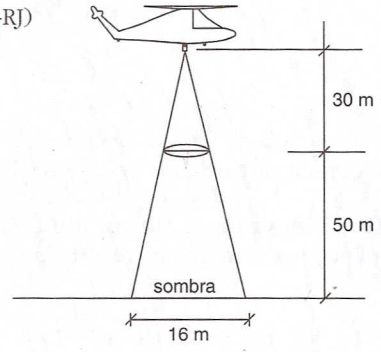
4 (Unifor-CE) Na figura abaixo, as medidas estão dadas em centímetros.



O comprimento do segmento $\overline{DE}$ é, em centímetros, aproximadamente igual a:

a) 2,4
b) 3,3
c) 3,5
d) 3,9
e) 4,0

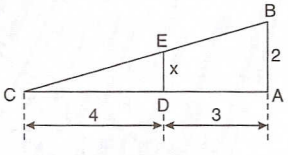
5 (Unirio-RJ)



Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do exército, situado aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura acima. Sendo assim, pode-se afirmar que o raio do disco voador mede, em metros, aproximadamente:

a) 3,0
b) 3,5
c) 4,0
d) 4,5
e) 5,0

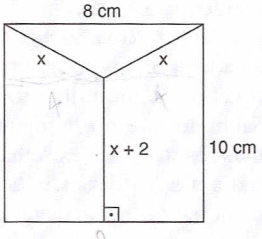
6 (UnG-SP) Na figura abaixo, o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{DE}$. O valor de *x* é:



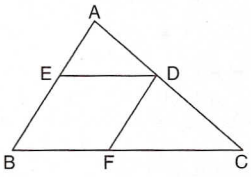
a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{8}{3}$
c) $\frac{2}{7}$
d) $\frac{8}{7}$
e) 1

7 (UPE-PE) A figura abaixo representa um retângulo de lados 10 cm e 8 cm. Podemos afirmar que o valor de *x*, em cm, é:

a) 4
b) 4,5
c) 5
d) 6
e) 5,5



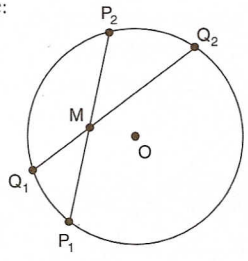
8 (UF-MG) Observe a figura:



Nela, AB = 8, BC = 12 e BFDE é um losango inscrito no triângulo ABC. A medida do lado do losango é:

a) 4
b) 4,8
c) 5
d) 5,2

9 (UE-CE) A circunferência da figura tem centro no ponto O e M é o ponto de interseção das cordas $\overline{P_1P_2}$ e $\overline{Q_1Q_2}$. Se $P_1M = 4$ cm, $MP_2 = (k + 1)$ cm, $Q_1M = 3$ cm e $MQ_2 = (3k - 7)$ cm, então a corda $\overline{Q_1Q_2}$, em cm, mede:

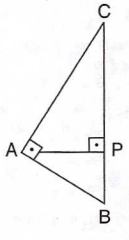


a) 5
b) 8
c) 11
d) 14

10 (UF-RN) Uma escada de 13,0 m de comprimento encontra-se com a extremidade superior apoiada na parede vertical de um edifício e a parte inferior apoiada no piso horizontal desse mesmo edifício, a uma distância de 5,0 m da parede. Se o topo da escada deslizar 1,0 m para baixo, o valor que *mais se aproxima* de quanto a parte inferior escorregará é:

a) 1,0 m b) 1,5 m c) 2,0 m d) 2,6 m

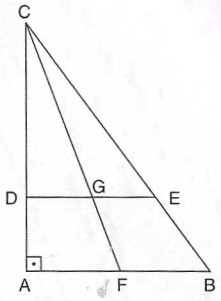
11 (Unirio-RJ) Na figura abaixo, $\frac{PB}{PC} = \frac{1}{3}$. Se PA = 12 cm, o perímetro do triângulo APC, em cm, é igual a:



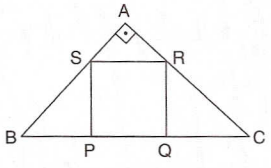
a) $6\sqrt{3}$
b) $6(2 + \sqrt{3})$
c) $12(3 + \sqrt{3})$
d) $24(1 + \sqrt{3})$
e) $48\sqrt{3}$

12 (Fuvest-SP) Na figura, ABC é um triângulo retângulo de catetos AB = 4 e AC = 5. O segmento $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AB}$, F é um ponto de $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{CF}$ intercepta $\overline{DE}$ no ponto G, com CG = 4 e GF = 2. Assim, a área do triângulo CDE é:

a) $\frac{16}{3}$
b) $\frac{35}{6}$
c) $\frac{39}{8}$
d) $\frac{40}{9}$
e) $\frac{70}{9}$

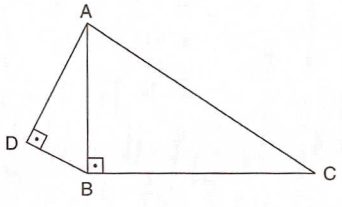


13 (Fuvest-SP) Na figura abaixo, ABC é um triângulo isósceles e retângulo em A e PQRS é um quadrado de lado $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Então, a medida do lado $\overline{AB}$ é:



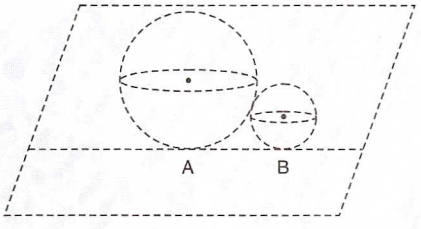
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

14 (Mackenzie-SP) Na figura, AC = 2 AB = 4 DB. A razão entre as medidas de $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$ é:



a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

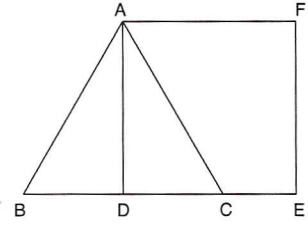
15 (Fuvest-SP) No jogo de bocha, disputado num terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de outra menor, de raio 4. Num lançamento, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas, conforme ilustra a figura abaixo. A distância entre os pontos A e B, em que as bolas tocam o chão, é:



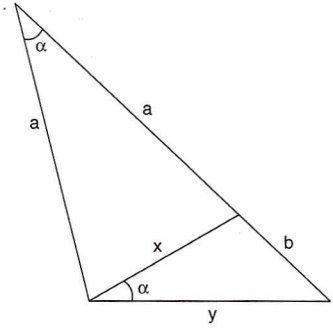
a) 8
b) $6\sqrt{2}$
c) $8\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $6\sqrt{3}$

Desafios

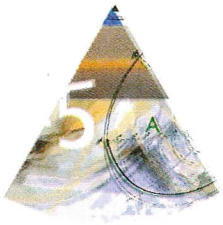
1 Encontre a medida de $\overline{CE}$, sabendo que a diagonal do quadrado ADEF mede 6 cm e que o triângulo ABC é eqüilátero.



2 Determine y – x em função de *a* e *b*.



Paul Schulenburg/Stock Photos



12

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

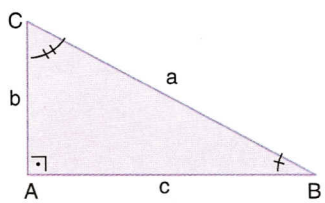
1 ○ Introdução

No capítulo anterior foram estudadas relações entre os lados — e outros elementos lineares — dos triângulos retângulos. A Trigonometria trata também dos ângulos dos triângulos; assim, separamos o presente capítulo para o estudo geral dos elementos dos triângulos *retângulos* e o próximo capítulo para triângulos quaisquer.

2 ○ Razões trigonométricas

Seno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o *seno* de um ângulo agudo é dado pelo quociente (razão) entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa.



$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{hipotenusa}}$$

No caso, temos:

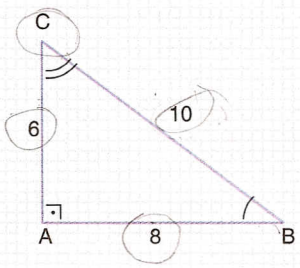
$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \text{ e sen } \hat{C} = \frac{c}{a}$$

Exemplo 1

Seja o triângulo retângulo ABC, de catetos b = 6 cm e c = 8 cm. Por Pitágoras, temos que a hipotenusa $\overline{BC}$ mede 10 cm; os senos dos ângulos agudos são dados por:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{6 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{8 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = \frac{4}{5}$$

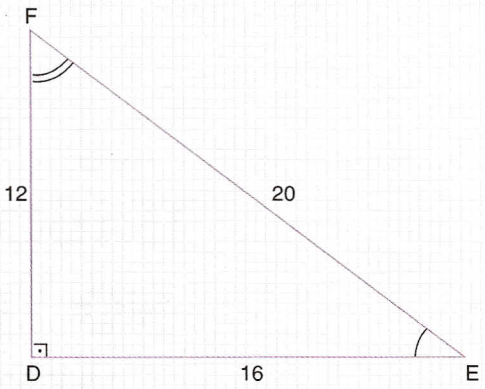


Exemplo 2

Tomando agora o triângulo DEF, de catetos 12 cm e 16 cm, e hipotenusa 20 cm, podemos notar que:

$$\text{sen } \hat{E} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen } \hat{F} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$



É fácil notar que o triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC do exemplo anterior (lados proporcionais); portanto, os triângulos possuem os ângulos congruentes:

$\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$, além de sen $\hat{B}$ = sen $\hat{E}$ e sen $\hat{C}$ = sen $\hat{F}$

Independentemente das medidas dos lados dos triângulos (*tamanhos* dos triângulos), os senos de ângulos congruentes se mantêm. Isso sugere que, para cada ângulo agudo, existe *um determinado* valor para o seu seno.

A tabela que segue mostra, para cada ângulo agudo x, o valor correspondente de sen x.

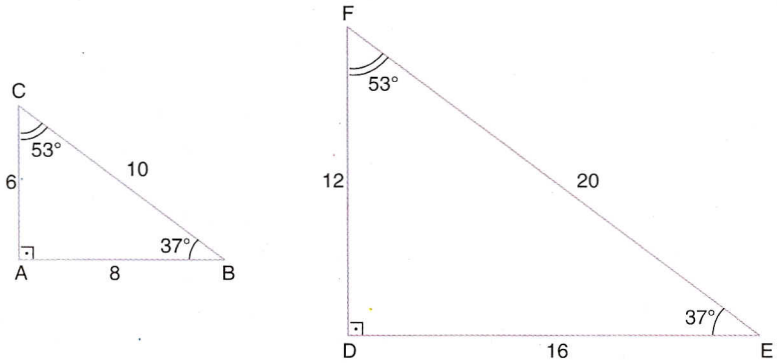
Ângulo	1°	2°	3°	...	36°	37°	38°	...	52°	53°	...	88°	89°
Seno	0,01745	0,03490	0,05234	...	0,58779	0,60182	0,61566	...	0,78801	0,79864	...	0,99939	0,99985

Como é possível notar, à proporção que *aumenta* a medida do ângulo agudo, *cresce* também — não linearmente — o valor do seno do ângulo agudo.

Assim, considerando os triângulos apresentados nos exemplos 1 e 2, observamos que o ângulo que mais se aproxima de $\hat{B}$ e $\hat{E}$ é o de 37° e, conseqüentemente, o valor mais aproximado para os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{F}$ seria de 90° – 37° = 53°.

De fato, sen $\hat{C}$ = sen $\hat{F} = \frac{4}{5}$ = 0,8. Pela tabela, teríamos $\hat{C} = \hat{F} \cong 53°$.

Desse modo, os triângulos dos exemplos teriam conhecidos todos os seus elementos:



É importante reconhecer o caráter biunívoco da tabela:

A cada ângulo agudo corresponde um único valor do seno e, reciprocamente, a cada valor do seno corresponde um único ângulo agudo.

Observação

A tabela completa, contendo, além do seno de cada ângulo agudo (medido de grau em grau), as outras razões trigonométricas que veremos a seguir, encontra-se na página 231.

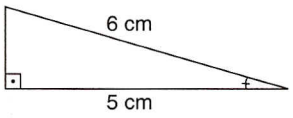
Exercícios

Consulte a tabela trigonométrica quando necessário.

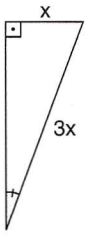
1 Sendo dadas as medidas dos catetos de um triângulo retângulo, 5 m e 8 m, calcule o valor do seno de cada ângulo agudo do triângulo.

2 Determine o seno do ângulo agudo assinalado em cada caso:

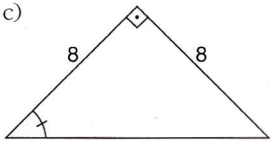
a)



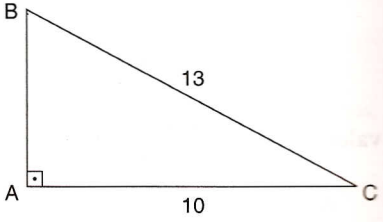
b)



c)

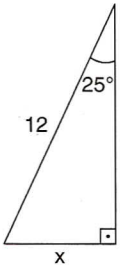


3 No triângulo ao lado, determine o seno de cada ângulo agudo e, a seguir, as medidas aproximadas dos ângulos do triângulo.

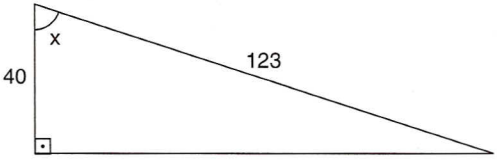


4 Determine o valor de x em cada caso:

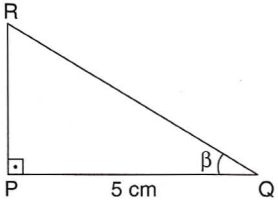
a)



b)

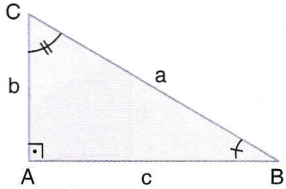


5 Dado sen $\beta = 0{,}4$, determine a medida da hipotenusa do triângulo PQR e o valor do seno do outro ângulo agudo.



Cosseno de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, o *cosseno* de um ângulo agudo é dado pela razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa.



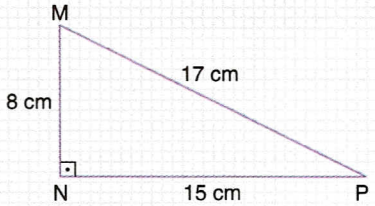
$$\cos x = \frac{\text{cateto adjacente a } x}{\text{hipotenusa}}$$

No caso, temos:

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \text{ e } \cos \hat{C} = \frac{b}{a}$$

Exemplo 3

Para calcular os valores dos cossenos dos ângulos agudos do triângulo MNP, fazemos:

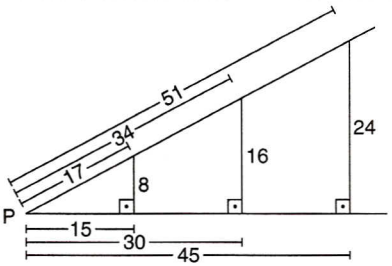


$$\cos \hat{M} = \frac{8 \text{ cm}}{17 \text{ cm}} = \frac{8}{17}$$

$$\cos \hat{P} = \frac{15 \text{ cm}}{17 \text{ cm}} = \frac{15}{17}$$

Analogamente ao seno, independentemente das medidas dos lados dos triângulos, os cossenos de ângulos congruentes se mantêm; de modo geral:

$$\cos \hat{P} = \frac{15}{17} = \frac{30}{34} = \frac{45}{51} = \ldots = 0{,}8$$



Assim, justifica-se também a existência de uma tabela que associa a cada ângulo agudo x o valor correspondente de cos x.

Ângulo	1°	2°	3°	...	36°	37°	38°	...	52°	53°	...	88°	89°
Cosseno	0,99985	0,99939	0,99863	...	0,80903	0,79864	0,78801	...	0,61566	0,60182	...	0,03490	0,01745

Calculando agora os senos dos ângulos agudos do mesmo triângulo do exemplo 3, temos:

$$\underbrace{\text{sen } \hat{P} = \frac{8}{17} = \cos \hat{M}}$$

$$\underbrace{\text{sen } \hat{M} = \frac{15}{17} = \cos \hat{P}}$$

Lembrando que a soma dos ângulos agudos de um triângulo retângulo vale 90° e considerando as igualdades assinaladas acima, podemos enunciar uma propriedade envolvendo senos e cossenos:

$$\text{sen } x = \cos (90° - x) \quad \text{ou} \quad \cos x = \text{sen } (90° - x)$$

Constatando esse fato na tabela completa de razões trigonométricas, verificamos, por exemplo, que:

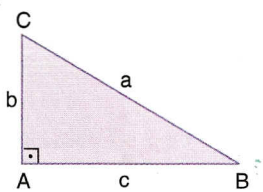
$$\text{sen } 40° = 0{,}64279 = \cos 50°$$
$$\text{sen } 50° = 0{,}76604 = \cos 40°$$

Observação

Serão estudadas no capítulo 14 as razões trigonométricas dos ângulos não agudos. No presente capítulo, quando necessário, use sen 90° = 1 e cos 90° = 0.

3 ○ Relação fundamental I

Seja o triângulo retângulo ABC ao lado.
Sabe-se, pelo teorema de Pitágoras, que $b^2 + c^2 = a^2$.



Dividindo, membro a membro, por a^2, obtemos:

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{sen } \hat{B})^2 + (\cos \hat{B})^2 = 1 \quad \text{ou} \quad (\cos \hat{C})^2 + (\text{sen } \hat{C})^2 = 1$$

De maneira geral, podemos escrever, para um ângulo x qualquer:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \ ,$$

que é chamada *relação fundamental I.*

Observação

Convém notar que $\text{sen}^2 x = (\text{sen } x)^2 \neq \text{sen } x^2$.

Exemplo 4

Tomemos o ângulo de 20° e comprovemos, mediante o uso da tabela, a relação fundamental I. Temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 20° = 0{,}34202 \Rightarrow \text{sen}^2\ 20° = 0{,}1169776 \\ \text{e} \\ \cos 20° = 0{,}93969 \Rightarrow \cos^2 20° = 0{,}8830173 \end{array}\right\} \text{sen}^2\ 20° + \cos^2 20° = 0{,}9999949 \cong 1$$

Dado o valor de uma razão trigonométrica, a relação fundamental I permite que achemos o valor da outra razão do mesmo ângulo.

Exemplo 5

Sendo $\cos x = 0{,}1909$, $0° < x < 90°$, para determinarmos sen x basta fazer:

$$\text{sen}^2 x + 0{,}1909^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } x = +\sqrt{1 - 0{,}1909^2} \Rightarrow \text{sen } x = 0{,}9816$$

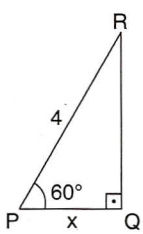
Confira na tabela: $\text{sen } x = 0{,}9816 \Rightarrow x = 79°$.

Exercícios

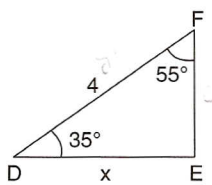
Consulte a tabela trigonométrica quando necessário.

6 Determine o valor de x em cada caso:

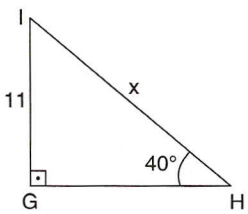
a)



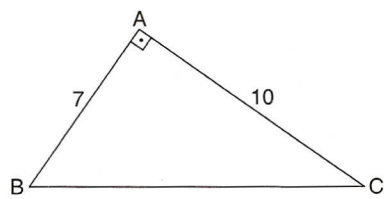
b)



c)



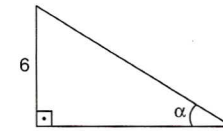
7 No triângulo ao lado, calcule $\cos \hat{B}$, $\text{sen } \hat{C}$, $\cos \hat{C}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.



8 Compare o triângulo ABC do exercício anterior com o triângulo DEF do exercício 6. O que se pode afirmar sobre eles?

9 Dado $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$, ache o seno do ângulo x. A seguir, determine x.

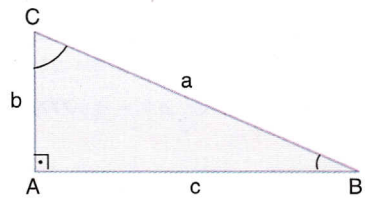
10 Sendo $\cos \alpha = 0{,}3$, determine $\operatorname{sen} \alpha$ e a medida da hipotenusa do triângulo ao lado.



4 ○ Outra razão trigonométrica

Tangente de um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, a *tangente* de um ângulo agudo é dada pela razão entre o cateto oposto a esse ângulo e o cateto adjacente a ele.



$$\operatorname{tg} x = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{cateto adjacente a } x}$$

No caso, temos:

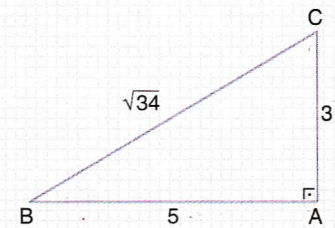
$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \text{ e } \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b}$$

Exemplo 6

Vamos obter a tangente de cada um dos ângulos agudos do triângulo ABC ao lado.

Temos:

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{5}{3}$$



Notemos que $\operatorname{tg} \hat{B}$ e $\operatorname{tg} \hat{C}$ são inversas uma da outra.

Assim, lembrando que $\hat{B} + \hat{C} = 90°$, podemos escrever, de modo geral:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} (90° - x)} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} (90° - x) = 1$$

5 ○ Relação fundamental II

Retomemos a expressão $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}$, do início do item 4. Se dividirmos simultaneamente o numerador e o denominador da fração por a (medida da hipotenusa do triângulo ABC), obteremos $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b/a}{c/a}$, que significa $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{\operatorname{sen} \hat{B}}{\cos \hat{B}}$. De modo geral, escreve-se:

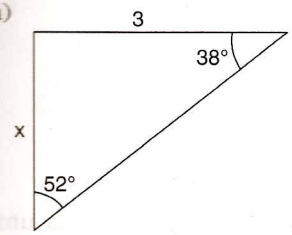
$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \text{ para todo ângulo agudo } x$$

Exercícios

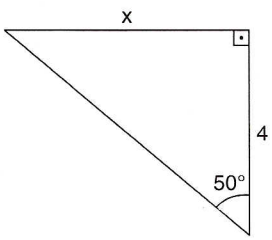
Consulte a tabela trigonométrica quando necessário.

11 Determine x em cada caso:

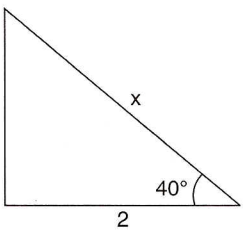
a)



b)

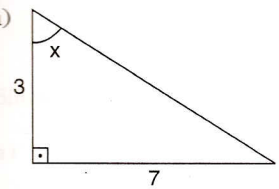


c)

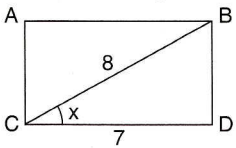


12 Determine x em cada caso:

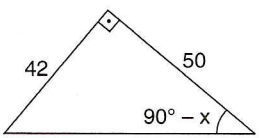
a)



b) ABCD é retângulo.



c)

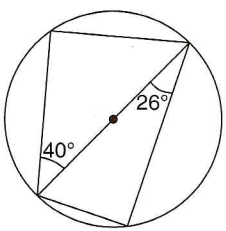


13 Sendo x um ângulo agudo tal que $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$, determine $\operatorname{tg} x$.

14 Num triângulo retângulo, um dos catetos mede a terça parte da hipotenusa. Calcule a tangente do menor ângulo do triângulo.

15 Comprove, utilizando a tabela, as relações fundamentais I e II, sobre um ângulo de 25°.

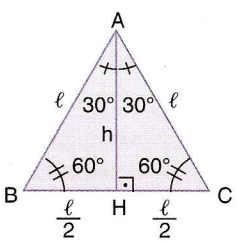
16 Encontre a medida do menor cateto que aparece na figura, na qual está uma circunferência de raio 2 cm.



6 ○ Ângulos notáveis

Vejamos agora algumas considerações importantes com relação aos chamados *ângulos notáveis* (30°, 45° e 60°).

► **1ª** Há triângulos retângulos que apresentam um ângulo agudo de 30° (conseqüentemente, o outro ângulo agudo é de 60°). Procuremos calcular os valores das razões trigonométricas de 30° e 60°. Para tanto, construiremos um triângulo eqüilátero ABC de lado ℓ, traçando sua altura $\overline{AH}$, de medida h.



Temos:

$$BH = CH = \frac{\ell}{2}$$

$$B\hat{A}H = C\hat{A}H = 30°$$

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no $\triangle AHC$, obtemos:

$$h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Podemos, agora, calcular as razões procuradas:

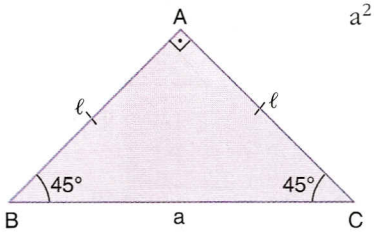
- $\text{sen } 30^\circ = \frac{\ell/2}{\ell} \Rightarrow \quad \text{sen } 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

- $\cos 30^\circ = \frac{h}{\ell} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell} \Rightarrow \quad \cos 30^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{\ell/2} = \frac{\ell\sqrt{3}/2}{\ell/2} \Rightarrow \quad \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$

- $\text{tg } 30^\circ = \frac{1}{\text{tg } 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \quad \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

▶ **2ª** Há triângulos retângulos que apresentam os dois ângulos agudos medindo, cada um, 45°. Vejamos o triângulo retângulo isósceles ABC, de catetos iguais a ℓ e hipotenusa a. Calcularemos os valores das razões trigonométricas de 45°.
Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:



$$a^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2 \Rightarrow a = \ell\sqrt{2}$$

Assim:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Temos também $\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{sen } 45^\circ}{\cos 45^\circ} \Rightarrow \quad \text{tg } 45^\circ = 1$.

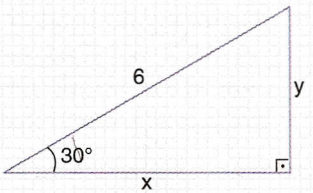
Resumindo, temos a seguinte tabela:

Ângulo / Razão	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo 7

Para determinar o valor de x no triângulo ao lado, fazemos:

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$



Para achar o valor de x basta:

aplicar o teorema de Pitágoras *ou* utilizar $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$.

$$y^2 + (3\sqrt{3})^2 = 6^2 \qquad \frac{1}{2} = \frac{y}{6}$$

$$y = 3$$

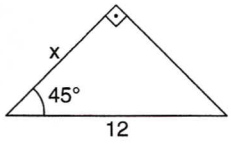
"Em todo triângulo retângulo que possui um ângulo de 30°, o cateto oposto a esse ângulo mede a metade da hipotenusa."

Exercícios

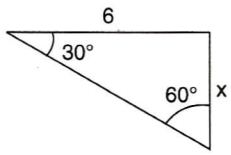
Consulte a tabela trigonométrica quando necessário.

17 Encontre o valor de x em cada caso:

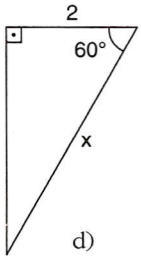
a)



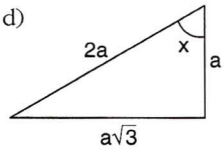
b)



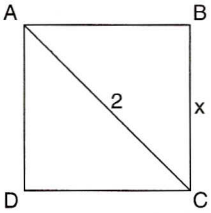
c)



d)



e)



ABCD é quadrado

18 Simplifique as expressões:

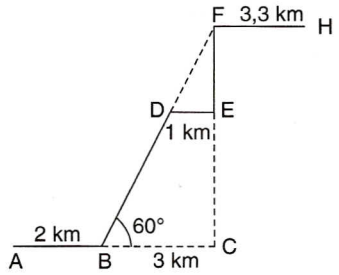
a) $\dfrac{1 - \cos^2 40^\circ}{\text{sen}^2\ 40^\circ}$

b) $\dfrac{1 - \text{sen}^2\ 10^\circ}{\cos^2 80^\circ}$

19 α e β, complementares, são ângulos de um triângulo retângulo de catetos 30 cm e 40 cm. Determine a medida da hipotenusa do triângulo e a tangente de α.

20 Determine o ângulo formado entre um mastro vertical de 25 m e um fio de arame de 30,5 m, preso pelas extremidades no solo, horizontal, e no topo do mastro.

21 (Unesp-SP) Ao chegar de viagem, uma pessoa tomou um táxi no aeroporto para se dirigir ao hotel. O percurso feito pelo táxi, representado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FH}$, está esboçado na figura, onde o ponto A indica o aeroporto, o ponto H indica o hotel, BCF é um triângulo retângulo com o ângulo reto em C, o ângulo no vértice B mede 60° e $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Assumindo o valor $\sqrt{3} = 1{,}7$ e sabendo-se que AB = 2 km, BC = 3 km, DE = 1 km e FH = 3,3 km, determine:

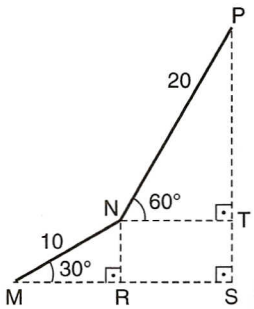


a) as medidas dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{EF}$ em quilômetros;

b) o preço que a pessoa pagou pela corrida (em reais), sabendo-se que o valor da corrida do táxi é dado pela função $y = 4 + 0{,}8x$, sendo x a distância percorrida em quilômetros e y o valor da corrida em reais.

22 (UF-SC) Dois pescadores, P_1 e P_2, estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver um bote B na outra margem. Sabendo que $P_1P_2 = 63$ m, os ângulos $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$ e $B\hat{P}_2P_1 = \beta$ e que tg $\alpha = 2$ e tg $\beta = 4$, determine a distância (em metros) entre as margens.

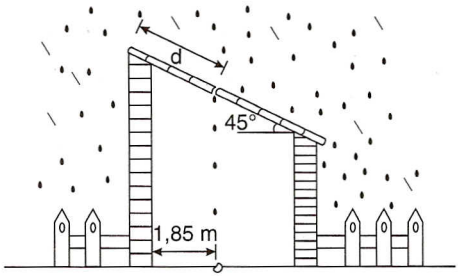
23 (UF-RN) Ao se tentar fixar as extremidades de um pedaço de arame reto, de 30 m de comprimento, entre os pontos M e P de um plano, o arame, por ser maior do que o esperado, entortou, como mostra a figura ao lado. A partir desses dados, calcule, em metros:



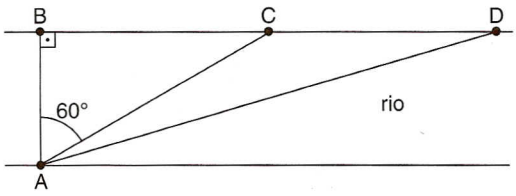
a) o comprimento dos segmentos MS e SP;

b) quanto o arame deveria medir para que tivesse o mesmo tamanho do segmento MP.

24 (UF-MS) Uma telha de um galinheiro quebrou. Em dias chuvosos, uma goteira produz no chão, embaixo da telha quebrada, uma pequena poça de água, a 1,85 m de uma das paredes do galinheiro, conforme a figura. Considerando que a espessura dessa parede é 15 cm e que d é a distância entre o ponto mais alto do telhado e a quebra da telha, calcule, em metros, $d^2 + 20$.



25 (Unirio-RJ)



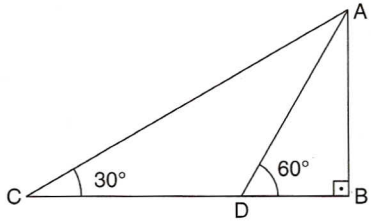
Considere a figura, que representa um rio de margens retas e paralelas, nesse trecho. Sabendo-se que AC = 6 e CD = 5, determine:

a) a distância entre B e D;

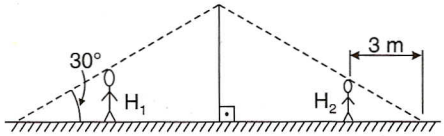
b) a área do triângulo ABD.

26 (Vunesp-SP) Na figura, os pontos C, D e B são colineares e os triângulos ABD e ABC são retângulos em B. Se a medida do ângulo $A\hat{D}B$ é 60° e a medida do ângulo $A\hat{C}B$ é 30°, demonstre que:

$$AD = DC = 2 \cdot DB$$



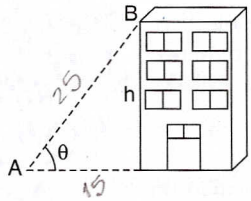
27 (Unirio-RJ)



Dois homens, H_1 e H_2, com 2 m e 1,5 m de altura, respectivamente, estão em pé numa calçada, em lados opostos de um poste de 5 m de comprimento, iluminados por uma lâmpada desse poste, como mostra a figura. Determine a distância (em metros) entre os homens.

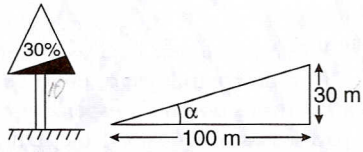
Testes de vestibulares

1 (UF-RN) Observe a figura abaixo e determine a altura h do edifício, sabendo que $\overline{AB}$ mede 25 m e cos θ = 0,6.



a) h = 22,5 m
b) h = 15 m
c) h = 18,5 m
d) 20 m

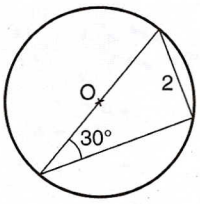
2 (Fund. Cultural de Araxá-MG) Dizemos que a declividade é de 30% se subirmos 30 m para uma distância horizontal de 100 m.



Qual é o ângulo α correspondente a uma declividade de 100%?

a) 100°
b) 50°
c) 1°
d) 90°
e) 45°

3 (Unifap-AP) Quando o maior lado de um triângulo inscrito em um círculo coincide com o diâmetro desse círculo, o triângulo é necessariamente retângulo. Assim sendo, na figura o raio do círculo de centro O é igual a:



a) 4 c) 2 e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}$

4 (Ucsal-BA) Um triângulo isósceles é tal que a medida dos ângulos de sua base é 30°. Se a altura relativa a essa base mede 1,5 cm, o perímetro desse triângulo, em centímetros, é:

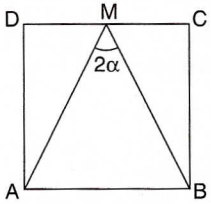
a) $6 + 3\sqrt{3}$ d) $3 + \sqrt{3}$

b) $3 + 3\sqrt{3}$ e) $\frac{6 + \sqrt{3}}{2}$

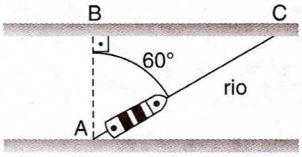
c) $6 + \sqrt{3}$

5 (Unisinos-RS) O lado do quadrado ABCD, da figura abaixo, mede a cm e M é ponto médio do lado $\overline{CD}$.
Nessas condições, o valor da tan α é:

a) 3
b) 2
c) $\frac{3}{2}$
d) 1
e) $\frac{1}{2}$



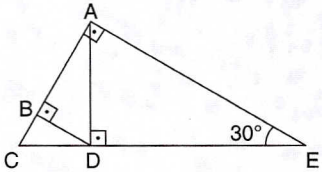
6 (Unama-PA) A figura abaixo representa um barco atravessando um rio, partindo de A em direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60°. Sendo a largura do rio de 120 m, a distância percorrida pelo barco até o ponto C, é:



a) $240\sqrt{3}$ m c) $80\sqrt{3}$ m e) $40\sqrt{3}$ m

b) 240 m d) 80 m

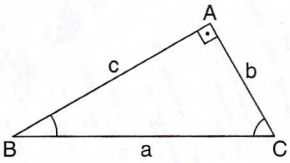
7 (UF-MG) Observe a figura.



Se a medida de $\overline{CE}$ é 80, o comprimento de $\overline{BC}$ é:

a) 20 b) 10 c) 8 d) 5

8 (UF-SE) Considere o triângulo retângulo ABC representado na figura abaixo, cujos lados têm as medidas indicadas.

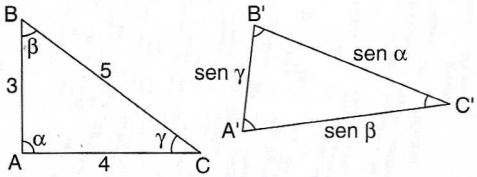


Se $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são as medidas dos ângulos internos do triângulo, é correto afirmar que $\frac{\text{sen } \hat{A} \cdot \cos \hat{C}}{\text{tg } \hat{B}}$ é igual a:

a) $\frac{c}{a}$ c) $\frac{b}{a}$ e) $\frac{a}{b}$

b) $\frac{c}{b}$ d) $\frac{b}{c}$

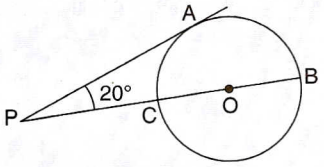
9 (UF-MA) Sejam ABC o triângulo, cujos lados medem 5 cm, 4 cm e 3 cm, respectivamente, e A'B'C' o triângulo cujos lados medem (sen α) cm, (sen β) cm e (sen γ) cm, conforme figura abaixo. Então a área de A'B'C' é igual a:



a) $\frac{6}{5}$ cm² c) $\frac{6}{25}$ cm² e) $\frac{5}{\sqrt{6}}$ cm²

b) $\frac{25}{6}$ cm² d) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ cm²

10 (Unisinos-RS) Por um ponto externo P, traçam-se uma secante $\overline{PB}$ e uma tangente $\overline{PA}$ à circunferência (conforme figura abaixo).



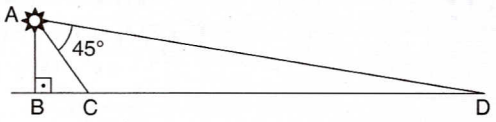
A medida aproximada, em cm, da secante $\overline{PB}$ é:

a) 15,7 c) 17,7 e) 19,8

b) 16,1 d) 18,4

Dados: OC = 4 cm
sen 20° = 0,342
cos 20° = 0,940
tg 20° = 0,364

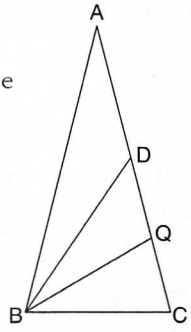
11 (UE-RJ) Um holofote está situado no ponto A, a 30 metros de altura, no alto de uma torre perpendicular ao plano do chão. Ele ilumina, em movimento de vaivém, uma parte desse chão, do ponto C ao ponto D, alinhados à base B, conforme demonstra a figura abaixo:
(Use a tabela.)



Se o ponto B dista 20 metros de C e 150 metros de D, a medida do ângulo $C\hat{A}D$ corresponde a:

a) 60° b) 45° c) 30° d) 15°

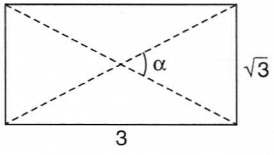
12 (UF-MG)
Nesta figura, tem-se:
AB = AC = 6, BC = BD = 4 e $C\hat{B}Q = Q\hat{B}D$.
A tangente do ângulo $C\hat{B}Q$ é:



a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

13 (Mackenzie-SP) No retângulo da figura, cos α vale:



a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$

14 (Cefet-PR) Calculando o valor de x na figura a seguir, obtém-se:

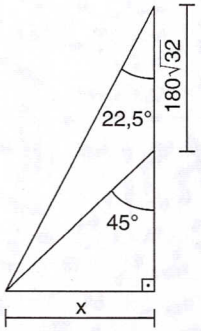
a) $720\sqrt{2}$

b) 720

c) $360\sqrt{2}$

d) 360

e) $180\sqrt{2}$

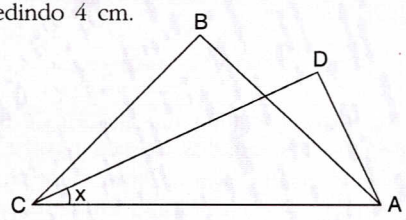


15 (Unopar-PR) A expressão $(\text{sen } 89^\circ + \cos 1^\circ)^2 + (\text{sen } 1^\circ + \cos 89^\circ)^2$ é igual a:

a) 1 c) 3 e) 5

b) 2 d) 4

16 (U. F. Viçosa-MG) Na figura abaixo, os triângulos são retângulos, com hipotenusa comum $\overline{AC}$, sendo ABC um triângulo isósceles com catetos medindo 4 cm.

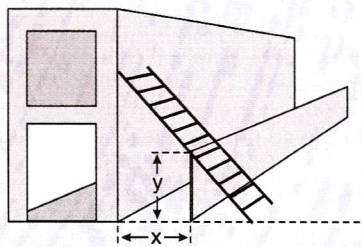


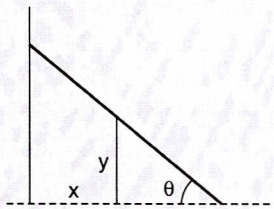
Se o cateto $\overline{AD}$ do triângulo ADC mede 2 cm, então o valor de tg x é:

a) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

b) $\sqrt{7}$ d) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

17 (UF-CE) Um muro com y metros de altura se encontra a x metros de uma parede de um edifício. Uma escada que está tocando a parede e apoiada sobre o muro faz um ângulo θ com o chão, sendo $\text{tg } \theta = \sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. Suponha que o muro e a parede são perpendiculares ao chão e que este é plano (veja figuras).





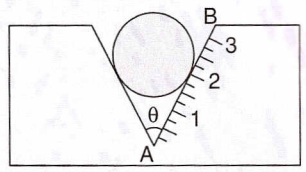
O comprimento da escada é:

a) $(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}$ d) $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$

b) $(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ e) $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$

c) $(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$

18 (UF-PR) Um instrumento para medir o diâmetro de pequenos cilindros consiste em um bloco metálico que tem uma fenda com o perfil em V contendo uma escala, conforme ilustração ao lado. O cilindro é colocado na fenda e a medida de seu diâmetro, em centímetros, é o número que na escala corresponde ao ponto de tangência entre o cilindro e o segmento AB. Ao construir a escala de um instrumento desses, o número 2 corresponde a um certo ponto de $\overline{AB}$. Sendo x a distância desse ponto ao ponto A, assinale V ou F nas afirmações seguintes:



a) x é igual a $\dfrac{2}{\text{tg }(\theta/2)}$ cm.

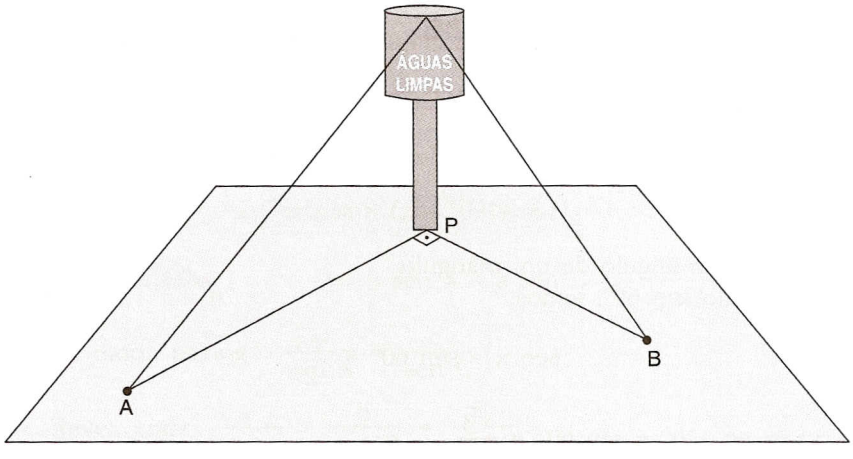
b) x é igual a $\dfrac{1}{\text{tg }(\theta/2)}$ cm.

c) Se a medida de θ for 90°, então x será igual a 2 cm.

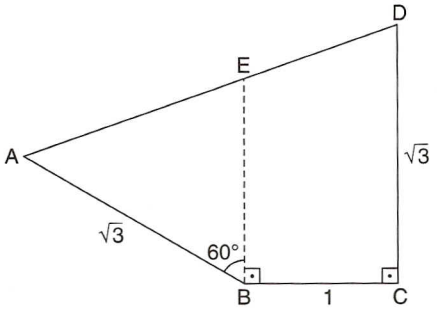
d) Quanto menor for o ângulo θ, maior será a distância x.

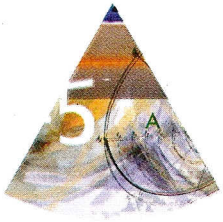
Desafios

1 (UF-MS) Uma caixa-d'água está localizada num ponto P de um terreno plano, conforme representado abaixo. Ela é avistada do ponto A sob um ângulo de 30° e do ponto B sob um ângulo de 45°. Sabendo-se que a medida do ângulo $A\hat{P}B$ é 90° e a distância entre os pontos A e B é 100 m, calcule, em metros, a altura da caixa-d'água.



2 (Fuvest-SP) No quadrilátero ABCD da figura ao lado, E é um ponto sobre o lado $\overline{AD}$ tal que o ângulo $A\hat{B}E$ mede 60° e os ângulos $E\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são retos. Sabe-se ainda que AB = CD = $\sqrt{3}$ e BC = 1. Determine a medida de $\overline{AD}$.





13

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

1 ○ Introdução

As propriedades estudadas até agora valem somente para os triângulos retângulos. Doravante vamos apresentar as propriedades que são válidas para quaisquer triângulos, sejam obliquângulos, sejam retângulos.

Embora tenhamos definido e utilizado três razões trigonométricas — seno, cosseno e tangente — exclusivamente para os ângulos agudos, elas se definem também para os outros tipos de ângulo. Tais definições e demais justificativas serão apresentadas no próximo capítulo, referente a funções circulares.

2 ○ Ângulos suplementares

Senos de dois ângulos suplementares

Os valores dos senos de dois ângulos suplementares coincidem, isto é,

$$\text{sen } (180^\circ - x) = \text{sen } x$$

sendo x a medida de um ângulo de um triângulo.

Por exemplo, sendo $x = 60^\circ$, temos:

$$\text{sen } x = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e $\text{sen } (180^\circ - x) = \text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cossenos de dois ângulos suplementares

Os valores dos cossenos de dois ângulos suplementares diferem apenas no sinal, ou seja:

$$\cos (180^\circ - x) = -\cos x$$

sendo x a medida de um ângulo de um triângulo.

Por exemplo, sendo $x = 45^\circ$, temos:

$$\cos x = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e $\cos (180^\circ - x) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Observação

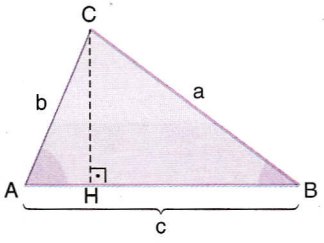
Para o caso particular de $x = 90^\circ$, temos: $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ e $\cos 90^\circ = 0$.

3 Lei dos senos ou teorema dos senos

Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles.

Demonstração:

a) Seja o triângulo ABC, acutângulo, e $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



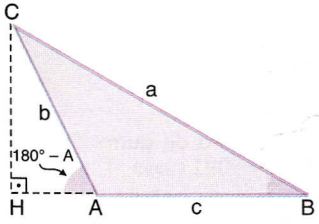
$$\left.\begin{array}{l} \triangle CAH: \operatorname{sen} A = \dfrac{CH}{b} \Rightarrow CH = b \operatorname{sen} A \\ \triangle CBH: \operatorname{sen} B = \dfrac{CH}{a} \Rightarrow CH = a \operatorname{sen} B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Procedendo de modo análogo: $\dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

Podemos escrever, então: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

b) Seja o triângulo ABC, obtusângulo em A, e $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



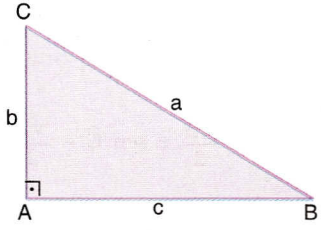
$$\left.\begin{array}{l} \triangle CAH: \operatorname{sen} (180^\circ - A) = \dfrac{CH}{b} = \operatorname{sen} A \Rightarrow CH = b \operatorname{sen} A \\ \triangle CBH: \operatorname{sen} B = \dfrac{CH}{a} \Rightarrow CH = a \operatorname{sen} B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Procedendo de modo análogo: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

Podemos escrever, então: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

c) Seja o triângulo ABC, retângulo. Temos:



$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} \Rightarrow a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \\ \operatorname{sen} C = \dfrac{c}{a} \Rightarrow a = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Por outro lado, $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} 90^\circ = 1$ e

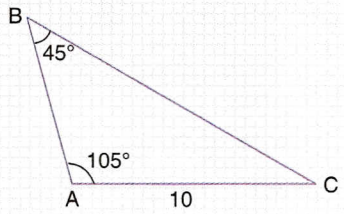
$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Como pudemos perceber nos três casos, em qualquer triângulo ABC temos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Exemplo 1

Seja o triângulo obtusângulo ABC da figura.
Calculemos AB e BC. Para isso, basta aplicar a lei dos senos:



$$\frac{BC}{\text{sen } 105^\circ} = \frac{AB}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{10}{\text{sen } 45^\circ}$$

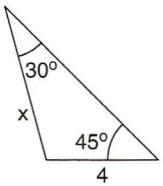
Mas sen 105° = sen (180° – 105°) = sen 75° = 0,96593. Assim:

$$\frac{BC}{0,96593} = \frac{AB}{0,5} = \frac{10}{0,70711} \Rightarrow BC \cong 13,66 \text{ e } AB \cong 7,07$$

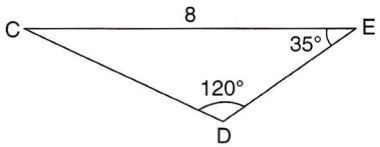
Exercícios

Consulte a tabela trigonométrica quando necessário.

1 Calcule x na figura:



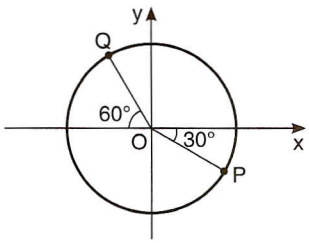
2 Determine as medidas de $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ no triângulo CDE da figura ao lado.



3 O triângulo ABC é isósceles, de vértice A, e um de seus ângulos vale o dobro de outro. Se $\overline{BC}$ mede 3 cm, determine as medidas dos lados congruentes.

4 As medidas dos ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética de razão 10°. Determine, em função do lado p, compreendido entre o maior e o menor ângulo, as medidas dos outros lados.

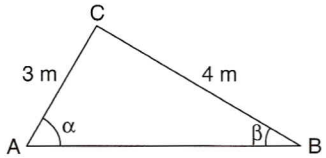
5 (UFF-RJ) Considere os pontos P e Q pertencentes à circunferência de centro na origem e raio 1, conforme representação ao lado. Determine a distância entre P e Q.



6 Encontre os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC em que $\hat{A} = 15^\circ$, sen $\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e sen $\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Em seguida, determine a medida do lado $\overline{AC}$, sendo AB = 7 cm.

7 (Mauá-SP) Num triângulo ABC, temos AC = 3 m, BC = 4 m e $\alpha = B\hat{A}C$.

a) Se AB = 3 m, calcule cos α.
b) Noutra hipótese, sendo $\beta = 60^\circ$, calcule sen α.

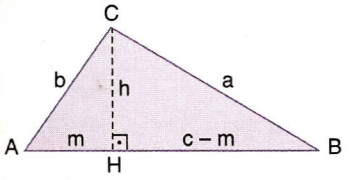


4 ○ Lei dos cossenos ou teorema dos cossenos

Em todo triângulo, o quadrado de qualquer um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois, diminuída do dobro do produto desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Demonstração:

a) Seja o triângulo ABC, acutângulo, e $\overline{CH} = h$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\left.\begin{array}{l} \triangle BCH: a^2 = h^2 + (c - m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 = b^2 - m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

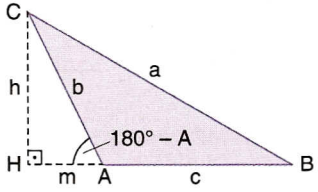
Mas $m = b \cos A$.

Assim: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Analogamente, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

b) Seja o triângulo ABC, obtusângulo em A, e $\overline{CH} = h$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.



$$\left.\begin{array}{l} \triangle BCH: a^2 = h^2 + (c + m)^2 \\ \triangle ACH: h^2 = b^2 - m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$$

Mas $m = b \cos (180° - A) = b (-\cos A) = -b \cos A$.

Assim: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Analogamente, podemos escrever:

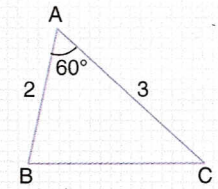
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

c) No caso de o triângulo ABC ser retângulo (em A, por exemplo), como $\cos 90° = 0$, verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90°$, que se reduz à expressão do teorema de Pitágoras. Para cada um dos dois ângulos agudos do triângulo (b e c) caberia uma demonstração análoga à do item a.

Como pudemos perceber nos três casos, em qualquer triângulo ABC temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Exemplo 2



Seja o triângulo ABC ao lado. Para determinar a medida de $\overline{BC}$, podemos aplicar a lei dos cossenos:

$$BC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

Tendo sido pedido o ângulo $\hat{B}$, poderíamos resolver o problema de dois modos:

lei dos senos

$$\frac{\text{sen } 60^\circ}{\sqrt{7}} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \cong 0{,}98$$

ou

lei dos cossenos

$$3^2 = 2^2 + \sqrt{7}^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \cos \hat{B}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos \hat{B} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \cong 0{,}19$$

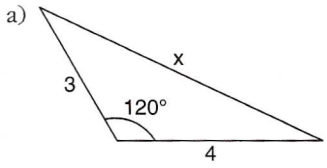
$$\hat{B} \cong 79^\circ$$

Exercícios

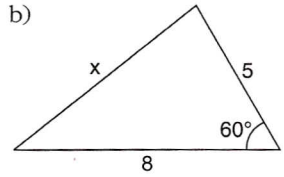
Consulte a tabela trigonométrica quando necessário.

8 Determine x em cada caso:

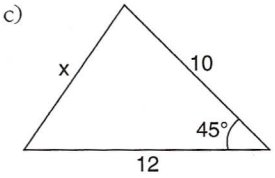
a)



b)

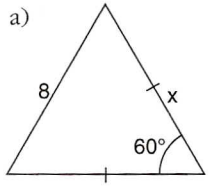


c)

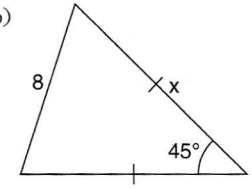


9 Determine o valor de x em cada caso:

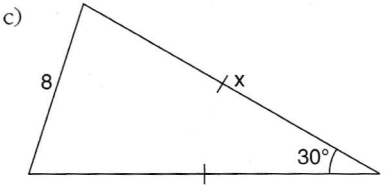
a)



b)

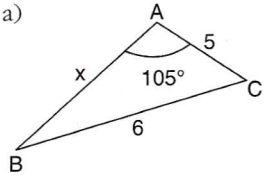


c)

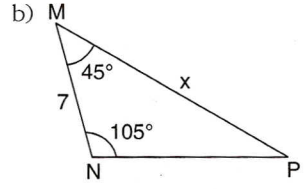


10 Determine x em cada caso:

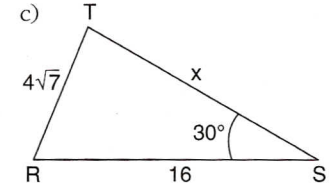
a)



b)



c)



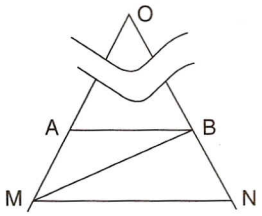
11 Mostre que é isósceles o triângulo que possui lados medindo 1 m e 2 m e, entre eles, um ângulo cujo cosseno vale $\frac{1}{4}$.

12 Ache o menor lado do triângulo que possui lados medindo 7 cm e 8 cm, com o ângulo compreendido entre eles apresentando seno igual a $\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

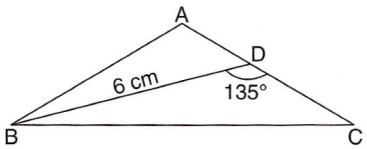
13 (Faap-SP) Determinar as distâncias dos pontos A e B ao ponto inacessível O, dados:

$$AB = \sqrt{20}\ ,\ MB = \sqrt{35}\ ,\ MA = \sqrt{5} \text{ e } A\hat{B}N = 135°$$

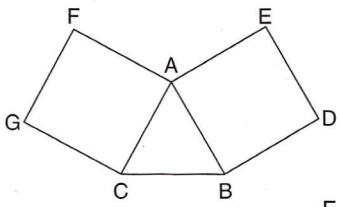
Obs.: O, A e M estão alinhados, o mesmo ocorrendo com O, B e N.



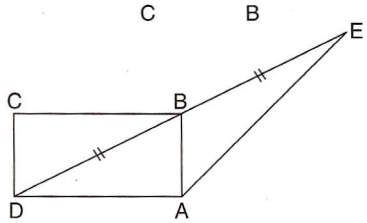
14 (EEM-SP) No triângulo isósceles ABC, $\hat{B} = \hat{C}$, a bissetriz $\overline{BD}$ forma ângulo de 135° com o lado $\overline{AC}$ e mede 6 cm, como mostra a figura. Calcule o comprimento do lado $\overline{AB}$.



15 (Unirio-RJ) Na figura ao lado, o triângulo ABC é eqüilátero de lado ℓ, ABDE e AFGC são quadrados. Calcule a distância DG, em função de ℓ.



16 (UF-MG) Na figura, B é o ponto médio do segmento $\overline{DE}$ e ABCD é um retângulo de lados DC = 1 e AD = 2. Determine AE.

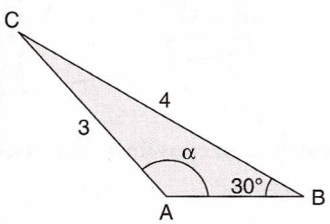


Testes de vestibulares

1 (UF-PI) Em um triângulo, um dos ângulos mede 60° e os lados adjacentes a este ângulo medem 1 cm e 2 cm. O valor do perímetro desse triângulo, em centímetros, é:

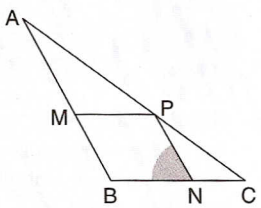
a) $3 + \sqrt{5}$
b) $5 + \sqrt{3}$
c) $3 + \sqrt{3}$
d) $3 + \sqrt{7}$
e) $5 + \sqrt{7}$

2 (UF-ES) No triângulo ABC da figura abaixo, o cosseno do ângulo obtuso α é igual a:



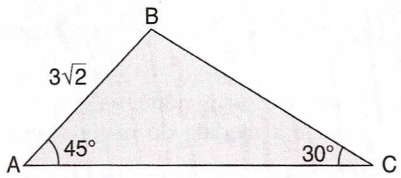
a) $\frac{1}{9}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$
e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3 (Fuvest-SP) No triângulo ABC, AB = 20 cm, BC = 5 cm e o ângulo $A\hat{B}C$ é obtuso. O quadrilátero MBNP é um losango de área 8 cm². A medida, em graus, do ângulo $B\hat{N}P$ é:



a) 15
b) 30
c) 45
d) 60
e) 75

4 (Ulbra-RS) A medida da soma dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo abaixo é:

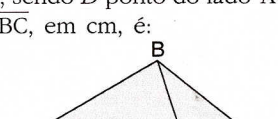


a) 14,2
b) 6
c) 8
d) $2\sqrt{3} + 6$
e) 16,2

5 (UF-PI) O perímetro de um paralelogramo cujas diagonais medem $8\sqrt{3}$ cm e 10 cm e formam um ângulo de 30° é:

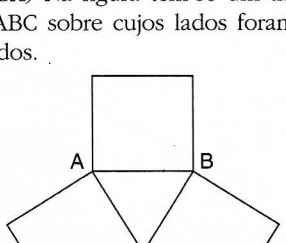
a) $2(8\sqrt{3} + 10)$ cm
b) $2(\sqrt{73} + \sqrt{13})$ cm
c) $2(\sqrt{3} + \sqrt{13})$ cm
d) $2(\sqrt{133} + \sqrt{13})$ cm
e) $2(\sqrt{233} + \sqrt{3})$ cm

6 (Fuvest-SP) Na figura a seguir, AD = 2 cm, AB = $\sqrt{3}$ cm, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 30° e BD = DC, sendo D ponto do lado $\overline{AC}$. A medida do lado $\overline{BC}$, em cm, é:



a) $\sqrt{3}$
b) 2
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{6}$
e) $\sqrt{7}$

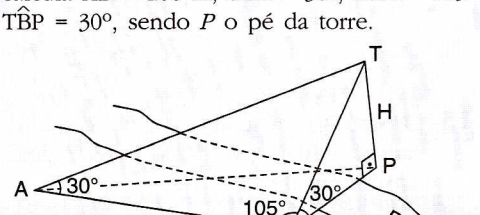
7 (Ucsal-BA) Na figura tem-se um triângulo eqüilátero ABC sobre cujos lados foram construídos quadrados.



Se o lado do triângulo mede 10 cm, qual é a distância de D a E?

a) $5\sqrt{2}$ cm
b) $5\sqrt{3}$ cm
c) 10 cm
d) $10\sqrt{2}$ cm
e) $10\sqrt{3}$ cm

8 (U. F. Uberlândia-MG) Uma pessoa se encontra numa planície às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo T de uma torre de telefone. Com o objetivo de determinar a altura H da torre, ela marca dois pontos A e B na planície e calcula AB = 200 m, $T\hat{A}B = 30°$, $T\hat{B}A = 105°$ e $T\hat{B}P = 30°$, sendo P o pé da torre.

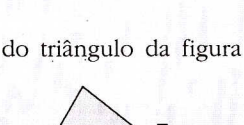


Então, H é igual a:

a) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m
b) $50\sqrt{2}$ m
c) $50\sqrt{3}$ m
d) $100\sqrt{2}$ m
e) 100 m

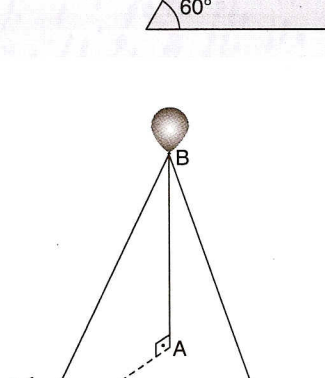
9 (Mackenzie-SP) A área do triângulo da figura abaixo é:

a) $10\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $15\sqrt{3}$
d) $12\sqrt{3}$
e) $18\sqrt{3}$



Desafios

1 (UF-PE) Para determinar a altura AB do balão na ilustração ao lado, dois observadores situados em C e D medem, num mesmo instante, os ângulos $A\hat{C}B = 30°$, $B\hat{C}D = 75°$, $C\hat{D}B = 60°$. Sabendo que A, C e D estão numa planície e que CD = 30, indique o inteiro mais próximo de $AB\sqrt{6}$.

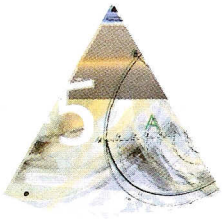


2 (Unicamp-SP) Os lados de um triângulo têm, como medidas, números inteiros ímpares consecutivos cuja soma é 15.

a) Quais são esses números?
b) Calcule a medida do maior ângulo desse triângulo.
c) Sendo α e β os outros dois ângulos do referido triângulo, com $\beta > \alpha$, mostre que $\text{sen}^2\,\beta - \text{sen}^2\,\alpha < \frac{1}{4}$.

Tabela de razões trigonométricas

Ângulo (graus)	Seno	Cosseno	Tangente	Ângulo (graus)	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,01745	0,99985	0,01746	46	0,71934	0,69466	1,03553
2	0,03490	0,99939	0,03492	47	0,73135	0,68200	1,07237
3	0,05234	0,99863	0,05241	48	0,74314	0,66913	1,11061
4	0,06976	0,99756	0,06993	49	0,75471	0,65606	1,15037
5	0,08716	0,99619	0,08749	50	0,76604	064279	1,19175
6	0,10453	0,99452	0,10510	51	0,77715	0,62932	1,23499
7	0,12187	0,99255	0,12278	52	0,78801	0,61566	1,27994
8	013917	0,99027	0,14054	53	0,79864	0,60182	1,32704
9	0,15643	0,98769	0,15838	54	0,80903	0,58779	1,37638
10	0,17365	0,98481	0,17633	55	0,81915	0,57358	1,42815
11	0,19087	0,98163	0,19438	56	0,82904	0,55919	1,48256
12	0,20791	0,97815	0,21256	57	0,83867	0,54464	1,53986
13	0,22495	0,97437	0,23087	58	0,84805	0,52992	1,60033
14	0,24192	0,97030	0,24933	59	0,85717	0,51504	1,66428
15	0,25882	0,96593	0,26795	60	0,86603	0,50000	1,73205
16	0,27564	0,96126	0,28675	61	0,87462	0,48481	1,80405
17	0,29237	0,95630	0,30573	62	0,88295	0,46947	1,88073
18	0,30902	0,95106	0,32492	63	0,89101	0,45399	1,96261
19	0,32557	0,94552	0,34433	64	0,89879	0,43837	2,05030
20	0,34202	0,93969	0,36397	65	0,90631	0,42262	2,14451
21	035837	0,93358	0,38386	66	0,91355	0,40674	2,24604
22	0,37461	0,92718	0,40403	67	0,92050	0,39073	2,35585
23	0,39073	0,92050	0,42447	68	0,92718	0,37461	2,47509
24	0,40674	0,91355	0,44523	69	0,93358	0,35837	2,60509
25	0,42262	0,90631	0,46631	70	0,93969	0,34202	2,74748
26	0,43837	0,89879	0,48773	71	0,94552	0,32557	2,90421
27	0,45399	0,89101	0,50953	72	0,95106	0,30902	3,07768
28	0,46947	0,88295	0,53171	73	0,95630	0,29237	3,27085
29	0,48481	0,87462	0,55431	74	0,96126	0,27564	3,48741
30	0,50000	0,86603	0,57735	75	0,96593	0,25882	3,73205
31	0,51504	0,85717	0,60086	76	0,97030	0,24192	4,01078
32	0,52992	0,84805	0,62487	77	0,97437	0,22495	4,33148
33	0,54464	0,83867	0,64941	78	0,97815	0,20791	4,70463
34	0,55919	0,82904	0,67451	79	0,98163	0,19087	5,14455
35	0,57358	0,81915	0,70021	80	0,98481	0,17365	5,67128
36	0,58779	0,80903	0,72654	81	0,98769	0,15643	6,31375
37	0,60182	0,79864	0,75355	82	0,99027	0,13917	7,11537
38	0,61566	0,78801	0,78129	83	0,99255	0,12187	8,14435
39	0,62932	0,77715	0,80978	84	0,99452	0,10453	9,51436
40	0,64279	0,76604	0,83910	85	0,99619	0,08716	11,43010
41	0,65606	0,75471	0,86929	86	0,99756	0,06976	14,30070
42	0,66913	0,74314	0,90040	87	0,99863	0,05234	19,08110
43	0,68200	0,73135	0,93252	88	0,99939	0,03490	28,63630
44	0,69466	0,71934	0,96569	89	0,99985	0,01745	57,29000
45	0,70711	0,70711	1,00000				



14

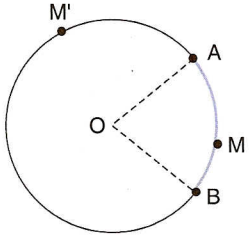
FUNÇÕES CIRCULARES

1 Ciclo trigonométrico

Arcos e ângulos

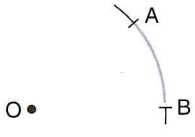
Seja uma circunferência de centro O sobre a qual tomamos dois pontos distintos, A e B. A seguir, ainda sobre a circunferência, tomemos um terceiro ponto M, distinto dos anteriores. Relativamente a A e B, M apresenta duas possibilidades:

a) situar-se na parte assinalada na figura (o percurso mais curto entre A e B); ou,
b) ao contrário, situar-se na outra parte, não assinalada (o percurso mais longo entre A e B).



Cada uma dessas duas partes em que fica dividida a circunferência por dois de seus pontos é chamada *arco de circunferência*. No caso, temos os arcos $\overset{\frown}{AMB}$ e $\overset{\frown}{AM'B}$, ambos com extremidades A e B.

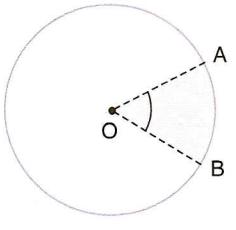
Outra notação:



denota-se simplesmente: $\overset{\frown}{AB}$.

É importante lembrar que:

A cada arco tomado corresponde um ângulo central e a medida de um arco equivale à medida do ângulo central correspondente.



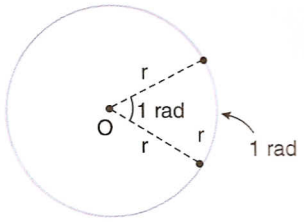
Medidas de arcos e ângulos

Medir um arco (ou ângulo) é compará-lo com outro, unitário.

- *O grau*: o arco unitário padrão mais utilizado até aqui tem sido o grau (marcado pelo símbolo °), que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido. Lembre-se de que a circunferência tem 360°.

▶ *O radiano*: é o arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido. Abrevia-se *rad*.

Como o comprimento C da circunferência é dado por $C = 2\pi r$, há, na volta completa, 2π radianos.



Podemos estabelecer a correspondência entre graus e radianos. Vejamos:

$$\begin{array}{rcl} 2\pi \text{ rad} & \text{——} & 360^\circ \\ \pi \text{ rad} & \text{——} & 180^\circ \\ \frac{\pi}{2} \text{ rad} & \text{——} & 90^\circ \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\pi}{12} \text{ rad} & \text{——} & 15^\circ \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Exemplo 1

Para transformar um arco de 45° (ou um ângulo de 45°) em radianos, podemos estabelecer a regra de três simples:

$$\begin{array}{rcl} \pi \text{ rad} & \text{——} & 180^\circ \\ x & \text{——} & 45^\circ \end{array}$$

Temos, então, $x = \dfrac{45^\circ \cdot \pi \text{ rad}}{180^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \text{ rad}$

Exemplo 2

Inversamente, para transformar um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad em graus, estabelecemos a regra de três simples:

$$\begin{array}{rcl} \pi \text{ rad} & \text{——} & 180^\circ \\ \frac{\pi}{6} \text{ rad} & \text{——} & x \end{array}$$

Temos, então, $x = \dfrac{\frac{\pi}{6} \text{ rad} \cdot 180^\circ}{\pi \text{ rad}} \Rightarrow x = 30^\circ$

O comprimento de um arco

Fixada a medida de um arco (em graus ou radianos), seu *comprimento* (em cm, por exemplo) depende do raio da circunferência que contém o arco.

De fato, um arco a_1 de 60° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{3} \text{ rad}\right)$, tomado sobre uma circunferência C_1 de 8 cm de raio, tem comprimento maior que um arco a_2 de mesma medida, tomado sobre uma circunferência C_2 de 4 cm de raio. Calculemos os comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 desses arcos.

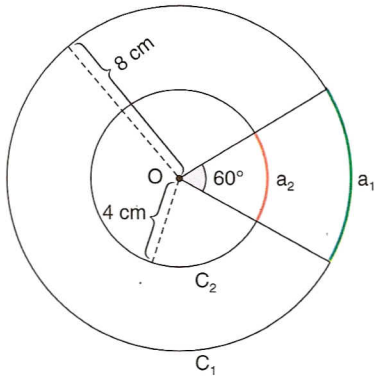
Como um arco de 60° corresponde à sexta parte da circunferência, o comprimento de cada um dos arcos de 60° corresponde à sexta parte do comprimento da circunferência correspondente.

Assim:

$$\ell_1 = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 8 \text{ cm} = \frac{8\pi}{3} \text{ cm} \cong 8{,}378 \text{ cm}$$

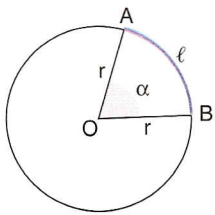
$$\ell_2 = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 4 \text{ cm} = \frac{4\pi}{3} \text{ cm} \cong 4{,}189 \text{ cm}$$

Note que $r_1 = 2r_2 \Rightarrow \ell_1 = 2\,\ell_2$.



De modo geral, sendo AÔB o ângulo central de medida α rad da figura e $\overset{\frown}{AB}$ o correspondente arco, de comprimento ℓ, podemos estabelecer a regra de três simples:

Comprimento do arco		Medida do arco
r	———	1 rad
ℓ	———	α rad



que nos fornece a relação $\ell = \alpha \cdot r$, usada para calcular o comprimento de um arco de circunferência em função do raio e do ângulo central correspondente, medido em *radianos*.

Exemplo 3

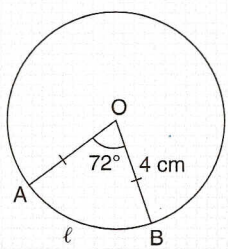
Um arco de $\frac{\pi}{4}$ rad, tomado sobre uma circunferência de 20 m de raio, mede $\ell = \frac{\pi}{4} \cdot 20 \text{ m} = 5\pi \text{ m} \cong$ $\cong 15{,}7$ m.

Exemplo 4

Para determinar o comprimento ℓ do arco $\overset{\frown}{AB}$ assinalado na figura ao lado, fazemos:

$$\begin{array}{l} 360^\circ \text{ —— } 2\pi \cdot 4 \text{ cm} \\ 72^\circ \text{ —— } \ell \end{array}$$

$$\ell = \frac{72 \cdot 8\pi \text{ cm}}{360} \cong 5 \text{ cm}$$



Exemplo 5

Se uma circunferência de 5 m de raio contém um arco de 10 m de comprimento, tanto esse arco como o ângulo central correspondente medem:

$$\alpha = \frac{10}{5} = 2 \text{ rad}$$

Exercícios

Adote $\pi = 3{,}14$ quando necessário.

1 Seja 8 cm o diâmetro de uma circunferência. Determine seu comprimento.

2 Uma pista circular de corrida apresenta perímetro de 314 m. Determine seu raio.

3 Exprima em radianos:

a) 60° b) 36° c) 135° d) 240° e) 270°

4 Exprima em graus:

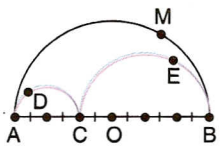
a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{2\pi}{3}$ rad c) $\frac{5\pi}{6}$ rad d) $\frac{11\pi}{3}$ rad e) $\frac{3\pi}{5}$ rad

5 Um atleta A desenvolve, numa pista circular de raio 500 m, a velocidade constante de 8 km/h. Determine, em radianos, a medida do arco descrito, bem como seu comprimento, após 15 minutos de percurso.

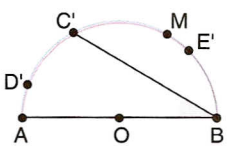
6 Calcule o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ definido em uma circunferência de raio 6 cm por um ângulo central $A\hat{O}B$ de medida 1,5 rad.

7 (PUC-RJ) Calcule o ângulo entre os ponteiros do relógio às 4 horas e 20 minutos.

8 Na figura, qual o percurso mais curto sobre as semicircunferências: AMB ou ADCEB?

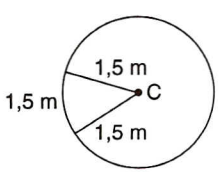


9 Retome o exercício anterior e suponha que os arcos $\overset{\frown}{ADC}$ e $\overset{\frown}{CEB}$ sejam superpostos ao arco $\overset{\frown}{AMB}$, permanecendo fixas as extremidades A e B. Sejam C', D' e E' as novas posições de C, D e E, respectivamente. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C'$.

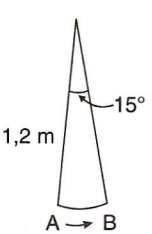


10 Enquanto a tartaruga pronunciava sua perguntinha, o coelho se distanciou 16,66 m, na pista circular de 31,83 m de raio. Determine a medida, em graus, do arco que os separava imediatamente após o término da infeliz pergunta.

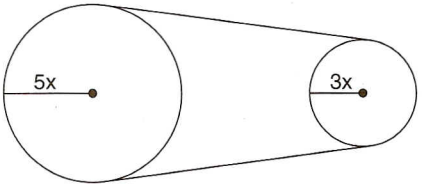
11 Escreva, em radianos, as medidas dos ângulos centrais formados na figura ao lado.



12 Um pêndulo de 1,2 m de comprimento oscila entre os pontos A e B através de um ângulo de 15°. Qual é o comprimento da trajetória descrita, entre A e B, pela sua extremidade?



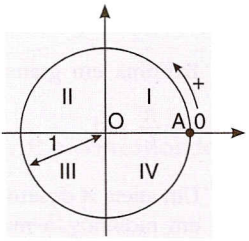
13 As duas polias da figura giram simultaneamente por estarem ligadas por uma correia inextensível. Quantos graus deve girar a menor polia para que a maior dê uma volta completa?



O ciclo trigonométrico

Fixemos dois eixos ortogonais cruzando-se em O e orientados conforme as indicações: o vertical, com sentido para cima, e o horizontal, para a direita. Sobre o sistema assim descrito tomemos uma circunferência com centro O e raio *unitário*.

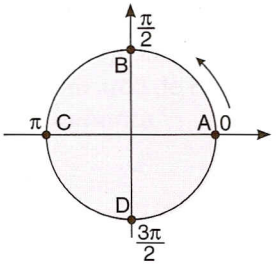
Vamos associar a cada número real um ponto dessa circunferência. Para isso, façamos com que um ponto P se desloque sobre ela a partir de A — ponto associado inicialmente ao número zero — no sentido *anti-horário*, considerado positivo.



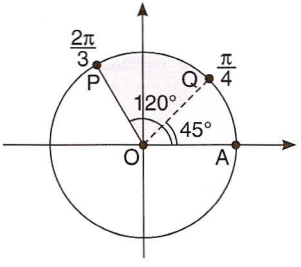
Os numerais romanos referem-se aos quadrantes, que são as quatro partes em que se divide o círculo.

Pontos do ciclo associados a números reais

Como r = 1, o comprimento da circunferência é 2π, o que garante que a cada número real x, com $0 \leq x < 2\pi$, podemos associar uma posição de P sobre a circunferência (ou, mais especificamente, um *ponto* da circunferência). Por exemplo, ao número π associa-se o ponto C, denominado imagem de π; B é associado ao número $\frac{\pi}{2}$; e D, a $\frac{3\pi}{2}$.



Qual seria o ponto P, correspondente ao número real $\frac{2\pi}{3}$? Lembrando que a volta completa corresponde ao valor de 2π, o ponto P descreveria a terça parte de uma volta $\left(\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi\right)$ e ocuparia uma posição do segundo quadrante.



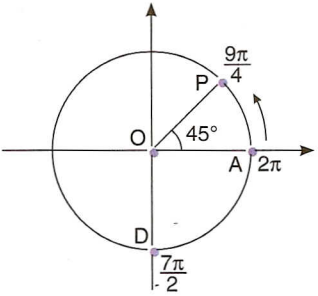
Ao número $\frac{\pi}{4}$, que pode ser escrito com $\frac{1}{4} \cdot \pi$ (meia-volta), corresponde o ponto Q da figura.

Como ao número zero associa-se o ponto A, este é extremidade de arco nulo; o ponto C, associado ao número π, é extremidade de um arco de meia-volta.

Para qualquer outro valor de x, com $x \geq 2\pi$, o ponto descreve, no sentido *anti-horário*, um percurso de comprimento x, findo o qual se marca o ponto P como imagem do número x.

Por exemplo, se $x = 2\pi$, sua imagem é o próprio ponto A; se $x = \frac{7\pi}{2}$, podemos escrevê-lo como $x = 7 \cdot \frac{\pi}{2}$ e sua imagem, o ponto D. ($\frac{1}{4}$ de volta)

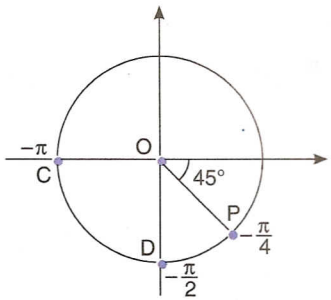
Já o número $\frac{9\pi}{4}$ tem como imagem o ponto P da figura, pois pode ser escrito como $\frac{9\pi}{4} = 9 \cdot \frac{\pi}{4}$. ($\frac{1}{8}$ de volta)



Por outro lado, para qualquer valor *negativo* de x, o ponto descreve, no sentido *horário*, um percurso de comprimento igual a $|x|$, findo o qual é marcado o ponto P como imagem do número negativo x.

Por exemplo, o número $-\pi$ tem como imagem o ponto C, pois o percurso descrito no sentido horário é de meia-volta.

Já os números $-\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{4}$ têm como imagens os pontos D e P, respectivamente, pois os percursos descritos no sentido horário são de $\frac{1}{4}$ de volta e de $\frac{1}{8}$ de volta.

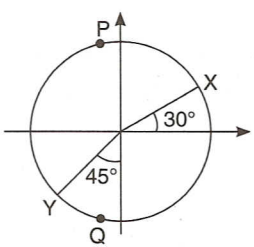


Exercícios

14 Construa um ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes aos números reais 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

15 A que quadrante pertence o ponto associado a cada número real a seguir: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{7}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{15\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{5\pi}{4}$ e 5?

16 Sejam os pontos X e Y mostrados no ciclo trigonométrico da figura abaixo.



a) Quais são os números reais x e y, associados aos pontos X e Y, respectivamente, com $0 \leq x \leq 2\pi$ e $0 \leq y \leq 2\pi$?

b) Dê as medidas dos arcos $\overset{\frown}{XPY}$ e $\overset{\frown}{XQY}$.

c) Forneça os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{XPY}$ e $\overset{\frown}{XQY}$.

17 Escreva, em cada caso, uma relação existente entre os pontos associados aos números dados:

a) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{7\pi}{3}$ c) $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

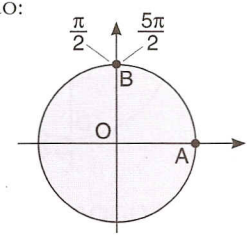
Congruência

Tomemos um número real x, tal que $x \geq 2\pi$; por exemplo, $x = \frac{5\pi}{2}$. Desmembrando-o convenientemente, temos:

$$x = \frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

2π: percurso de 1 volta; $\frac{\pi}{2}$: percurso de $\frac{1}{4}$ de volta

Associamos, então, ao número $\frac{5\pi}{2}$ o ponto B da figura, o qual é imagem também do número $\frac{\pi}{2}$. Há outros infinitos números reais maiores que 2π e que possuem a mesma imagem B. Dentre eles estão:



$\frac{9\pi}{2}$ (2 voltas e $\frac{1}{4}$ de volta), $\frac{13\pi}{2}$ (3 voltas e $\frac{1}{4}$ de volta), $\frac{17\pi}{2}$ ... (4 voltas e $\frac{1}{4}$ de volta)

Por outro lado, tomemos o número real negativo $x = \frac{-3\pi}{2}$.

Como foi estabelecido como positivo o sentido anti-horário, o sinal negativo significa percurso de $\frac{3\pi}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\right.$ de volta$\left.\right)$ no sentido horário, o que conduz novamente ao ponto B; assim como este, infinitos números negativos possuem a mesma imagem B: $\frac{-7\pi}{2}$, $\frac{-11\pi}{2}$, $\frac{-15\pi}{2}$, etc.

Generalizando, podemos escrever que *todos* os números da forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, possuem a mesma imagem B. Para verificar esse fato, basta substituir k por qualquer valor *inteiro* e obter, dentre outros, os números dados como exemplos.

Fazendo:

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$k = -3 \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - 6\pi = \frac{-11\pi}{2}$$

$$k = -2 \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - 4\pi = \frac{-7\pi}{2}$$

$$k = -1 \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - 2\pi = \frac{-3\pi}{2}$$

$$k = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \ (*)$$

$$k = 1 \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$k = 2 \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$$

$$k = 3 \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{13\pi}{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Todos os arcos de origem A e extremidade B (diferindo apenas por um número inteiro k de voltas) apresentam como medidas, em radianos, os números obtidos acima e são considerados arcos *côngruos entre si*.

A inserção da variável inteira k possibilita a escrita de todos esses arcos de uma forma generalizada: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Daqui em diante, ao citarmos qualquer número real, estaremos nos referindo indiferentemente a tal número ou a um arco de medida igual a ele: o número $\frac{5\pi}{2}$ é um dos números cuja imagem é B, como também é um arco de extremidade B e de medida $\frac{5\pi}{2}$ rad.

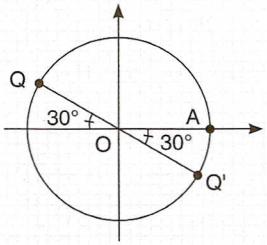
No exemplo, o arco $\frac{\pi}{2}$ (*) é chamado *primeira determinação positiva* dos arcos da forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pois, sendo o único representante desses arcos que se encontra na 1ª volta, retrata o menor valor positivo que a expressão $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ assume.

Observação

Para efeitos práticos, será omitida a escrita da unidade *rad* para os arcos e ângulos; assim, escreveremos simplesmente $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, ..., em vez de $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{3\pi}{4}$ rad, ... Por exemplo, poderá aparecer a expressão "ângulo de $\frac{\pi}{3}$ ou 60°" (note que a escrita da unidade ° permanece obrigatória!).

Exemplo 6

Na figura estão representados os arcos de extremidade Q, com expressão geral $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e os arcos de extremidade Q', com expressão geral $\beta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Além disso, como a diferença entre a primeira determinação positiva de β e a de α vale $\frac{11\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \pi$, e os pontos Q e Q' são extremidades de um diâmetro, é possível englobar todos os arcos mostrados com a expressão $\gamma = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

↓ meia-volta

Comprove:

$$k = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{5\pi}{6}$$

$$k = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}$$

$$k = 2 \Rightarrow \gamma = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$$

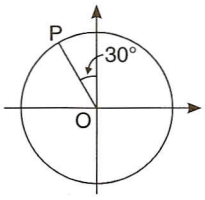
$$\vdots$$

Exercícios

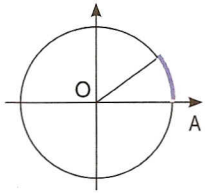
18 Marque no ciclo trigonométrico as imagens dos números reais $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$ e $\frac{17\pi}{4}$.

A seguir, escreva a expressão geral para os arcos α com extremidades sobre elas.

19 Escreva a expressão geral dos arcos β de extremidade P.

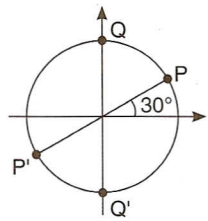


20 O arco assinalado na figura ao lado mede 40°. Escreva, utilizando duas unidades diferentes, a expressão geral dos arcos α côngruos a ele.



21 Forneça, em cada caso, a expressão dos arcos com imagens em:

a) P ou P'.
b) Q ou Q'.
c) P ou Q.



22 Faça, a partir do ponto A (associado ao número zero), uma divisão do ciclo em 8 partes iguais. Marque os pontos de divisão assinalando os arcos correspondentes e, a seguir, escreva a expressão geral desses arcos.

23 Construa um quadrado, inscrito no ciclo trigonométrico, com um dos vértices na imagem do número $\frac{3\pi}{4}$. Em seguida, escreva a expressão geral dos arcos α com extremidades nos vértices do quadrado.

Simetrias

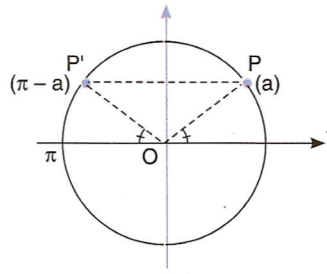
No ciclo trigonométrico, interessam-nos diretamente três tipos de simetrias, a saber: em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro.

Para o estudo de cada uma delas, tomaremos um arco de medida a, do 1º quadrante e da 1ª volta, ou seja, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

▶ **1ª** *Simetria em relação ao eixo vertical*

Seja P a extremidade do arco de medida a.

O simétrico de P em relação ao eixo vertical é o ponto P', imagem do número $\pi - a$, visto que os ângulos centrais assinalados na figura são congruentes.



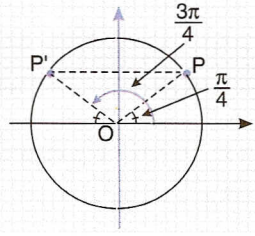
Para designar o conjunto dos arcos que possuem extremidade P, podemos escrever $a + 2k\pi$, e para os arcos de extremidade P', $(\pi - a) + 2k\pi$. Englobando as duas notações, a expressão

$$a + 2k\pi \text{ ou } (\pi - a) + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

representa o conjunto de todos os arcos com extremidade P ou P'.

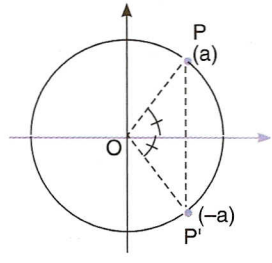
Exemplo 7

Notando que $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, o conjunto dos arcos com extremidade P ou P' é dado pela expressão $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



▶ **2ª** *Simetria em relação ao eixo horizontal*

Levando em conta a congruência entre os ângulos centrais assinalados na figura, podemos afirmar que o número que possui imagem simétrica à imagem de a é o número $-a$. Para designar o conjunto de arcos côngruos ao arco de medida a, utilizamos a notação $a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; para $-a$, utilizamos $-a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Normalmente é útil englobar os dois conjuntos em um único. Podemos escrever:



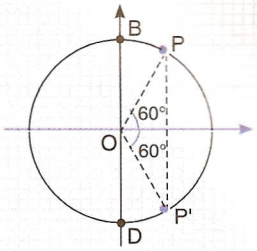
$$\pm a + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

referindo-nos ao conjunto dos arcos côngruos a a ou a $-a$.

Exemplo 8

O conjunto de todos os arcos que possuem extremidade P ou P' é dado por $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Da mesma forma, para arcos com extremidades em B ou D, podemos escrever $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



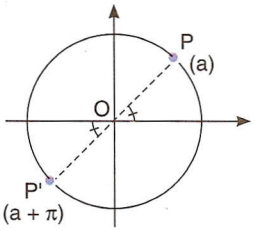
▶ **3ª** *Simetria em relação ao centro do ciclo*

Quando dois pontos são extremidades opostas de um diâmetro, como na figura, a diferença entre dois valores consecutivos cujas imagens são os pontos citados vale π, ou seja, a diferença entre os percursos é de meia-volta.

Assim, a, $a \pm \pi$, $a \pm 2\pi$, ... são as medidas dos arcos que se formam quando tomamos dois pontos diametralmente opostos.

De modo geral, para expressá-los escrevemos:

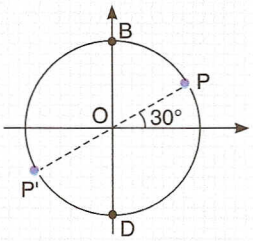
$$a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



Exemplo 9

Na figura, para designar os arcos de extremidades P ou P', escrevemos $\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

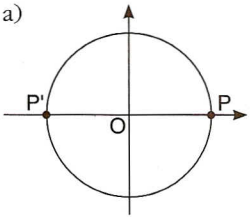
Da mesma forma, para B ou D, temos: $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



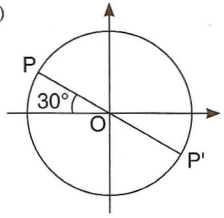
Exercícios

24 Nas figuras abaixo aparecem os pontos P e P' como extremidades dos arcos α. Apresente a expressão geral de α para cada um desses casos.

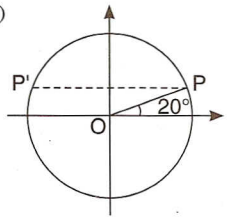
a)



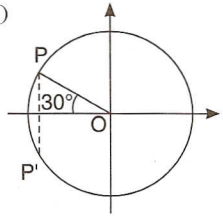
b)



c)



d)



25 Marque, no mesmo ciclo trigonométrico, sendo $k \in \mathbb{Z}$, as imagens:

- P e P' dos números da forma $-\frac{\pi}{6} + k\pi$.
- R e R' dos números da forma $\frac{2\pi}{3} + k\pi$.
- Q e Q' dos números da forma $\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
- S, S', S'' e S''' dos números da forma $\frac{k\pi}{2}$

26 Substitua quatro valores consecutivos na expressão $\alpha = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A seguir, marque no ciclo os pontos correspondentes às extremidades desses arcos, apresentando sua expressão geral de outro modo.

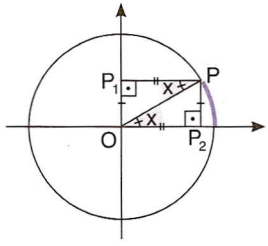
27 Considerando $k \in \mathbb{Z}$, marque no ciclo trigonométrico as imagens de $\alpha = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ e de $\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

A seguir, englobe os arcos α e β sob uma única expressão.

2 Funções circulares

Seja x um ângulo agudo, de tal forma que o arco correspondente a ele possua extremidade P. Unindo O a P, obtemos o raio unitário $\overline{OP}$.

Construindo dois triângulos retângulos, ambos com ângulo agudo x e hipotenusa $\overline{OP}$, obtemos sobre os eixos ortogonais os pontos P_1 e P_2.



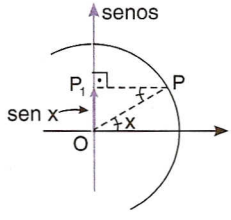
O ponto P_1 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo vertical, e P_2 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo horizontal.

O quadrilátero OP_2PP_1 é um retângulo, pois possui os quatro ângulos retos. Assim, temos:

$$OP_1 = PP_2 \quad \text{e} \quad OP_2 = PP_1$$

Função seno

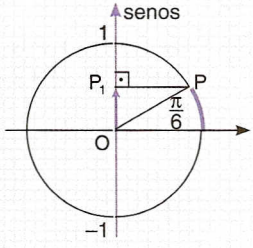
Na figura ao lado, observando o triângulo retângulo OP_1P, podemos escrever $\text{sen } x = \frac{OP_1}{OP} = \frac{OP_1}{1} = OP_1$.



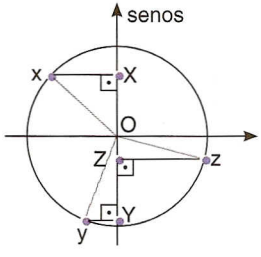
Assim, para encontrarmos o seno de um ângulo, basta projetar ortogonalmente sua extremidade sobre o eixo vertical — daqui por diante denominado *eixo dos senos* — e medir a distância entre essa projeção e o centro O do ciclo, sempre levando em conta a orientação do eixo (para cima).

Exemplo 10

Para determinar o valor de sen 30° $\left(\text{ou sen } \frac{\pi}{6}\right)$, construímos um ângulo de 30° $\left(\text{ou } \frac{\pi}{6} \text{ rad}\right)$ e projetamos sua extremidade P sobre o eixo dos senos, obtendo P_1. A seguir, medimos o segmento $\overline{OP_1}$. Como essa medida é igual à metade do raio e o sentido de $\overline{OP_1}$ concorda com o do eixo dos senos, concluímos que $\text{sen } 30° = \text{sen } \frac{\pi}{6} = +\frac{1}{2}$.



Para o caso de ângulos fora do 1º quadrante, o procedimento é análogo ao apresentado no exemplo 10. Na figura ao lado, considere x, y e z ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes, respectivamente. Projetando suas extremidades, obtemos, respectivamente, os pontos X, Y e Z.



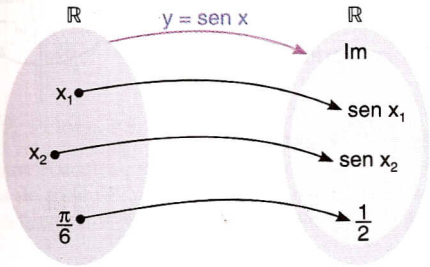
Temos, então:

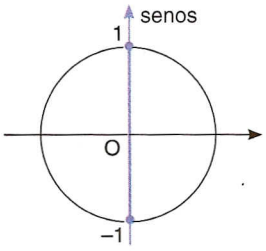
$$\text{sen } x = OX \text{ (positivo)}$$
$$\text{sen } y = OY \text{ (negativo)}$$
$$\text{sen } z = OZ \text{ (negativo)}$$

A função y = sen x

Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do seno de um ângulo de x rad, ou de um arco de x rad.

O domínio e o contradomínio da função y = sen x são iguais a $\mathbb{R}$, porém o conjunto imagem se restringe ao intervalo [–1, 1].



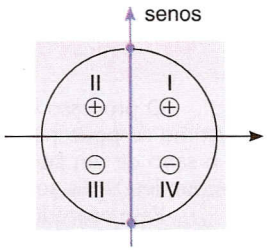


D = C = $\mathbb{R}$

Im = [–1, 1] ou $-1 \leq \text{sen } x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Sinais

Considerando a orientação do eixo dos senos, vemos que a arcos do 1º e do 2º quadrantes associam-se valores positivos de senos, e a arcos do 3º e do 4º quadrantes correspondem valores negativos de senos.

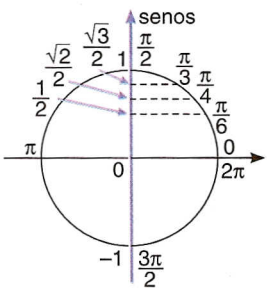


Valores notáveis

Da trigonometria no triângulo retângulo sabemos que $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Observando a figura, podemos notar também que $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$ e $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$, bem como que $\text{sen } 0 = \text{sen } \pi = \text{sen } 2\pi = 0$.

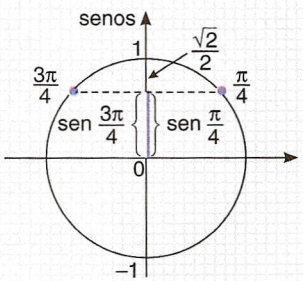
Os valores constantes da tabela abaixo são fundamentais ao nosso estudo, pois, a partir deles, são encontrados os valores dos senos de muitos outros ângulos, os quais aparecerão com freqüência nos nossos estudos.



x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
sen x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1	0

Exemplo 11

Para calcular $\text{sen } \frac{3\pi}{4}$, basta notar que as projeções das extremidades dos arcos de $\frac{3\pi}{4}$ rad e $\frac{\pi}{4}$ rad coincidem.

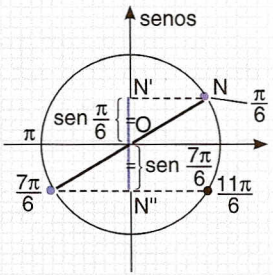


Assim:

$$\text{sen } \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemplo 12

No cálculo de sen $\frac{7\pi}{6}$ podemos, a partir da extremidade do arco correspondente, traçar o diâmetro do círculo, obtendo na outra extremidade o ponto N.



Os dois ângulos assinalados são opostos pelo vértice e, conseqüentemente, possuem a mesma medida, que é $\frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$ rad.

Assim, os segmentos $\overline{ON'}$ e $\overline{ON''}$ possuem o mesmo comprimento, porém em orientações opostas. Logo:

$$\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\text{sen } \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} = \text{sen } \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Além disso, o ponto N'' também é projeção da imagem do número $\frac{11\pi}{6}$. Assim, sen $\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Observação

O processo utilizado nos exemplos 11 e 12 é caracterizado como *redução ao 1º quadrante*, pois, como se pode perceber, a partir de um quadrante diferente do 1º, em cada caso procura-se calcular o seno de um ângulo em função dos valores conhecidos (ou acessíveis por meio de consulta à tabela completa) dos senos dos ângulos do 1º quadrante.

Esse procedimento justifica a recomendação para que se memorizem os valores notáveis apresentados, bem como explica o fato de que, na tabela completa, constam apenas as razões de ângulos agudos.

Exercícios

28 Associe os valores da 2ª coluna aos correspondentes senos da 1ª coluna:

A. sen 120°
B. sen $\frac{3\pi}{4}$
C. sen π
D. sen $\frac{4\pi}{3}$
E. sen $\frac{7\pi}{4}$
F. sen 270°

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. -1
3. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. sen 0°
5. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

29 Calcule:

a) sen 300°
b) sen 330°
c) sen 5π
d) sen $-\frac{\pi}{4}$
e) $\dfrac{\text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{\pi}{3}}{\text{sen } \frac{\pi}{6}}$
f) $\dfrac{\text{sen } \frac{\pi}{4} \cdot \text{sen } \frac{4\pi}{3}}{\text{sen}^2 \frac{5\pi}{6}}$

30 Dê o sinal de cada uma das expressões:

a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$

b) $(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x),\ x \in \mathbb{R}$

c) $\operatorname{sen} 111^\circ - \operatorname{sen} 110^\circ$

31 Sendo $k \in \mathbb{Z}$, calcule, em cada caso, o valor de sen x, com:

a) $x = (2k + 1) \cdot \pi$

b) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

d) $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

32 (U. F. Pelotas-RS, adaptado)

"Josiane Soares, de Blumenau, é a dona da marca no lançamento de dardo, com 53,1 m, estabelecida durante a primeira etapa do troféu Brasil de atletismo, encerrada neste domingo, em Curitiba. Três outros recordes do campeonato foram quebrados e uma marca sul-americana juvenil também." (Sidney, 2000)

(*Zero Hora*, 2000.)

Numa prova olímpica de lançamento de dardo, a trajetória descrita é representada graficamente por uma parábola. A distância atingida pelo dardo é dada por:

$$x = \frac{v^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g},$$

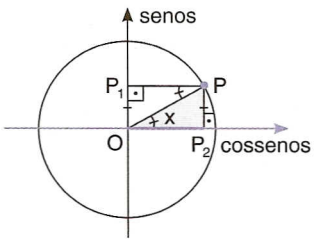
em que α é o ângulo de lançamento, v é a velocidade inicial, x, a distância em relação à horizontal e g, o valor da gravidade (considere $g = 10\ m/s^2$).

Com uma velocidade inicial de 20 m/s, qual a maior distância obtida em três lançamentos consecutivos, sabendo-se que os ângulos de lançamento foram 30°, 45° e 60°? Compare as distâncias alcançadas nos outros dois casos.

33 Escreva a expressão geral dos arcos x para os quais temos $\operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Função cosseno

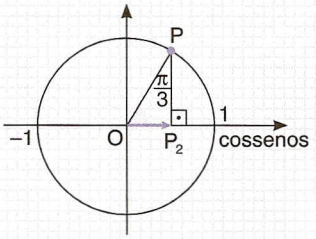
Da trigonometria no triângulo retângulo, em relação à figura ao lado, podemos escrever $\cos x = \frac{OP_2}{OP} = \frac{OP_2}{1} = OP_2$.



Assim, para obtermos o cosseno de um ângulo, basta projetar ortogonalmente sua extremidade sobre o eixo horizontal — denominado *eixo dos cossenos* — e medir a distância entre essa projeção e o centro O do ciclo, considerando a orientação do eixo (para a direita).

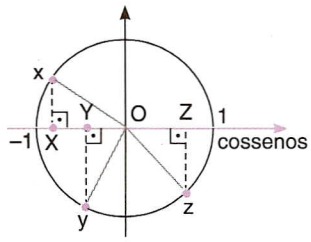
Exemplo 13

No cálculo de $\cos 60^\circ \left(\text{ou } \cos\frac{\pi}{3}\right)$, construímos um arco de $\frac{\pi}{3}$ rad (ou 60°) e projetamos sua extremidade P sobre o eixo dos cossenos, obtendo P_2. Em seguida, medimos o segmento $\overline{OP_2}$. Como sua medida é igual à metade do raio e seu sentido é o mesmo do eixo dos cossenos, concluímos que:



$$\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = OP_2 = +\frac{1}{2}.$$

No caso de o ângulo não pertencer ao 1º quadrante, o procedimento é análogo ao apresentado na página 243. Na figura ao lado, considere x, y e z ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes, respectivamente. Projetando suas extremidades, obtemos, respectivamente, os pontos X, Y e Z.



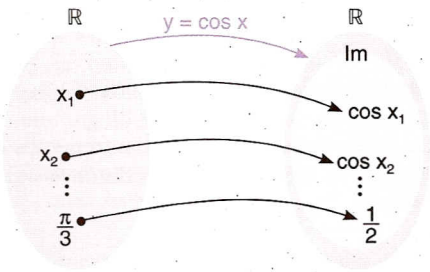
Temos, então:

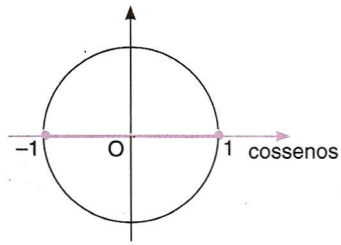
$\cos x = OX$ (negativo)
$\cos y = OY$ (negativo)
$\cos z = OZ$ (positivo)

A função y = cos x

Dado um número real x, podemos associar a ele o valor do cosseno de um ângulo de x rad, ou de um arco de x rad.

O domínio e o contradomínio da função y = cos x são iguais a $\mathbb{R}$, porém o conjunto imagem se restringe ao intervalo [–1, 1].



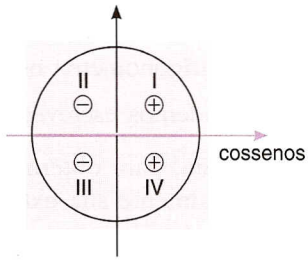


$D = C = \mathbb{R}$

$Im = [-1, 1]$ ou $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Sinais

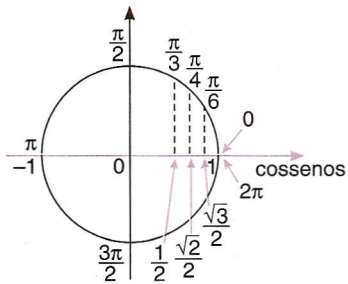
Considerando a orientação do eixo dos cossenos, percebemos que a ângulos do 1º e do 4º quadrantes associam-se cossenos positivos, e a ângulos do 2º e do 3º quadrantes associam-se cossenos negativos.



Valores notáveis

Da mesma forma que com os senos, já conhecemos os valores dos cossenos de alguns ângulos. Já sabemos, por exemplo, que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Podemos notar também, pela figura, que:



$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

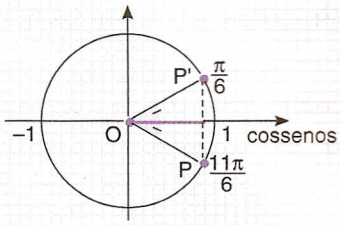
$$\cos 0 = \cos 2\pi = 1$$

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1	0	1

Exemplo 14

Para obter $\cos \frac{11\pi}{6}$, devemos achar P', simétrico de P em relação ao eixo dos cossenos e imagem do número $2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Deduzimos que $\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



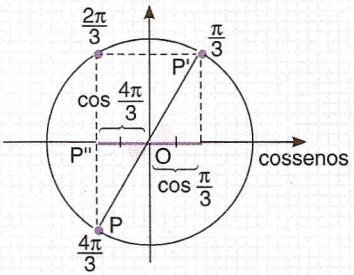
Exemplo 15

Para calcular $\cos \frac{4\pi}{3}$, basta traçar o diâmetro indicado, o qual fornece o ponto P', imagem de $\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$.

Projetando P e P' sobre o eixo dos cossenos, concluímos:

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Além disso, como P'' também é projeção do ponto que é imagem do real $\frac{2\pi}{3}$, podemos escrever: $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.



Exercícios

34 Dê o valor de:

a) $\cos \frac{5\pi}{3}$

b) $\cos \frac{7\pi}{6}$

c) $\cos \frac{7\pi}{4}$

d) $\cos 720^\circ$

e) $\cos 120^\circ$

f) $\cos \frac{\pi}{2}$

g) $\cos 150^\circ$

h) $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)$

i) $\cos x - \cos y$, sendo $x + y = 2\pi$

35 Forneça o sinal de cada uma das expressões:

a) $\cos 125^\circ - \cos 124^\circ$

b) $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos 7\pi \cdot \cos 4\pi$

c) $(1 + \cos x) \cdot (1 - \cos x)$, $x \in \mathbb{R}$

36 Para que se tenha $\cos x = 3m - 1$, quais são os possíveis valores de m?

37 Escreva a expressão geral dos arcos x para os quais temos:

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos x = 0$

38 Sendo $k \in \mathbb{Z}$, calcule, em cada caso, o valor de $\cos x$, com:

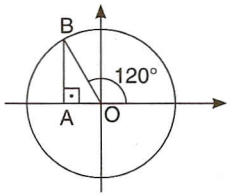
a) $x = 2k\pi$

b) $x = (2k + 1)\pi$

c) $x = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$

d) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

39 Encontre o perímetro do triângulo OAB, situado no 2º quadrante do ciclo trigonométrico.



Relações entre senos e cossenos

No estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, foram apresentadas duas importantes relações entre senos e cossenos. Vamos retomá-las, agora de uma forma mais geral.

▶ **1ª** *Arcos complementares*

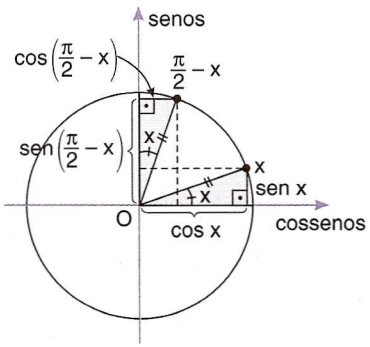
A relação sen x = cos (90° – x) ou cos x = sen (90° – x) passa a ser escrita como:

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ válida para } \forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ ou}$$

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ válida para } \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e significa "o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento".

Essa verificação também é imediata no ciclo trigonométrico: basta observar que os dois triângulos retângulos da figura são congruentes, por possuírem, além das hipotenusas (raios unitários), ângulos agudos congruentes.



▶ **2ª** *Relação fundamental I*

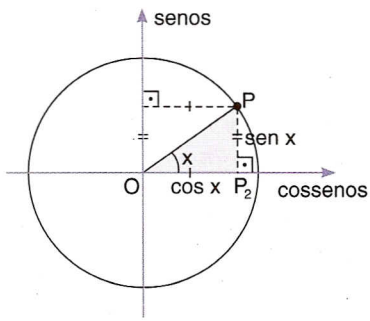
Seja x um arco do 1º quadrante. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OPP_2, temos:

$$(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = (OP)^2, \text{ ou seja,}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ , válida para } \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Mesmo que x não seja arco do 1º quadrante, vale a relação fundamental I.

Assim, dado o seno de um arco qualquer, é possível, por meio da relação fundamental I, obter o cosseno desse mesmo arco, e vice-versa.



Exemplo 16

Dado $\cos x = \frac{5}{13}$, com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, para obter sen x aplicamos a relação fundamental I:

$$\operatorname{sen}^2 x + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{12}{13}$$

Como x está no quarto quadrante, temos sen x < 0. Assim, podemos escrever $\operatorname{sen} x = -\frac{12}{13}$.

Exercícios

40 Sendo $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine cos x.

41 Se $\cos x = \frac{2}{3}$ e x está no primeiro quadrante, determine sen x e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

42 Sabendo que $6 \cos x - 1 = 4$, com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, obtenha sen x.

43 Encontre os valores de x para os quais temos:

a) $\text{sen } x = \cos x$ b) $\text{sen}^2 x = 1$

44 Sem fazer uso da tabela, comprove que $\text{sen}^2 70^\circ + \cos^2 110^\circ = \text{sen}^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ$.

45 Sabe-se que $\text{sen } \frac{4\pi}{9} = a$.

a) Qual é o sinal de a? Justifique.

b) Calcule, em função de a, $\text{sen } \frac{5\pi}{9}$.

c) Calcule $\text{sen } \frac{\pi}{18}$ e $\cos \frac{\pi}{18}$.

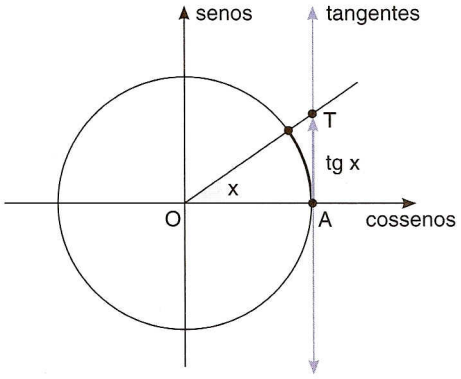
46 Sabendo que $\text{sen } x - \cos x = a$, calcule:

a) $\text{sen } x \cos x$ b) $\text{sen}^3 x - \cos^3 x$

Função tangente

Para a definição da tangente de um arco x, é necessário acoplar um 3º eixo ao ciclo trigonométrico. Na figura, o *eixo* (vertical) *das tangentes* é obtido quando se tangencia, por uma reta, o ciclo no ponto A de origem dos arcos.

Unindo-se o centro O à extremidade do arco x e prolongando-se esse raio, ele interceptará o eixo das tangentes — no caso, no ponto T.



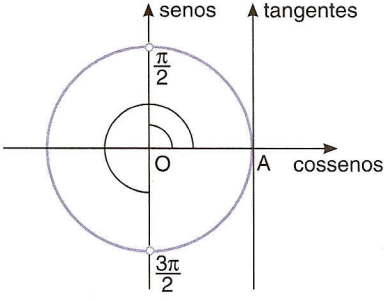
Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ é a tangente do arco de x rad. A orientação do eixo das tangentes é para cima, sendo A sua origem, e, no caso, sendo x do 1º quadrante, temos:

$$\text{tg } x = AT > 0$$

Como temos feito até aqui, procuraremos associar a cada número real x o valor de tg x, introduzindo a função $y = \text{tg } x$.

Domínio

Nem sempre, porém, é possível associar a um número real x o valor de tg x. Veja, por exemplo, como a $x = \frac{\pi}{2}$ não corresponde interseção alguma — note o paralelismo! — entre o prolongamento do raio e o eixo das tangentes, o mesmo ocorrendo em relação a $x = \frac{3\pi}{2}$.



De modo geral, não existe:

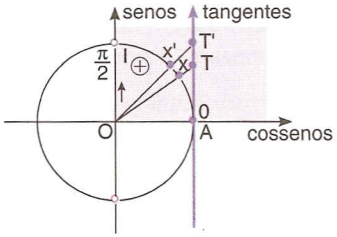
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

Assim, o domínio da função $y = \text{tg } x$ é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R}\right\}$.

Conjunto imagem, sinais e crescimento

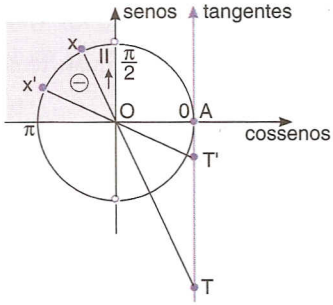
Nas próximas quatro ilustrações a respeito das imagens dos números reais através da função $y = \text{tg } x$, podemos observar, quadrante a quadrante, o comportamento da função com respeito a valores obtidos, sinais e crescimento.

I. 1º quadrante



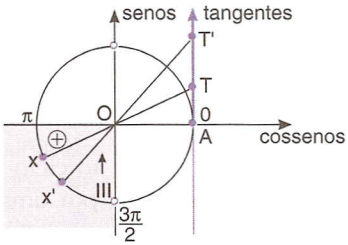
$x' > x \Rightarrow tg\ x' > tg\ x$

II. 2º quadrante



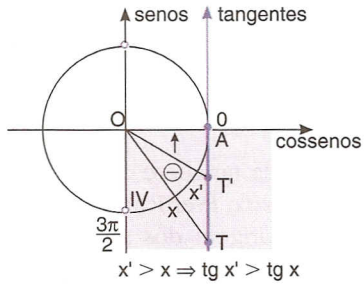
$x' > x \Rightarrow tg\ x' > tg\ x$

III. 3º quadrante



$x' > x \Rightarrow tg\ x' > tg\ x$

IV. 4º quadrante



$x' > x \Rightarrow tg\ x' > tg\ x$

As conclusões são as seguintes:

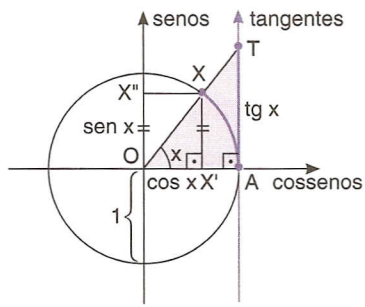
- **1ª** $tg\ x > 0$ no 1º e no 3º quadrantes.
  $tg\ x < 0$ no 2º e no 4º quadrantes.
  $tg\ x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- **2ª** $tg\ x$ assume qualquer valor real: $Im = \mathbb{R}$.
- **3ª** $y = tg\ x$ é crescente em qualquer quadrante.

Exercícios

47 Determine o sinal da expressão $y = tg^2 \frac{\pi}{5} \cdot tg \frac{4\pi}{5} \cdot tg \frac{6\pi}{5} \cdot tg \frac{8\pi}{5}$.

48 Disponha em ordem crescente os números reais $tg \frac{\pi}{6}$, $tg \frac{\pi}{3}$, $tg\ \pi$, $tg \frac{\pi}{4}$, $tg \frac{3\pi}{4}$ e $tg \frac{2\pi}{3}$.

Relação fundamental II



Seja um arco de x rad com extremidade X. Observando a figura, temos:

$OX' = \cos x$
$X'X = \text{sen } x$
$AT = tg\ x$
$OX = 1$(raio)

Os triângulos retângulos OX'X e OAT são semelhantes, pois possuem um ângulo agudo comum. Assim, podemos escrever:

$$\frac{OX'}{OA} = \frac{XX'}{AT} \Rightarrow \frac{\cos x}{1} = \frac{\text{sen } x}{tg\ x} \Rightarrow tg\ x = \frac{\text{sen } x}{\cos x},$$

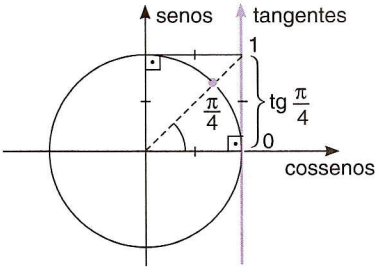
válida para $\forall\ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Essa relação, de grande importância, também já havia aparecido quando do estudo do triângulo retângulo. A seguir, ela será utilizada para a obtenção de alguns valores de tangentes de arcos que aparecem com freqüência.

Valores notáveis

Iniciaremos calculando $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$. Pela relação fundamental II, temos:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

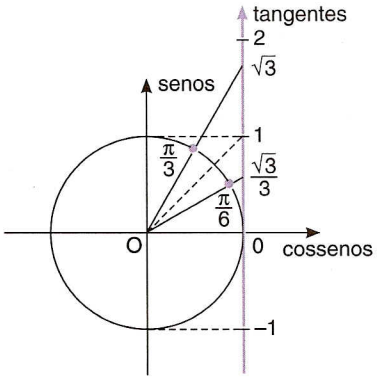


Observemos que o quadrilátero apresentado na figura é um quadrado, o que confirma que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ (raio do ciclo).

No cálculo de $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ e $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$, fazemos:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

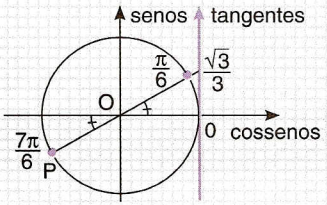
$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Exemplo 17

Para calcular $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$, reduziremos o arco ao 1º quadrante: unindo a extremidade P ao centro e prolongando o segmento até o eixo das tangentes, interceptamos a circunferência na imagem do número $\frac{\pi}{6}$.

Assim, obtemos $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Exercícios

49 Dado $\cos x = \frac{1}{6}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine $\operatorname{tg} x$.

50 Sendo $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, obtenha $\operatorname{tg} x$.

51 Com $0 < x < \pi$ e $\operatorname{sen} x = \frac{1}{8}$, quanto vale $\operatorname{tg} x$?

52 Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $|\operatorname{sen} x| = |\cos x|$, quanto vale $\operatorname{tg} x$?

53 Calcule o valor da expressão $y = 3 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$.

54 Dado que $\operatorname{tg} x = -2$, calcule o valor de $\frac{4 \cos x}{3 \operatorname{sen} x}$.

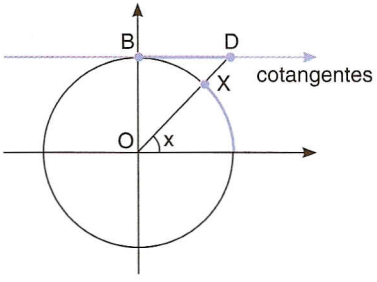
55 Sabendo que $\operatorname{tg} x = 3$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen} x - \cos x$.

56 Para quais valores de x temos $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$?

Função cotangente

Para a definição dessa função será acoplado ao ciclo trigonométrico um 4º eixo orientado, tangenciando o ciclo no ponto B, que é extremidade do arco de $\frac{\pi}{2}$ rad.

Unindo o centro O à extremidade X do arco de x rad e prolongando esse raio, ele interceptará o eixo das cotangentes no ponto D.



Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$ é a cotangente do arco de x rad.

A orientação do eixo das cotangentes é para a direita, sendo B sua origem e, no caso, com x no 1º quadrante, temos $\operatorname{cotg} x = BD > 0$.

Notemos que, quando x é um elemento do conjunto $\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$, não existe o ponto D e não se define, então, $\operatorname{cotg} k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, o domínio da função $y = \operatorname{cotg} x$ é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Da mesma forma que para a função tangente, o conjunto imagem da função cotangente é $\text{Im} = \mathbb{R}$. Os sinais da cotangente, nos diversos quadrantes, também são os mesmos da tangente, porém a função $y = \operatorname{cotg} x$ é decrescente em cada um dos quatro quadrantes.

Exercícios

57 Calcule, se existir:

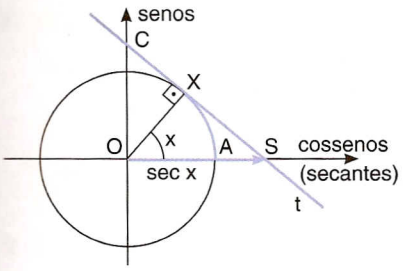
a) $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}$ b) $\operatorname{cotg} \frac{3\pi}{2}$ c) $\operatorname{cotg} 4\pi$ d) $\operatorname{cotg} -4\pi$

58 Sendo x um arco do 3º quadrante, qual é o sinal da expressão $y = \dfrac{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} (x + \pi)}$?

E, se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, qual é o sinal de y?

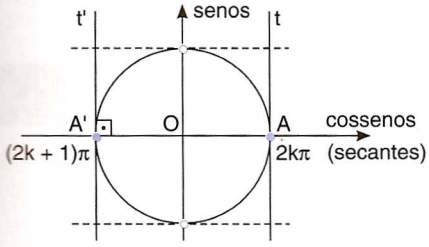
Função secante

Seja x um arco do 1º quadrante e de extremidade X. A reta tangente ao ciclo, traçada pelo ponto X, intercepta o eixo dos cossenos no ponto S. Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{OS}$ é a secante do arco x.



No caso, temos sec x = OS > 0, pois o eixo das secantes (e, é claro, sua orientação) coincide com o eixo dos cossenos; além disso, temos sec x = OS > 1, pois o ponto S é externo ao ciclo.

Quando $x = 2k\pi$, os pontos S e A coincidem (t // eixo dos senos) e $OA = \sec 2k\pi = 1$, $k \in \mathbb{Z}$; se, por outro lado, $x = (2k + 1)\pi$, os pontos S e A' coincidem, e $OA' = \sec (2k + 1)\pi = -1$, $k \in \mathbb{Z}$.



No caso de x assumir um valor da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, não existe o ponto S e, conseqüentemente, não está definida $\sec\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, o domínio da função $y = \sec x$ é

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

O conjunto imagem da função $y = \sec x$ é $Im = \mathbb{R} -]-1, 1[$, pois o ponto S — quando existe — não pode ser, em hipótese alguma, interno ao ciclo.

Exercícios

59 Determine, se existir:

a) sec 0 b) sec π c) sec $\frac{\pi}{2}$ d) sec $-\pi$

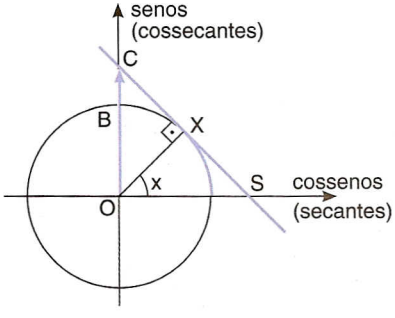
60 Qual é o sinal da expressão $y = \dfrac{\sec x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$?

61 É possível termos sec x = 0? E sec x = –2?

Função cossecante

Da mesma forma que a reta tangente ao ciclo, traçada pelo ponto X, intercepta o eixo dos cossenos no ponto S, ela intercepta também o eixo dos senos, desta feita no ponto C.

Por definição, a medida algébrica do segmento $\overline{OC}$ é a cossecante do arco x. No caso, temos cossec x = OC > 0, pois o eixo das cossecantes é o próprio eixo dos senos; além disso, cossec x = OC > 1, pois C é externo ao ciclo.

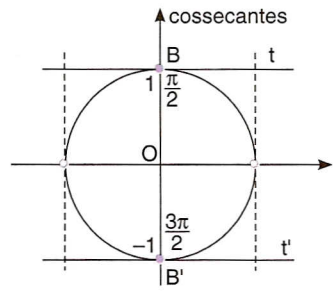


Se x assume algum dos valores $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, o ponto C coincide com B (t // eixo dos cossenos) e $OB = \operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Por outro lado, se x assume algum dos valores $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, o ponto C coincide com B' (t' // eixo dos cossenos) e $OB' = \operatorname{cossec}\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Somente nos casos em que $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, não existe o ponto C e, conseqüentemente, não está definida cossec $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, o domínio da função $y = \text{cossec } x$ é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. O conjunto imagem da função $y = \text{cossec } x$ é também $\text{Im} = \mathbb{R} -]-1, 1[$, pois o ponto C, quando existe, não pode ser interno ao ciclo.



Exercícios

62 É possível que tenhamos cossec $x = 0$? E cossec $x = 2$?

63 Obtenha, se existir:

a) cossec $\frac{\pi}{2}$ b) cossec $\frac{3\pi}{2}$ c) cossec π d) cossec 4π

64 Sendo x um arco do quarto quadrante, qual é o sinal da expressão $y = \dfrac{\text{cossec } x \cdot \text{cossec } (x + \pi)}{\text{cossec } \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos x}$?

Testes de vestibulares

1 (UF-RS) Se o ponteiro menor de um relógio percorre um arco de $\frac{\pi}{12}$ rad, o ponteiro maior percorre um arco de:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad e) π rad

b) $\frac{\pi}{4}$ rad d) $\frac{\pi}{2}$ rad

2 (Unifor-CE) O número real m que satisfaz a sentença $\frac{m + 1}{m - 2} = \cos 3\,015°$ é:

a) $3\sqrt{2} + 4$ d) $3 - 4\sqrt{2}$

b) $4 - 3\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{2} + 3$

c) $3\sqrt{2} - 4$

3 (Unip-SP) O valor da expressão $\cos \frac{2\pi}{3} + \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \text{tg } \frac{5\pi}{4}$ é:

a) $\frac{\sqrt{213}}{2}$ c) 0 e) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

4 (Unifor-CE) Em uma circunferência de raio 6 cm, um ângulo central de medida 15° determina um arco cujo comprimento, em centímetros, é aproximadamente:

a) 1,75 d) 1,05

b) 1,68 e) 0,78

c) 1,57

5 (Unifor-CE) A sentença $\cos x = 2m - 1$ é verdadeira para todo número real x se, e somente se, m pertence ao conjunto:

a) $[0, +\infty[$ d) $\mathbb{R}_+$

b) $[0, 1]$ e) $[-1, 1]$

c) $\mathbb{R}$

6 (PUC-RS) O valor numérico de $\dfrac{\text{sen } \frac{x}{2} + 2 \text{ tg } \frac{3x}{4}}{3 \cos x}$ para $x = \frac{\pi}{3}$ é:

a) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ e) 0

b) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{2}{5}$

7 (Vunesp-SP) Se x é a medida de um ângulo em radianos e $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, então:

a) $\cos x > 0$
b) $\cos 2x < 0$
c) $\operatorname{tg} x > 0$
d) $\operatorname{sen} x < 0$
e) $\operatorname{sen} 2x > 0$

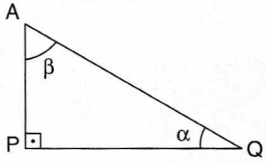
8 (UF-RS) As rodas traseiras de um veículo têm 4,25 metros de circunferência cada uma. Enquanto as rodas dianteiras dão 15 voltas, as traseiras dão somente 12 voltas. A circunferência de cada roda dianteira mede:

a) 2,125 metros
b) 2,25 metros
c) 3,4 metros
d) 3,75 metros
e) 5 metros

9 (Fafi/Fabrai-MG) Considerando que $\pi = 3{,}14$, o número de voltas completas que uma roda de raio igual a 40 cm, incluindo o pneu, dará para que o automóvel se desloque 1 quilômetro será de:

a) 290
b) 398
c) 2 000
d) 3 980

10 (Mackenzie-SP) No triângulo retângulo da figura, AQ = 2 AP. Então, $\operatorname{sen}(\alpha + 3\beta)$ vale:



a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

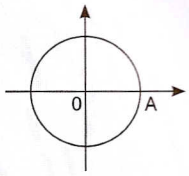
11 (UF-RS) Sendo x número real, o menor e o maior valor possíveis da expressão $\frac{42}{5 - 2\operatorname{sen}(10x)}$ são, respectivamente:

a) 6 e 14
b) -21 e $\frac{42}{5}$
c) $-\frac{14}{5}$ e $\frac{42}{25}$
d) -42 e 42
e) -14 e -6

12 (UF-PI) Marque a alternativa correta:

a) $\operatorname{tg} 40° < \operatorname{tg} 100° < \operatorname{tg} 215° < \operatorname{tg} 290°$
b) $\operatorname{tg} 100° < \operatorname{tg} 290° < \operatorname{tg} 215° < \operatorname{tg} 40°$
c) $\operatorname{tg} 290° < \operatorname{tg} 215° < \operatorname{tg} 100° < \operatorname{tg} 40°$
d) $\operatorname{tg} 100° < \operatorname{tg} 290° < \operatorname{tg} 40° < \operatorname{tg} 215°$
e) $\operatorname{tg} 290° < \operatorname{tg} 100° < \operatorname{tg} 215° < \operatorname{tg} 40°$

13 (Unopar-PR) Na circunferência de raio r e centro O, abaixo, considera-se um arco $\overset{\frown}{AP}$, no sentido anti-horário, que mede 2 radianos. A respeito do ponto P, pode-se afirmar que:



a) coincide com o ponto A.
b) depende do raio r.
c) está no 1º quadrante.
d) está no 2º quadrante.
e) está no 3º quadrante.

14 (Cefet-MG) Assinale a alternativa *falsa*:

a) $\sec x = \frac{1}{3}$
b) $\operatorname{tg} x = 50\,000$
c) $\cos x = \frac{3}{4}$
d) $\operatorname{sen} x = 1$
e) $\operatorname{cossec} x = 50$

15 (Mackenzie-SP)

I. $\cos 225° < \cos 215°$

II. $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} > \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}$

III. $\operatorname{sen} 160° > \operatorname{sen} 172°$

Das afirmações acima:

a) todas são verdadeiras.
b) todas são falsas.
c) somente II e III são verdadeiras.
d) somente II é verdadeira.
e) somente I e II são verdadeiras.

16 (Mackenzie-SP) A soma dos valores máximo e mínimo de $2 + \frac{2}{3}\cos^2 x$ é:

a) $\frac{8}{3}$
b) $\frac{10}{3}$
c) 4
d) $\frac{14}{3}$
e) $\frac{16}{3}$

17 (PUC-SP) João e Maria costumavam namorar atravessando um caminho reto que passava pelo centro de um canteiro circular, cujo raio mede 5 m. Veja a figura 1.

Figura 1

Certo dia, após uma desavença que tiveram no ponto de partida P, partiram emburrados, e, ao mesmo tempo, para o ponto de chegada C. Maria caminhou pelo diâmetro do canteiro e João andou ao longo do caminho que margeava o canteiro (sobre a circunferência), cuidando para estar, sempre, à "mesma altura" de Maria, isto é, de modo que a reta $\overleftrightarrow{MJ}$, formada por Maria e João, ficasse sempre perpendicular ao diâmetro do canteiro. Veja a figura 2.

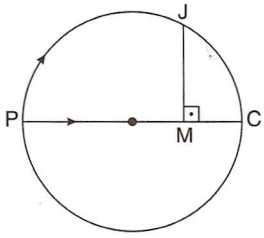


Figura 2

Quando a medida do segmento $\overline{PM}$, percorrido por Maria, for igual a $7{,}5 = 5 + \frac{5}{2}$ metros, o comprimento do arco de circunferência $\overset{\frown}{PJ}$, percorrido por João, será igual a:

a) $\frac{10 \cdot \pi}{3}$ m

b) $2 \cdot \pi$ m

c) $\frac{5 \cdot \pi}{3}$ m

d) $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ m

e) $\frac{\pi}{3}$ m

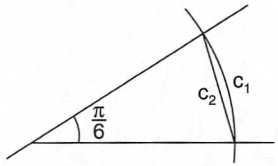
18 (UF-RS) Se $\theta = 85°$, então:

a) $\operatorname{tg} \theta < \cos \theta < \operatorname{sen} \theta$
b) $\operatorname{sen} \theta < \cos \theta < \operatorname{tg} \theta$
c) $\cos \theta < \operatorname{sen} \theta < \operatorname{tg} \theta$
d) $\operatorname{sen} \theta < \operatorname{tg} \theta < \cos \theta$
e) $\cos \theta < \operatorname{tg} \theta < \operatorname{sen} \theta$

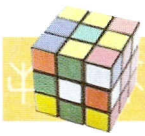
19 (Cefet-PR) Se o ângulo α tem como expressão geral $EG = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, as raízes da equação $x^2 \operatorname{sen} \alpha + (\cos^2 \alpha + 1)\, x + (\operatorname{cossec}^2 \alpha - 1) = 0$ são:

a) 1 e 0
b) 1 e –1
c) –1 e 0
d) 0; 1 e –1
e) [–1, 1]

20 (Fuvest-SP) Numa circunferência, c_1 é o comprimento de arco de $\frac{\pi}{6}$ radianos e c_2 é o comprimento da secante determinada por este arco, como ilustrado na figura abaixo. Então, a razão $\frac{c_1}{c_2}$ é igual a $\frac{\pi}{6}$ multiplicado por:



a) 2
b) $\sqrt{1 + 2\sqrt{3}}$
c) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
d) $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$
e) $\sqrt{3 + \sqrt{3}}$



Desafios

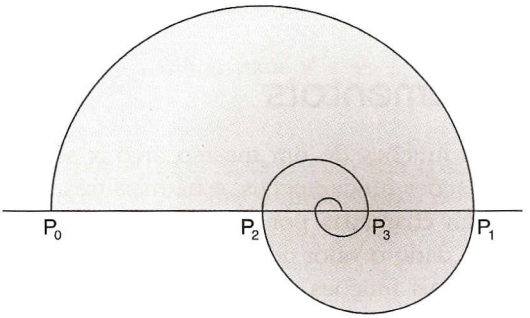
1 Que valores assume a expressão $A = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{7}$ quando n varia em $\mathbb{N}$?

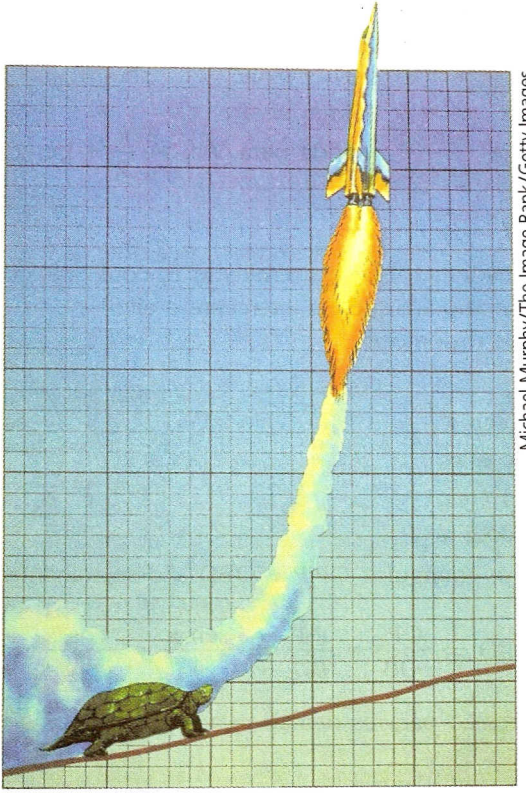
2 Um pequeno animal caminha em uma vala circular de 64 cm de raio. Na primeira hora percorre 1 m e, a partir da segunda hora, metade da distância percorrida durante a hora anterior. Depois de caminhar por 6 horas ininterruptas, ele pára; querendo voltar ao ponto de partida, nota que o perdeu de vista: não sabe se deve continuar o percurso no mesmo sentido ou retornar. Adote $\pi = 3{,}14$ e ajude o pequeno animal a esclarecer sua dúvida, apontando-lhe o caminho mais curto. Justifique seu procedimento.

3 (UF-PE, adaptado) A espiral da figura abaixo é obtida unindo-se semicircunferências cujos centros são dados abaixo:

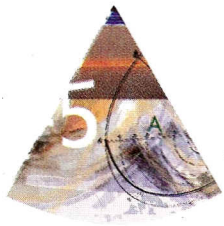
Semicircunferência	Centro
$\overset{\frown}{P_0P_1}$	P_2
$\overset{\frown}{P_1P_2}$	P_3
$\overset{\frown}{P_2P_3}$	P_4
...	...
$\overset{\frown}{P_{n-1}P_n}$	P_{n+1}
...	...

Se o diâmetro $P_0P_1 = 10$, qual é o inteiro mais próximo do comprimento da espiral?





Michael Murphy/The Image Bank/Getty Images



15

RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES

1 ○ Relações fundamentais

Neste capítulo, as diversas funções de um mesmo arco x serão relacionadas umas com as outras. Já conhecemos duas relações fundamentais, e há mais três a serem apresentadas. As cinco relações fundamentais são assim chamadas por serem distintas e completamente independentes umas das outras. Permitem que, dado o valor de uma das funções circulares de um arco qualquer, encontremos os valores das demais funções circulares do mesmo arco (se existirem).

São elas:

▶ *Relação fundamental I*

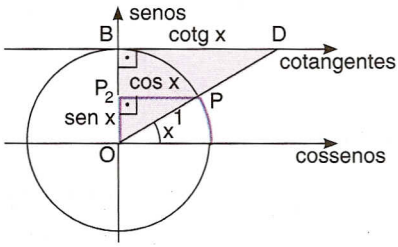
$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad , \text{ válida para } \forall\, x \in \mathbb{R}$$

▶ *Relação fundamental II*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ , válida para } \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

▶ *Relação fundamental III*

Seja x um arco do 1º quadrante, com extremidade P, como mostra a figura a seguir. Unindo O a P e prolongando esse raio até que ele intercepte o eixo das cotangentes, obtemos o ponto D.



Temos, então:

$OP_2 = \operatorname{sen} x$

$P_2P = \cos x$

$OB = 1$ (raio)

$BD = \operatorname{cotg} x$

Podemos observar que os triângulos OP_2P e OBD são semelhantes:

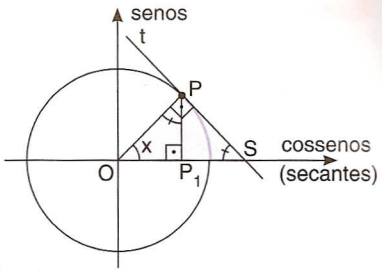
$$\triangle OP_2P \sim \triangle OBD \Rightarrow \frac{OP_2}{OB} = \frac{P_2P}{BD} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{1} = \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Generalizando essa expressão para os demais quadrantes, temos a relação fundamental III:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \text{ , válida para } \forall\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

▶ *Relação fundamental IV*

Traçando por P — extremidade do arco x — a tangente ao ciclo, obtemos no eixo das secantes o ponto S. Projetando o ponto P sobre o mesmo eixo, obtemos o ponto P_1. Temos, então:



$$OS = \sec x$$
$$OP_1 = \cos x$$
$$OP = 1 \text{ (raio)}$$

Podemos observar que os triângulos OSP e OPP_1 são semelhantes:

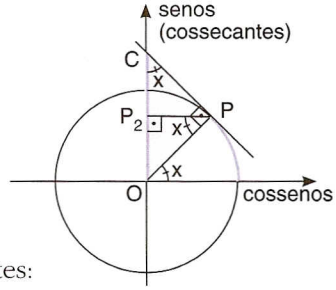
$$\triangle OSP \sim \triangle OPP_1 \Rightarrow \frac{OS}{OP} = \frac{OP}{OP_1} \Rightarrow \frac{\sec x}{1} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Generalizando essa expressão para os demais quadrantes, temos a relação fundamental IV:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ válida para } \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

▶ *Relação fundamental V*

A tangente ao ciclo, traçada por P, intercepta o eixo das cossecantes no ponto C, e a projeção de P sobre o mesmo eixo é P_2. Temos, então:



$$OC = \text{cossec } x$$
$$OP_2 = \text{sen } x$$
$$OP = 1 \text{ (raio)}$$

Podemos observar que os triângulos OCP e OPP_2 são semelhantes:

$$\triangle OCP \sim \triangle OPP_2 \Rightarrow \frac{OC}{OP} = \frac{OP}{OP_2} \Rightarrow \frac{\text{cossec } x}{1} = \frac{1}{\text{sen } x}$$

Generalizando essa expressão para os demais quadrantes, temos a relação fundamental V:

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}, \text{ válida para } \forall\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 1

Dado $\text{sen } x = \frac{3}{5}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, para obter os valores das outras funções trigonométricas de x fazemos:

RF I: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5}$.

Sendo x do 2º quadrante, vem: $\cos x = -\frac{4}{5}$.

RF II: $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg } x = -\frac{3}{4}$

RF III: $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} \Rightarrow \text{cotg } x = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \text{cotg } x = -\frac{4}{3}$

RF IV: $\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sec x = -\frac{5}{4}$

RF V: $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} \Rightarrow \text{cossec } x = \frac{1}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \text{cossec } x = \frac{5}{3}$

Exemplo 2

Sendo $\operatorname{cossec} \theta = -\frac{3}{2}$, com $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, para calcular as demais funções circulares de θ fazemos:

RF V: $\operatorname{cossec} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = -\frac{2}{3}$

RF I: $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ e, como θ é do 4º quadrante, vem: $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

A seguir, aplicando as relações fundamentais IV, II e III, vem $\sec \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$ e $\operatorname{cotg} \theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}$.

Exercícios

1 Seja $\operatorname{tg} x = 3$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Calcule as demais funções circulares de x.

2 Obtenha o cosseno, a cossecante e a cotangente do arco x do 4º quadrante, cujo seno, em módulo, vale $\frac{3}{10}$.

3 Simplifique a expressão $y = \frac{\operatorname{cossec} x - \sec x}{\operatorname{cotg} x - 1}$.

4 Calcule o valor da expressão $y = \frac{2 \sec x + 3 \operatorname{cotg} x}{-\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{cossec} x}$, sendo x um arco do 2º quadrante e $\cos x = -\frac{1}{4}$.

5 (UF-MS, adaptado) Justificando sua resposta, julgue a afirmativa: "Se x e β são números reais tais que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{cossec} x = \beta - 1$, então $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2\beta - \beta^2}}$".

6 (UF-MS) Se x é um número real que verifica simultaneamente as equações $\operatorname{sen} a = x + 3$ e $\cos a = \sqrt{10 - x^2}$, para algum número real a, determine o valor de $x + 10$.

7 Determine:

a) $\sec \frac{\pi}{4}$

b) $\operatorname{cotg} \frac{3\pi}{4}$

c) $\operatorname{cossec} -\frac{\pi}{3}$

d) $\operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3}$

e) $\sec \frac{\pi}{6}$

f) $\operatorname{cossec} \frac{7\pi}{6}$

8 Seja $\operatorname{sen} x = p$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ache o valor de $\sec x$.

9 Sabendo que $\cos a = 2 \operatorname{sen} a$, calcule $\operatorname{tg} a$ e $\operatorname{sen} a$.

10 (UFF-RJ) Determine a relação entre os números reais a e b, de modo que as igualdades $1 + \cos x = a \operatorname{sen} x$ e $1 - \cos x = b \operatorname{sen} x$, com $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sejam satisfeitas simultaneamente.

11 a) Calcule $\operatorname{sen} \theta$, $\cos \theta$ e $\operatorname{cotg} \theta$, sabendo que $\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{b}$.

b) Suponha o caso particular em que $a = 0$ e, fazendo as adaptações necessárias na resposta do item *a*, verifique a coerência de tal resposta.

2 ○ Relações decorrentes

A partir das cinco relações fundamentais, podemos deduzir outras relações, que serão úteis para simplificar a resolução de alguns problemas.

Suponhamos, por exemplo, que seja dado o valor da secante de um arco x do 1º quadrante: $\sec x = a$, $a > 1$. Parar calcularmos tg x somente por meio das relações fundamentais, teríamos que cumprir o seguinte percurso:

$$\sec x = a \overset{RF\ IV}{\Rightarrow} \cos x = \frac{1}{a} \overset{RF\ I}{\Rightarrow} \operatorname{sen} x = \frac{+\sqrt{a^2 - 1}}{a} \overset{RF\ II}{\Rightarrow} \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sqrt{a^2 - 1}$$

É possível buscar, por outro lado, uma relação direta entre sec x e tg x. Tomemos a *RF I*: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, e dividamos ambos os membros por $\cos^2 x$:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Essa relação, generalizada, pode ser escrita assim:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \text{ , válida para } \forall\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Da mesma forma, tomando a *RF I*: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, e dividindo ambos os membros por $\operatorname{sen}^2 x \neq 0$, teremos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x,$$

expressão que, generalizada, escreve-se:

$$\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cossec}^2 x \text{ , válida para } \forall\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Existe outra relação, imediata, que surge da simples observação das *RF II* e *RF III*:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Podemos multiplicá-las membro a membro:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

Generalizando, temos:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \text{ , válida para } \forall\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Exercícios

12 Sendo $\cos \theta = \frac{2}{5}$, com $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, determine $\operatorname{tg} \theta$.

13 Sendo $\operatorname{cossec} x = 1,\overline{3}$ determine o valor de $\operatorname{cotg} x$.

14 (UF-SC) Sabendo que $\operatorname{cossec} x = \frac{5}{4}$ e que x é do primeiro quadrante, calcule o valor da expressão $9 \cdot (\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x)$.

15 Simplifique:

a) $(\text{tg}^2 x + 1)(1 + \text{cotg}^2 x) \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

b) $\dfrac{\text{cotg}^2 x}{1 + \text{cotg}^2 x} + \text{sen}^2 x$

16 Sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que não é possível que tenhamos $\text{cotg } \alpha = \text{cossec } \alpha$.

17 (UF-PA) Se $\text{tg } y = \sqrt{3}$ e $\pi < y < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule o valor numérico da expressão $\dfrac{\text{sec}^2 y - \text{tg}^2 (\pi + y)}{2 \text{ sen}(\pi - y) \cdot \text{cotg } y}$.

3 Identidades trigonométricas

Qualquer igualdade referente a funções trigonométricas, que se verifique para todos os valores atribuídos às variáveis envolvidas em tais funções, é uma *identidade trigonométrica*.

Assim, por exemplo, a igualdade

$$\cos x \cdot \text{cossec } x = \text{cotg } x,$$

respeitados os domínios das funções envolvidas, é uma identidade trigonométrica, pois, independentemente dos valores de x, ela se verifica; senão, vejamos:

$$\cos x \cdot \text{cossec } x = \cos x \cdot \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x$$

Vejamos agora três processos de verificação de identidades trigonométricas:

▶ **1º** O processo utilizado na verificação da identidade acima é o mais comum. Consiste em tomarmos um dos membros da igualdade — geralmente o menos simples — e, através de métodos algébricos e outras identidades já estabelecidas, transformá-lo no outro membro da igualdade.

▶ **2º** Muitas vezes, porém, os dois membros da identidade proposta são igualmente extensos ou complicados, não permitindo uma visão imediata do procedimento a ser seguido. Nesses casos, é aconselhável procurarmos simplificar, em separado, cada um dos membros, tentando encontrar uma identificação entre eles.

A identidade abaixo ilustra bem esse processo:

$$\text{sec } x - \text{tg } x = \frac{1}{\text{sec } x + \text{tg } x}$$

Tomando o primeiro membro, temos:

$$\text{sec } x - \text{tg } x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{1 - \text{sen } x}{\cos x} \quad (*)$$

Sem perspectivas, abandonamos o primeiro membro e trabalhamos com o segundo:

$$\frac{1}{\text{sec } x + \text{tg } x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x} + \frac{\text{sen } x}{\cos x}} = \frac{1}{\frac{1 + \text{sen } x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{1 + \text{sen } x}$$

Agora, visando à expressão de (*), basta multiplicar e dividir $\dfrac{\cos x}{1 + \text{sen } x}$ por $(1 - \text{sen } x)$; assim:

$$\frac{\cos x}{1 + \text{sen } x} \cdot \frac{1 - \text{sen } x}{1 - \text{sen } x} = \frac{\cos x (1 - \text{sen } x)}{1 - \text{sen}^2 x} = \frac{\cos x (1 - \text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - \text{sen } x}{\cos x}$$

Esta última expressão equivale à transformação obtida do 1º membro, o que verifica a identidade.

Porém, é verdade que, com um pouquinho mais de "coragem", já no início poderíamos fazer:

2º membro:

$$\frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x} \cdot \frac{\sec x - \operatorname{tg} x}{\sec x - \operatorname{tg} x} = \frac{\sec x - \operatorname{tg} x}{\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sec x - \operatorname{tg} x}{1}$$

$$= \sec x - \operatorname{tg} x \text{ (1º membro)}$$

▶ **3º** Uma alternativa pode ser a utilização de um fato bastante conhecido: se duas funções f e g são idênticas, a diferença $f - g$ é nula, e vice-versa. Assim, para verificarmos a identidade $\frac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{\cos a - \cos b} = \frac{\cos a + \cos b}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}$, podemos colocar como nosso novo objetivo a verificação da identidade:

$$\frac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{\cos a - \cos b} - \frac{\cos a + \cos b}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b} = 0$$

e partir, é claro, do 1º membro:

$$\frac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{\cos a - \cos b} - \frac{\cos a + \cos b}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b} =$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)(\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a) - (\cos a - \cos b)(\cos a + \cos b)}{(\cos a - \cos b)(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 a - (\cos^2 a - \cos^2 b)}{(\cos a - \cos b)(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)} = \frac{\operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 a - \cos^2 a + \cos^2 b}{(\cos a - \cos b)(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)} =$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}^2 b + \cos^2 b) - (\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a)}{(\cos a - \cos b)(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)} =$$

$$= \frac{1 - 1}{(\cos a - \cos b)(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)} = 0 \quad \text{(2º membro)}$$

Observação

Independentemente da escolha do processo a ser utilizado, quando a identidade apresentar muitas funções trigonométricas, é aconselhável reduzi-la, através das relações fundamentais, a uma nova identidade contendo apenas senos e cossenos.

Exercícios

18 Mostre, exibindo um contra-exemplo, que a igualdade $\cos x + \operatorname{sen} x = 1$ não é uma identidade.

19 A igualdade $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sec \theta}{\operatorname{cossec} \theta}$ é sempre válida? É válida para $\theta = \frac{\pi}{2}$? É uma identidade trigonométrica?

Verifique as identidades dos exercícios 20 a 36, utilizando qualquer processo.

20 $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x = \sec x$

21 $\frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$

22 $\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{cossec}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$

23 $\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x - \operatorname{cossec} x}$

24 $\operatorname{cossec} x = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$

25 $1 + \operatorname{sen}^4 x = 2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x$

26 $\frac{\text{tg } a - \text{sen } a}{\text{sen}^3 a} = \frac{\sec a}{1 + \cos a}$

27 $\frac{\text{sen } x}{\text{sen } x + \cos x} = \frac{\sec x}{\sec x + \text{cossec } x}$

28 $\frac{\sec \alpha - \cos \alpha}{\text{cossec } \alpha - \text{sen } \alpha} = \text{tg}^3 \alpha$

29 $(\text{cotg } x - \cos x)^2 + (1 - \text{sen } x)^2 = (1 - \text{cossec } x)^2$

30 $(1 + \text{tg } x)^2 + (1 + \text{cotg } x)^2 = (\sec x + \text{cossec } x)^2$

31 $(\text{tg } x - \text{cotg } x)(\text{cotg } x + \text{tg } x) =$
$= (\sec x - \text{cossec } x)(\text{cossec } x + \sec x)$

32 $\text{tg } x - \text{cotg } x = \frac{1 - 2\cos^2 x}{\text{sen } x \cos x}$

33 $1 - \text{sen}^2 \alpha = \frac{\text{cotg}^2 \alpha}{1 + \text{cotg}^2 \alpha}$

34 $(\text{sen } x - \text{cossec } x)^2 + (\cos x - \sec x)^2 -$
$- (\text{tg } x - \text{cotg } x)^2 = 1$

35 $\frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{\text{cotg } a + \text{cotg } b} = \text{tg } a \cdot \text{tg } b$

36 $(\text{tg } x - \text{sen } x)^2 + (1 - \cos x)^2 = (\sec x - 1)^2$

37 Exprima cotg x em função de sen x. Depois, exprima sen x em função de cotg x.

Testes de vestibulares

1 (Uneb-BA) Se x pertence ao intervalo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ e tg x = 2, então cos x vale:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2 (PUC-MG) O arco que tem medida x em radianos é tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{tg } x = -\sqrt{2}$. O valor do seno de x é:

a) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

3 (UA-AM) Sabendo que $\text{sen } x = \frac{2}{3}$ e que x está no 1º quadrante, o valor de cotg x é:

a) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

4 (U. E. Londrina-PR) Seja x a medida de um arco em radianos. O número real a, que satisfaz as sentenças $\text{sen } x = \sqrt{3 - a}$ e $\cos x = \frac{a - 2}{2}$, é tal que:

a) $a \geqslant 7$ d) $0 \leqslant a < 3$

b) $5 \leqslant a < 7$ e) $a < 0$

c) $3 \leqslant a < 5$

5 (UCDB-MT) Simplificando-se a expressão $y = \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\text{sen } x}$ obtém-se:

a) $y = 2 \text{ cotg } x$ d) $y = 2 \text{ tg } x$

b) $y = 2 \text{ sen } x$ e) $y = 2 \text{ cossec } x$

c) $y = 2 \cos x$

6 (UCDB-MT) Para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a expressão $(\cos^2 x)(\text{tg}^2 x + 1)$ é igual a:

a) $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$ d) $2 \text{ sen } x$

e) $\text{sen } x + \cos x$

b) $1 + \cos x$

c) 1

7 (UA-AM) A expressão:

$$\frac{1}{\text{cossec } x (1 + \cos x)} + \text{cossec } x (1 + \cos x)$$

é igual a:

a) $2 \text{ sen } x$ d) $2 \text{ tg } x$

b) $2 \cos x$ e) $2 \sec x$

c) $2 \text{ cossec } x$

8 (UA-AM) Para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $\text{sen } x \neq \cos x$, a expressão $\frac{\text{sen}^3 x - \cos^3 x}{\text{sen } x - \cos x}$ é idêntica a:

a) tg x

b) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x$

c) 1

d) $1 + \text{sen } x \cos x$

e) $(\text{sen } x + \cos x)^2$

9 (UCDB-MT) Sabe-se que $4\ \text{tg}^2 x = 9$ e $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$. Então a expressão $E = -4\ \text{sen}\ x - 6\ \cos x + \text{cotg}\ x$ vale:

a) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{9}{4}$

b) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{2}{3}$

10 (Unifor-CE) Para todo $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, a expressão $\frac{\text{cossec}\ \theta + \cos \theta}{\sec \theta + \text{sen}\ \theta}$ é equivalente a:

a) $-\text{tg}\ \theta$ d) $\text{cotg}\ \theta$

b) $\text{tg}\ \theta$ e) $\sec \theta \cdot \text{tg}\ \theta$

c) $-\text{cotg}\ \theta$

11 (U. F. Viçosa-MG) Sabendo que $\text{sen}\ x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o valor de $\frac{\text{cossec}\ x - \sec x}{\text{cotg}\ x - 1}$ é:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ c) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$ e) 3

b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ d) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

12 (Ucsal-BA) Qualquer que seja o número real x, a expressão $\cos^4 x - \text{sen}^4 x$ é equivalente a:

a) $\text{sen}^2 x - 1$ d) $2 - \cos^2 x$

b) $2\ \text{sen}\ x \cos x$ e) $(\text{sen}\ x + \cos x) \cdot \cos x$

c) $2\cos^2 x - 1$

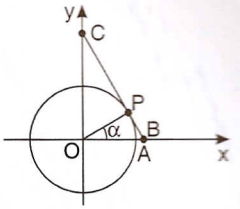
13 (Fesp/UPE-PE) Se $\text{sen}\ x + \cos x = a$ e $\text{sen}\ x \cos x = b$, podemos afirmar que:

a) $a + b = 1$ d) $a^2 - 2b = 1$

b) $a^2 + b^2 = 1$ e) $b^2 - 2a = 1$

c) $a - 2b^2 = 1$

14 (UF-RS) Na figura, o círculo é unitário e $\overline{BC}$ é tangente ao círculo no ponto P. Se o arco $\overset{\frown}{AP}$ mede α, BC vale:



a) $\tan \alpha + \cot \alpha$

b) $\text{sen}\ \alpha + \cos \alpha$

c) $\sec \alpha + \text{csc}\ \alpha$

d) $\tan \alpha + \text{sen}\ \alpha$

e) $\cot \alpha + \cos \alpha$

15 (F. M. Triângulo Mineiro-MG) Se $0 < x \leq \pi$ e $3\cos x + \text{sen}\ x = 3$, pode-se afirmar que:

a) $\text{tg}\ x < -1$ d) $\frac{1}{2} \leq \text{tg}\ x < 1$

b) $-1 \leq \text{tg}\ x < -\frac{1}{2}$ e) $\text{tg}\ x \geq 1$

c) $-\frac{1}{2} \leq \text{tg}\ x < \frac{1}{2}$

16 (ITA-SP) Sabe-se que x é um número real pertencente ao intervalo $]0, 2\pi[$ e que o triplo da sua secante, somado ao dobro da sua tangente, é igual a 3. Então, o cosseno de x é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{5}{13}$ e) $\frac{13}{49}$

b) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{15}{26}$

17 (Fuvest-SP) O dobro do seno de um ângulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, o valor de seu cosseno é:

a) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

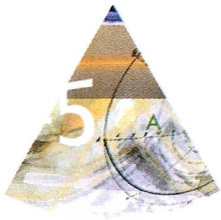
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

Desafios

1 Sendo x do 1º quadrante e $15\ \text{sen}\ x + 5\ \cos x = 9$, mostre que $\text{cotg}\ x > 3$.

2 Sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $15\ \text{sen}\ x - 5\ \cos x = 13$, determine os valores de $\text{sen}\ x$ e $\cos x$.

3 Considere a função do 2º grau na variável x, dada por $f(x) = x^2\ \text{sen}\ \theta + 2x\ \cos \theta - \text{sen}\ \theta$, com $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quais são as raízes da equação $f(x) = 0$?



16

TRANSFORMAÇÕES

1 ○ Introdução

O objetivo deste capítulo é a obtenção de fórmulas que nos possibilitem encontrar as funções circulares da soma de dois arcos, da diferença de dois arcos ou, ainda, do dobro (ou triplo) de um arco dado, além da fatoração de algumas expressões. Por exemplo, como são conhecidos os valores de sen 45°, sen 30°, cos 45°, etc., poderemos, em função deles, obter:

$$\text{sen } \underbrace{75^\circ}_{30^\circ + 45^\circ}, \qquad \cos \underbrace{15^\circ}_{45^\circ - 30^\circ}, \qquad \text{tg } \underbrace{105^\circ}_{45^\circ + 60^\circ}, \qquad \text{etc.}$$

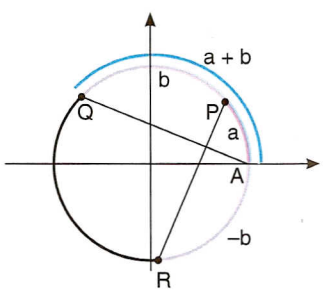
A primeira dedução é um pouco trabalhosa, porém muitas das outras decorrem dela e são bastante simples.

2 ○ Fórmulas de adição e subtração

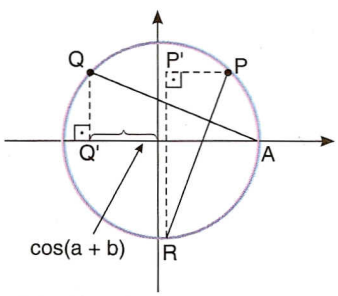
Cosseno da soma de dois arcos

Consideremos dois arcos, a e b, e determinemos cos (a + b).

Sejam P, Q e R as extremidades dos arcos a, a + b e –b, respectivamente, como mostra a figura ao lado, que retrata o ciclo trigonométrico.



Os arcos $\overset{\frown}{APQ}$ e $\overset{\frown}{RAP}$ possuem a mesma medida (a + b) e, conseqüentemente, as cordas $\overline{AQ}$ e $\overline{PR}$ também têm medidas iguais.



Sejam agora os pontos Q', projeção de Q sobre o eixo dos cossenos, e P', interseção da horizontal por P e da vertical por R.

$$AQ' = 1 + \overbrace{|\cos (a + b)|}^{\substack{\text{negativo, pois} \\ a + b \in 2^\circ Q}}$$

$$QQ' = \text{sen } (a + b)$$

$$P'R = \text{sen } a + |\text{sen } (-b)| = \text{sen } a + \text{sen } b$$

$$PP' = \cos a - \cos (-b) = \cos a - \cos b$$

Os triângulos AQQ' e PRP' são retângulos, em Q' e P', respectivamente. Aplicando o teorema de Pitágoras a cada um deles:

$$AQ^2 = AQ'^2 + QQ'^2$$
$$\Downarrow$$
$$AQ^2 = 1 + 2|\cos(a + b)| + \underbrace{\cos^2(a + b) + \operatorname{sen}^2(a + b)}_{1}$$
$$\Downarrow$$
$$AQ^2 = 2 + 2|\cos(a + b)|$$
$$\Downarrow$$
$$AQ^2 = 2[1 - \cos(a + b)]$$

$$PR^2 = PP'^2 + P'R^2$$
$$\Downarrow$$
$$PR^2 = \operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos^2 a - 2 \cos a \cos b + \cos^2 b$$
$$\Downarrow$$
$$PR^2 = 1 + 1 - 2 \cos a \cos b + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\Downarrow$$
$$PR^2 = 2[1 - (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)]$$

$$AQ = PR$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Exemplo 1

Para calcular cos 75° podemos utilizar a fórmula deduzida, fazendo:

$$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} 45°$$

Substituindo pelos valores conhecidos, temos:

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Cosseno da diferença de dois arcos

Para calcular cos (a – b), basta fazermos a – b = a + (–b) na fórmula anterior:

$$\cos(a - b) = \cos[a + (-b)] = \cos a \cos(-b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a (-\operatorname{sen} b),$$

donde $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$.

Seno da soma de dois arcos

Lembrando que $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, temos:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] =$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}_{\operatorname{sen} a} \cos b + \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}_{\cos a} \operatorname{sen} b$$

Finalmente, vem:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

Seno da diferença de dois arcos

Para calcular sen (a – b), basta fazermos novamente a – b = a + (–b) na fórmula do seno da soma de dois arcos:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}[a + (-b)] = \operatorname{sen} a \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b) \cos a$$

Então:

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

Exemplo 2

Para calcular sen 15° podemos fazer, por exemplo, 15° = 45° – 30°.

$$\text{sen } 15° = \text{sen } (45° - 30°) = \text{sen } 45° \cos 30° - \text{sen } 30° \cos 45°$$

Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Outro modo para calcular sen 15° seria:

$$\text{sen } 15° = \text{sen } (60° - 45°) = \text{sen } 60° \cos 45° - \text{sen } 45° \cos 60° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Tangente da soma de dois arcos

Lembrando que $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, para calcular tg (a + b), fazemos:

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{sen } (a + b)}{\cos (a + b)} = \frac{\text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a}{\cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b}$$

Dividindo o numerador e o denominador por cos a cos b, temos:

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b}{\cos a \cos b}} = \frac{\dfrac{\text{sen } a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\text{sen } b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\text{sen } a \text{ sen } b}{\cos a \cos b}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen } a}{\cos a} + \dfrac{\text{sen } b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\text{sen } a}{\cos a} \cdot \dfrac{\text{sen } b}{\cos b}}$$

Finalmente, vem:

$$\text{tg } (a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{ tg } b}, \text{ válida para}$$

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Tangente da diferença de dois arcos

Façamos novamente a – b = a + (–b):

$$\text{tg } (a - b) = \text{tg } [a + (-b)] = \frac{\text{tg } a + \text{tg } (-b)}{1 - \text{tg } a \text{ tg } (-b)} = \frac{\text{tg } a + (-\text{tg } b)}{1 - \text{tg } a \ (-\text{tg } b)}$$

Então:

$$\text{tg } (a - b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \text{ tg } b}, \text{ válida para}$$

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 3

No cálculo de tg 75° podemos fazer $75° = 120° - 45°$, com a = 120° e b = 45°:

$$\text{tg } 75° = \frac{\text{tg } 120° - \text{tg } 45°}{1 + \text{tg } 120° \cdot \text{tg } 45°} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{1 + (-\sqrt{3}) \cdot 1} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{-2(2 + \sqrt{3})}{-2} = 2 + \sqrt{3}$$

Exercícios

1 Determine sen 75°, cos 15° e tg 15°.

2 Calcule tg 105° e cotg 15°.

3 Efetue o produto sen 75° · sen 15°.

4 Ache o valor de sen 50° cos 20° – sen 20° cos 50°.

5 Mostre que 2 cos 40° cos 20° = 1 + 2 sen 40° sen 20°.

6 Simplifique a expressão $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

7 Mostre que sen (a + b) · sen (a – b) = sen^2 a – sen^2 b.

8 (UF-PA) Sendo *a* e *b* dois ângulos tais que $\text{tg } a = \frac{1}{2}$ e $\text{tg } b = \frac{1}{3}$, encontre, em graus, o valor do ângulo a + b.

9 Sabendo que sen 18° ≅ 0,31, calcule, sem usar a tabela, os valores aproximados de:

a) cos 63° b) tg 78° c) sen 42°

10 Sabendo que $\text{cotg } a = \frac{3}{2}$ e $\text{cotg } b = \frac{2}{3}$, o que se pode afirmar a respeito de tg (a + b)?

11 Sendo $\text{cotg } a = \frac{2}{5}$ e $\text{cotg } b = \frac{3}{2}$, calcule cotg (a + b).

12 Dado que $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$ e $\text{tg } \beta = \frac{4}{3}$, determine cotg (α + β).

13 Dados sen 10° = a e sen 20° = b, calcule, sem usar a tabela, o valor da expressão $y = a\sqrt{(1 - b)(b + 1)} + b\sqrt{(a + 1)(1 - a)}$.

14 Demonstre as seguintes identidades:

a) $\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} = \text{tg } \frac{x}{2}$ b) $\frac{\text{sen } 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \text{tg } \theta$

3 Fórmulas de multiplicação

Dadas as funções circulares de um arco *a*, é possível, mediante a aplicação das fórmulas deduzidas, encontrarmos as funções circulares dos arcos 2a, 3a, ..., chamados, respectivamente, de arco duplo, arco triplo, ...

No caso do arco duplo, fazemos 2a = a + a; para o arco triplo, 3a = 2a + a; e assim por diante.

Vejamos as funções circulares de 2a:

▶ **1ª** *Cosseno*

$$\cos 2a = \cos (a + a) = \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

Usando a relação fundamental I:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$$

ou

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1$$

Resumindo:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$
$$\cos 2a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$$
$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

Temos, assim, três fórmulas equivalentes para o cálculo de cos 2a. Dependendo da situação, podemos escolher a mais indicada em cada caso.

▶ **2ª** *Seno*

$$\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen} (a + a) = \operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} a \cos a$$

Então:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

▶ **3ª** *Tangente*

$$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg} (a + a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a}$$

Então:

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, \text{ válida para } a \neq k \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 4

Sendo dados $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, para determinar as funções circulares de 2α, fazemos:

- $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$
- no caso da tangente, podemos ter, diretamente:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{120}{119}$$

ou, aplicando a fórmula:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}} = \frac{120}{119}$$

Exemplo 5

Para calcular o valor de $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$, devemos multiplicar ambos os membros da igualdade por 2:

$$2y = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$$

Pelo seno do arco duplo, temos:

$$2y = \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Assim, $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$.

Exercícios

15 Se $\cos x = \frac{2}{7}$ e $0 < x < \pi$, qual é o valor de sen 2x? E o de tg 2x?

16 Sendo $\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{7}$, determine tg 2α.

17 Se $\sec x = \frac{15}{8}$, qual é o valor de cos 2x?

18 Sendo $\operatorname{cossec} x = \frac{5}{4}$, qual é o valor de cos 2x? E o de sen 2x?

19 Mostre que $\frac{\operatorname{sen} a \cos a}{2 \operatorname{sen}^2 a - 1} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}^2 a - 1}$.

20 Simplifique a expressão $y = \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} - \operatorname{sen}^2 x$.

21 (UFF-RJ) Sabendo que $\operatorname{sen} x - \cos x = \frac{1}{3}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, determine sen 2x.

22 Calcule sen 2x e cos 2x, sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{7}{5}$.

23 Verifique as seguintes identidades:

a) $4 \cdot (1 - 2 \operatorname{sen}^2 a) \cdot \operatorname{sen} a \cos a = \operatorname{sen} 4a$

b) $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a}$

24 Se $a = 2 \cdot \cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$, quanto vale $3a^2$?

25 Se tg 2m = 2, determine tg m e interprete geometricamente o problema.

26 Verifique as seguintes identidades:

a) $2 \operatorname{cossec} 2a = \sec a \cdot \operatorname{cossec} a$

b) $\frac{2}{\operatorname{cossec}^2 \alpha} = 1 - \frac{1}{\sec 2\alpha}$

c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$

27 Mostre que:

a) $\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a$

b) $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

4 ○ Fórmulas de transformação em produto

Para a fatoração de certas expressões, a Trigonometria dispõe de algumas fórmulas próprias, que, quando associadas aos recursos algébricos de que já dispomos, permitirão a fatoração de expressões como sen x + sen y, cos x – cos y, sen x + cos x e outras. Tais fórmulas são conhecidas como fórmulas de prostaférese (transformação).

Transformação de somas e diferenças de senos

Tomemos as expressões do seno da soma e do seno da diferença de dois arcos:

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$$
$$\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cos b - \text{sen } b \cos a$$

Somando-as e subtraindo a 2ª da 1ª, membro a membro, obtemos, respectivamente:

$$\text{sen } (a + b) + \text{sen } (a - b) = 2 \text{ sen } a \cos b$$
$$\text{sen } (a + b) - \text{sen } (a - b) = 2 \text{ sen } b \cos a$$

Façamos $a + b = p$ e $a - b = q$. Assim:

$$a = \frac{p + q}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{p - q}{2}$$

Daí:

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}$$

Exemplo 6

Para fatorar $y = \text{sen } 3x + \text{sen } x$, fazemos:

$$\frac{3x + x}{2} = 2x \quad \text{e} \quad \frac{3x - x}{2} = x$$

Daí:

$$y = 2 \text{ sen } 2x \cdot \cos x = 2 \cdot 2 \text{ sen } x \cos x \cdot \cos x \quad \text{e}$$
$$y = 4 \text{ sen } x \cos^2 x.$$

Exemplo 7

Para transformar em produto $t = 1 - \text{sen } x$, podemos lançar mão da 2ª expressão, fazendo $t = \text{sen } 90° - \text{sen } x$.

Vem:

$$t = 2 \text{ sen } \frac{90° - x}{2} \cos \frac{90° + x}{2} = 2 \text{ sen } \left(45° - \frac{x}{2}\right) \cos \left(45° + \frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2 \left(\text{sen } 45° \cos \frac{x}{2} - \text{sen } \frac{x}{2} \cos 45°\right)\left(\cos 45° \cos \frac{x}{2} - \text{sen } 45° \text{ sen } \frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \text{sen } \frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \text{sen } \frac{x}{2}\right) = \left(\cos \frac{x}{2} - \text{sen } \frac{x}{2}\right)^2$$

Transformação de somas e diferenças de cossenos

Tomemos as expressões do cosseno da soma e do cosseno da diferença de dois arcos:

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Somando-as e subtraindo a 2ª da 1ª, membro a membro, obtemos, respectivamente:

$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cos b$$
$$\cos (a + b) - \cos (a - b) = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Fazendo $a + b = p$ e $a - b = q$, ou seja, $a = \frac{p + q}{2}$ e $b = \frac{p - q}{2}$, temos:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p + q}{2} \operatorname{sen} \frac{p - q}{2}$$

Exemplo 8

Fatorando $y = \cos 70° - \cos 20°$, fazemos:

$$\frac{70° + 20°}{2} = \frac{90°}{2} = 45° \quad \text{e} \quad \frac{70° - 20°}{2} = \frac{50°}{2} = 25°$$

Assim:

$$y = -2 \operatorname{sen} 45° \cdot \operatorname{sen} 25° = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sen} 25° = -\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} 25°$$

Observação

Em todas as fatorações apresentadas ocorre repetição da função (seno ou cosseno); se eventualmente aparecer, por exemplo, uma expressão do tipo $y = \cos 20° + \operatorname{sen} 50°$, poderemos escrever, lembrando que $\operatorname{sen} x = \cos (90° - x)$:

$$y = \cos 20° + \cos 40° \quad \text{ou} \quad y = \operatorname{sen} 70° + \operatorname{sen} 50°$$

e fatorar normalmente, como nos exemplos apresentados.

Exercícios

28 Em cada caso fatore a expressão:

a) $M = \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$ b) $N = \operatorname{sen} \frac{3x}{2} + \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ c) $P = \cos x + \cos 3x$

29 Fatore a expressão de cada caso:

a) $Q = \operatorname{sen} 30° + \operatorname{sen} 10°$ b) $R = \operatorname{sen} 40° - \operatorname{sen} 20°$ c) $S = \operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 20°$

30 Escreva a forma fatorada de $y = \operatorname{sen} 25° + \cos 35°$.

31 Calcule, sem usar a tabela, o valor de $\cos 95° + \cos 145° + \cos 25°$.

32 Verifique a identidade:

$$\frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

33 Transforme em produto $\cos 4x - \cos 2x$.

34 Fatore as expressões:

a) $y = \text{tg } 40^\circ + \text{tg } 50^\circ$ b) $z = \text{tg } 50^\circ - \text{tg } 40^\circ$

35 Escreva $y = 1 - \text{sen } 2x$ como um produto.

36 Transforme em produto:

a) $A = 1 + \text{sen } 2x$ b) $B = 1 + \cos x$

37 Simplifique a expressão $y = \dfrac{1 - \text{tg } x}{1 + \text{tg } x}$. A seguir, calcule o valor de $\dfrac{1 - \text{tg } 70^\circ}{1 + \text{tg } 70^\circ}$.

38 Calcule o valor numérico de cada uma das expressões:

a) $A = \text{sen } \dfrac{11\pi}{12} \cdot \text{sen } \dfrac{13\pi}{12}$ b) $B = \cos \dfrac{7\pi}{8} \cdot \cos \dfrac{\pi}{8}$

39 Fatore a expressão $y = \text{tg } x + \dfrac{1}{\text{tg } x}$.

Testes de vestibulares

1 (PUC-RS) Se $\text{tg } x = \dfrac{1}{3}$ e $\text{tg } y = \dfrac{1}{5}$, então $\text{tg } (x - y)$ é igual a:

a) $\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{4}{7}$ e) $-\dfrac{1}{15}$

b) $\dfrac{2}{3}$ d) $\dfrac{1}{8}$

2 (Cefet-PR, adaptado) Considere $\text{sen } A = \dfrac{x}{y}$ e $\text{sen } B = \dfrac{y}{2y + x}$, com A e B pertencentes ao primeiro quadrante.
Se $x = 3$ e $y = 5$, então $\text{sen } (A + B)$ é igual a:

a) $-\dfrac{16}{65}$ c) $\dfrac{16}{65}$ e) $-\dfrac{56}{65}$

b) $\dfrac{65}{56}$ d) $\dfrac{56}{65}$

3 (Unifor-CE) A expressão $\left(\text{sen } \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{2}\right)^2$ é equivalente a:

a) 1 c) $\cos^2 \dfrac{x}{2}$ e) $1 + \cos x$

b) 0 d) $1 + \text{sen } x$

4 (U. F. Juiz de Fora-MG) A expressão $\text{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$, sendo θ um número real, é igual a:

a) 1 c) $\cos \theta$

b) $\text{tg}\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ d) $\text{sen } 2\theta$

5 (Puccamp-SP) Se k é um número real tal que $\text{sen } x = k$, então:

a) $k \neq 1$ d) $\cos (-x) = -k$

b) $k \geqslant 1$ e) $\cos 2x = 1 - 2k^2$

c) $\text{sen } (2\pi - x) = k$

6 (Mackenzie-SP) Se $\text{sen } \dfrac{x}{2} \cdot \cos \dfrac{x}{2} = k$, então um possível valor de k é:

a) $\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{3}{8}$ e) $-\dfrac{7}{10}$

b) $-\dfrac{4}{5}$ d) $\dfrac{3}{5}$

7 (Mackenzie-SP)

$$\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\text{sen } \frac{x}{2}\right)^2 + 2 \cdot \text{sen } \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

Se α é a soma das soluções da equação acima, resolvida em $[0, 2\pi]$, então o valor de $\text{sen } \dfrac{\alpha}{2}$ é:

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8 (UE-CE) Se $\sec \theta = \frac{2\sqrt{14}}{7}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $98 \cdot \operatorname{cotg}^2 2\theta - 37$ é igual a:

a) 86 b) 87 c) 88 d) 89

9 (UF-PI) Se $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\sqrt{14}}{4}$, então $\cos 2\theta$ vale:

a) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{8}$

b) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

10 (PUC-MG) A expressão $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$ é igual a:

a) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$
b) $\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta$
c) $\sec \alpha + \sec \beta$
d) $\operatorname{cossec} \alpha + \operatorname{cossec} \beta$
e) $\cos \alpha + \cos \beta$

11 (U. Nova Iguaçu-RJ) Se $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 7$, o valor numérico de $E = 21 \operatorname{sen} 2x$ é:

a) 6 c) $\frac{2}{7}$ e) $\frac{7}{5}$

b) 12 d) 5

12 (UFF-RJ) A expressão

$\cos(x + \pi) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{cotg} x$,

em que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, é equivalente a:

a) $\frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$ d) $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$

b) x e) $x \operatorname{cotg} x$

c) $2 \cos 2x$

13 (Fuvest-SP) Se $\operatorname{tg} \theta = 2$, então o valor de $\frac{\cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} 2\theta}$ é:

a) -3 c) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

b) $-\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

14 (UCDB-MT) Considere $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

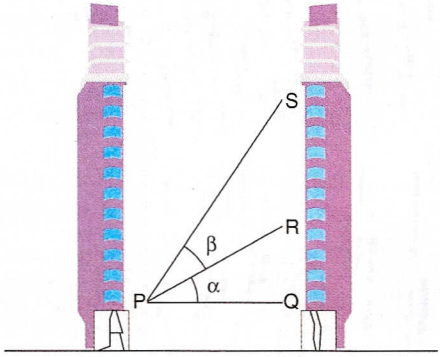
Se $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, então $5 \cos(x + y)$ é igual a:

a) $3 \operatorname{sen} y + 4 \cos y$
b) $3 \operatorname{sen} y - 4 \cos y$
c) $4 \operatorname{sen} y - 3 \cos y$
d) $4 \operatorname{sen} y + 3 \cos y$
e) $4 \cos y - 3 \operatorname{sen} y$

15 (PUC-RS) A expressão $\cos^4 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$ é idêntica a:

a) $2 \cdot \cos 2\alpha$
b) $2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$
c) $\cos 2\alpha$
d) $\operatorname{sen} 2\alpha$
e) $\cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha$

16 (UF-RN) Um observador, situado no ponto P de um prédio, vê três pontos, Q, R e S, numa mesma vertical, em um prédio vizinho, conforme esquematizado na figura abaixo. P e Q estão num mesmo plano horizontal, R está 6 metros acima de Q, e S está 24 metros acima de Q. Verifica-se que o ângulo α do triângulo QPR é igual ao ângulo β do triângulo RPS.



O valor, em metros, que *mais se aproxima* da distância entre P e Q é:

a) 8,5 b) 8,8 c) 9,4 d) 10,2

17 (Fuvest-SP) Os números reais $\operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$, sen a e $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}$ formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então o valor de sen a é:

a) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

18 (UFF-RJ) Sendo $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}$, a expressão $[(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - \operatorname{sen}(2x)]^n$ é equivalente a:

a) $[\operatorname{sen}(2k\pi)]^n$
b) $[\cos(2k\pi + \pi)]^n$
c) $\cos(nk\pi)$
d) $\left[\operatorname{sen}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right]^n$
e) $\operatorname{sen}(nk\pi)$

19 (Fuvest-SP) Sendo $\operatorname{sen}\alpha = \frac{9}{10}$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tem-se:

a) $\operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} < \operatorname{sen} 2\alpha$

b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} < \operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen} 2\alpha$

c) $\operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen} 2\alpha < \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

d) $\operatorname{sen} 2\alpha < \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} < \operatorname{sen}\alpha$

e) $\operatorname{sen} 2\alpha < \operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

20 (FGV-SP) A expressão $\operatorname{sen} x - \cos x$ é idêntica a:

a) $\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $2 \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

e) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

21 (Vunesp-SP) O seno do ângulo da base de um triângulo isósceles é igual a $\frac{1}{4}$. Então, a tangente do ângulo do vértice desse triângulo é igual a:

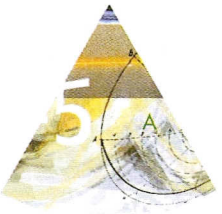
a) $\frac{-\sqrt{13}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{5}$ c) $\frac{-\sqrt{15}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{14}}{7}$ e) $\frac{-\sqrt{15}}{7}$

Desafios

1 Mostre que $4 \operatorname{sen} 37{,}5^\circ \cdot \cos 7{,}5^\circ = 1 + \sqrt{2}$.

2 Sendo $\operatorname{sen} 18^\circ = \sqrt{a}$, determine o valor de $\cos 54^\circ$ em função de a.

3 Obtenha o valor de $y = 4\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} - \cos\frac{3\pi}{8} \cdot \cos\frac{5\pi}{8}\right)$.



17

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

1 Equações elementares

No capítulo 'Relações entre funções', tratamos detalhadamente da verificação de identidades trigonométricas, que são igualdades válidas independentemente dos valores atribuídos às variáveis, respeitados os domínios das funções envolvidas. Há, porém, na Trigonometria, outras igualdades, as *equações trigonométricas*, que se verificam apenas para *alguns valores* das variáveis, no caso chamadas de *incógnitas*.

Para que tenhamos, então, uma equação trigonométrica, basta que apareça uma igualdade contendo uma incógnita (ou mais de uma) submetida a alguma função trigonométrica.

São exemplos de equações trigonométricas:

$$\sec x - \cos x = 1 \quad \text{e} \quad 1 - \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$$

Conjunto universo

Antes de classificar as equações, e até de iniciar o processo de resolução, devemos abordar os modos de apresentação do conjunto universo de uma equação.

O conjunto universo U de uma equação trigonométrica pode vir expresso quando da proposição da equação. É comum vermos, por exemplo, o enunciado "Resolva a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$, $x \in [0, \pi]$", que equivale a "Resolva a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$, sendo $U = [0, \pi]$" e significa que interessam apenas os valores de x que satisfazem a equação dada e estão entre 0 e π.

No entanto, mais freqüentemente, o conjunto universo é omitido; nesses casos, considera-se $U = \mathbb{R}$. Por exemplo, se for apresentado simplesmente o enunciado "Resolva a equação $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$", devemos tomar o conjunto dos números reais como conjunto universo.

Resolução das equações

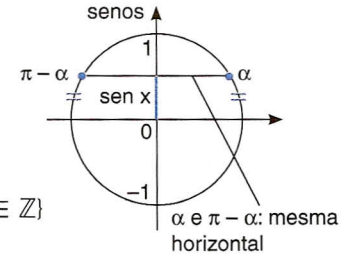
De modo geral, por mais complicada que possa parecer uma equação, é possível reduzi-la a uma equação de um dos seguintes tipos:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha,$$
$$\cos x = \cos \alpha,$$
$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha,$$

sendo x a incógnita e α um arco de medida conhecida.

Por esse motivo, as equações acima são as três *equações fundamentais*.

Resolução da equação fundamental sen x = sen α



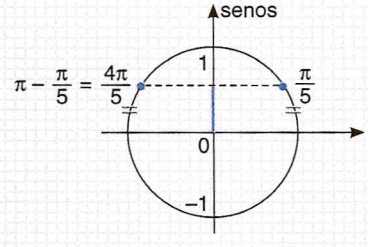
Em relação a α, há duas possibilidades para *x*:

- **1ª** *x* é côngruo a $\alpha \Rightarrow x = \alpha + 2k\pi$.
- **2ª** *x* é côngruo a $\pi - \alpha \Rightarrow x = (\pi - \alpha) + 2k\pi$.

Assim: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = (\pi - \alpha) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplo 1

Vamos resolver a equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$, sendo $U = \mathbb{R}$.



Temos:

$$x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou}$$

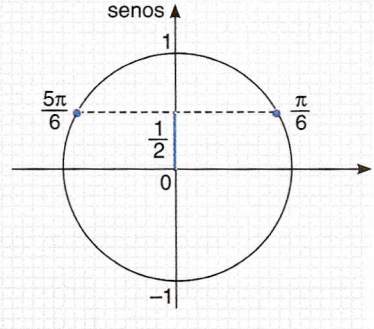
$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Podemos escrever:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemplo 2

Na resolução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, inicialmente devemos observar que $\frac{1}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$, recaindo na equação $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$, a qual se resolve como no exemplo anterior:



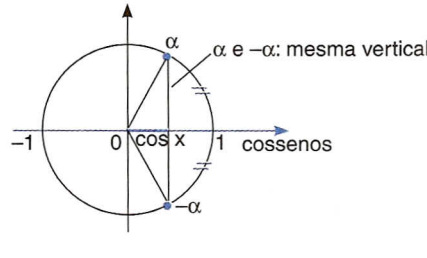
$$x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\pi \text{ ou}$$

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Finalmente:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Resolução da equação fundamental cos x = cos α



Devemos considerar, em relação a α, duas possibilidades para *x*:

- **1ª** *x* é côngruo a $\alpha \Rightarrow x = \alpha + 2k\pi$
- **2ª** *x* é côngruo a $-\alpha \Rightarrow x = -\alpha + 2k\pi$

Englobando, temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplo 3

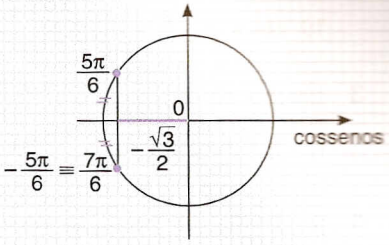
Vamos resolver a equação $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$, temos:

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Assim, escrevemos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$



Exemplo 4

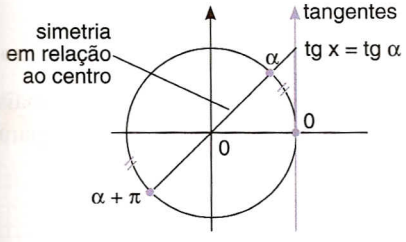
Para resolver a equação $\cos 2x = 0$, temos:

$$2x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Resolução da equação fundamental tg x = tg α



Temos aqui também duas possibilidades: ou as extremidades de x e α coincidem, ou elas são simétricas em relação ao centro do ciclo.

Assim, temos:

$$x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = (\alpha + \pi) + 2k\pi,$$

o que equivale a dizer que $x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

O conjunto solução se escreve:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemplo 5

Na resolução da equação $\text{tg } 2x = 1$, como $\text{tg } 2x = 1 = \text{tg } \frac{\pi}{4}$, temos:

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercícios

1 Resolva as equações em $\mathbb{R}$:

a) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

b) $\text{sen } x = 1$

c) $\text{sen } x = \pm 1$

d) $\text{sen } 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen } x = 0$

2 Resolva em $\mathbb{R}$:

a) $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = 0$

d) $\cos 3x = 1$

e) $\cos x = \frac{1}{2}$

3 Resolva em $\mathbb{R}$:

a) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

b) $\operatorname{tg} x = 1$

c) $\operatorname{tg} x = 0$

d) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$

4 Sendo $U =]0, 2\pi[$, ache o conjunto solução de cada uma das equações abaixo:

a) $\operatorname{tg}^2 x = 1$

b) $4 \cos^2 x = 3$

c) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$

d) $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$

5 Resolva as equações:

a) $\operatorname{sen} 2x = \cos 2x$

b) $\operatorname{sen}^2 x = \pm 3$

c) $\cos x = \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12}$

d) $\operatorname{sen} 2x = 1$

e) $\operatorname{sen}^2 x = \cos \frac{\pi}{2}$

Artifícios para resolução de algumas equações

Muitas equações podem ter uma resolução facilitada com a adoção de alguns artifícios algébricos.

Mudança de variável

Através da escolha adequada de uma nova variável, recai-se numa equação de resolução mais simples. É preciso que, após a resolução da equação modificada, se retome a equação original para a obtenção do conjunto solução.

Exemplo 6

Para resolver a equação $(1 - \operatorname{sen} x)^2 - 3(1 - \operatorname{sen} x) + 2 = 0$, devemos adotar $1 - \operatorname{sen} x = t$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau em t, temos:

$$t = 1 \quad \text{ou} \quad t = 2$$

Retomando a variável original:

- $t = 1 \Rightarrow 1 - \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $t = 2 \Rightarrow 1 - \operatorname{sen} x = 2 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Finalmente:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Utilização das relações entre as funções circulares

As relações apresentadas no capítulo 15 são de grande importância na resolução de equações

Exemplo 7

Seja a equação $\frac{8\sqrt{3}}{\text{cotg } x} - 6 = 6 \text{ tg}^2 x$.

Lembrando que $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$, podemos fazer:

$$8\sqrt{3} \text{ tg } x - 6 = 6 \text{ tg}^2 x \Rightarrow 3 \text{ tg}^2 x - 4\sqrt{3} \text{ tg } x + 3 = 0$$

Fazendo tg x = t, temos:

$$3t^2 - 4\sqrt{3}\, t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48 - 36}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

Vem:

$$t = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } x = \sqrt{3} \qquad \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Assim:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Fatoração algébrica

Os diversos casos de fatoração devem ser utilizados quando necessário; às vezes, devem ser combinados com outros artifícios.

Exemplo 8

Para resolução da equação $\cos^3 x - \cos x = 0$ fazemos:

$$\cos^3 x - \cos x = \cos x (\cos^2 x - 1) \overset{RF\ I}{=} \cos x (-\text{sen}^2 x) = -\cos x \cdot \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x \cdot \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \text{sen}^2 x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Finalmente:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemplo 9

A equação $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \frac{1}{2}$ deve ser resolvida através da fatoração do 1º membro:

$$\cos^4 x - \text{sen}^4 x = (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)}_{=1} = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Daí:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

6 Sendo $x \in [0, 4\pi]$, resolva a equação $\operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 3 = 0$.

7 Sendo $U = [-\pi, \pi]$, resolva a equação $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \frac{7}{4}$.

8 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$.

9 Com $U = [0, 2\pi]$, apresente o conjunto solução de cada uma das equações a seguir:

a) $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$ b) $\sec^2 x - 2 = 0$ c) $3 \sec^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$

Resolva as equações apresentadas nos exercícios 10 a 25.

10 $\operatorname{cossec} x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

11 $\cos x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}$

12 $\operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{2}$

13 $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

14 $\operatorname{sen} 2x = -2$

15 $\cos^2 2x = 1$

16 $\operatorname{cotg}^2 x = 3$

17 $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2$

18 $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

19 $|\operatorname{sen} x| = 1$

20 $\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x = 0$

21 $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$

22 $1 - 4 (\operatorname{sen} x + 1) + 4 (\operatorname{sen} x + 1)^2 = 0$

23 $(\sec x - 2)^2 = -2 (\sec x - 2)$

24 $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$

25 $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

26 (UF-GO) Determine todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ para os quais $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica.

27 Resolva a equação $\operatorname{tg}^2 2x = \sec^2 x - 1$.

28 Que figura tem como vértices as extremidades dos arcos que verificam a equação $\operatorname{cossec}^2 x + \operatorname{cossec} x - 2 = 0$? Qual é sua área?

29 (UF-PA) Dê a solução geral da equação $(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)^2 + \cos^2 4x = \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen}^2 4x$.

30 (Unicamp-SP) Considere a função $S(x) = 1 + 2 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen}^3 x$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$. b) Resolva a equação $S(x) = 0$, para $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

31 Resolva, sendo $x \in [0, 2\pi]$, a equação $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$.

32 Resolva o sistema $\begin{cases} \operatorname{sen} (x + y) + \operatorname{sen} (x - y) = 2 \\ \operatorname{sen} x + \cos y = 2 \end{cases}$

33 (Fuvest-SP) Determine os números reais x e y, com $0 \leq x + y \leq \pi$ e $0 \leq y \leq \pi$, tais que

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\frac{1}{4} \\ \cos (x + y) + \cos (x - y) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

34 Sendo $a \in \mathbb{R} - \left\{m \mid m = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, resolva a equação $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} (x + a) \cdot \operatorname{tg} (x - a)$.

35 Ache todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ para os quais:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

b) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$

2 ○ Inequações elementares

Como ocorre com as equações, as inequações trigonométricas de modo geral podem recair em inequações mais simples, as chamadas *inequações fundamentais*, que são:

$\operatorname{sen} x > m$ $\quad \cos x > m$ $\quad \operatorname{tg} x > m$
$\operatorname{sen} x < m$ $\quad \cos x < m$ $\quad \operatorname{tg} x < m$, sendo $m \in \mathbb{R}$

Antes de partirmos para a resolução de cada uma das inequações fundamentais, devemos lembrar que, em lugar dos sinais $<$ e $>$, podemos ter também $\leqslant$ e $\geqslant$, o que não altera a resolução, exigindo apenas algum cuidado.

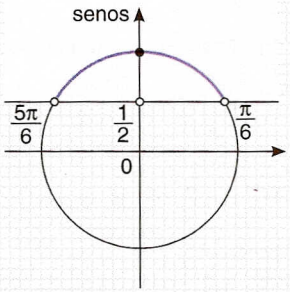
Resolução das inequações

Cada uma das inequações fundamentais será apresentada por meio de exemplos introdutórios, sendo que para cada caso será construída uma figura para auxiliar a visualização do conjunto solução.

Resolução da inequação fundamental $\operatorname{sen} x > m$

Exemplo 10

Seja a inequação $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$.



Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto correspondente ao número $\frac{1}{2}$ e, por esse ponto, traçamos uma horizontal. Os valores de x procurados situam-se na interseção do ciclo com o semiplano situado acima da horizontal.

Assim, temos:

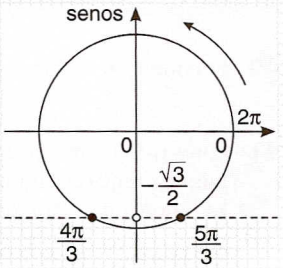
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Se tivéssemos a inequação $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{1}{2}$, faríamos:

$$S' = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemplo 11

Para a resolução da inequação $\operatorname{sen} x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ o procedimento é análogo, porém, como devemos "rodar" pelo ciclo trigonométrico no sentido anti-horário a partir do zero e $\frac{5\pi}{3} > \frac{4\pi}{3}$, o conjunto solução deve ser "repartido".



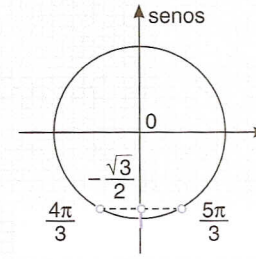
Assim:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x < 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ou, finalmente:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x < (k + 1)2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemplo 12



Considere a inequação $\text{sen } x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Inicialmente marcamos sobre o eixo dos senos o ponto que dista $\frac{\sqrt{3}}{2}$ do $\frac{\sqrt{3}}{2}$ do centro do ciclo — abaixo dele, pois $-\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ — e por esse ponto traçamos uma reta horizontal, abaixo da qual encontram-se os pontos procurados.

Temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

No caso de $\text{sen } x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$, escreveríamos:

$$S' = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercícios

36 Resolva as inequações:

a) $\text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\text{sen } x > 0$ c) $\text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

37 (Unirio-RJ) Obtenha o conjunto solução da inequação $\text{sen } x \geqslant \frac{1}{2}$, sendo $0 \leqslant x < 2\pi$.

38 Resolva as inequações:

a) $\text{sen } x < 1$ c) $\text{sen } 2x > 0$ e) $2\,\text{sen}^2 x - \text{sen } x \geqslant 0$

b) $\text{sen } x \leqslant -1$ d) $\text{sen } x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

39 Resolva a inequação $|\text{sen } x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo $U = [0, 2\pi]$.

40 Encontre os valores reais de x para os quais $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

41 (Unesp-SP) Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em °C) do solo em uma determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às 3 horas da manhã do primeiro dia (t = 0) e terminou 72 horas depois (t = 72). Os dados puderam ser aproximados pela função $H(t) = 15 + 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right)$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação e H(t), a temperatura (em °C) no instante t.

a) Resolva a equação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) = 1$, para $t \in [0, 24]$.

b) Determine a temperatura máxima atingida e o horário em que essa temperatura ocorreu no primeiro dia de observação.

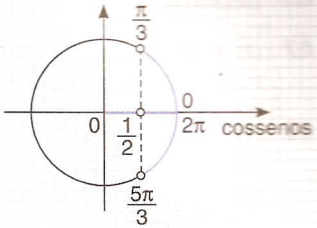
Resolução da inequação fundamental cos x > m

Exemplo 13

Seja a inequação $\cos x > \frac{1}{2}$.

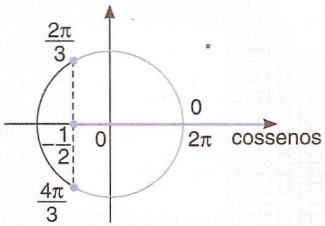
Marcamos o ponto que dista $\frac{1}{2}$ do centro do ciclo — à direita dele, pois $\frac{1}{2} > 0$ — e, por ele, traçamos uma reta vertical, à direita da qual encontramos, no ciclo, os pontos desejados.

Assim:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{3} < x < (k+1)2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

No caso da inequação $\cos x \geq -\frac{1}{2}$, podemos escrever:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x < (k+1)2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

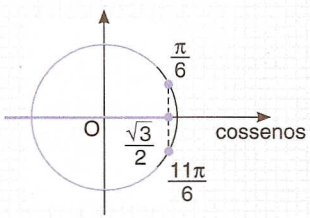
Resolução da inequação fundamental cos x < m

Em geral, nesses casos aparece apenas um intervalo no conjunto solução.

Exemplo 14

Tomemos a inequação $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Basta marcar à direita de *O* o ponto que dista $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dele e traçar a reta vertical, à esquerda da qual encontramos, no ciclo, os pontos desejados.

Assim:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercícios

42 Resolva as inequações:

a) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

43 Sendo U = [0, 2π], resolva as inequações:

a) $\cos x < 0$

b) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos^2 x \leq \frac{3}{4}$

44 Resolva as inequações:

a) $\cos x \geq 1$

b) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x \leq 1$

d) $2 \cos x - \text{sen}^2 x \leq \cos^2 x$

45 Resolva as inequações:

a) $\operatorname{sen} x > \cos x$

b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} > 1$

46 Determine os valores reais de x para os quais temos $3^{2 \operatorname{sen} x - 1} > 1$.

47 (U. F. Ouro Preto-MG) Seja $A = \{\theta \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ o domínio da função $f(\theta) = -3 \operatorname{sen} \theta - 2 \cos^2 \theta + 3$. Para quais valores do domínio vale a desigualdade $f(\theta) < 0$?

48 (Vunesp-SP) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que ele era periódico e podia ser aproximado pela expressão:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} t + \frac{5\pi}{4}\right),$$

sendo t o tempo (em horas) decorrido após o início da observação ($t = 0$) e $P(t)$ a profundidade da água (em metros) no instante t.

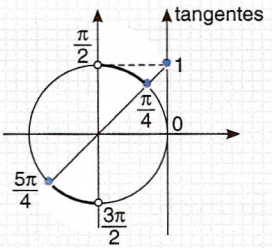
a) Resolva a equação $\cos\left(\frac{\pi}{6} t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$, para $t > 0$.

b) Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

Resolução da inequação fundamental $\operatorname{tg} x > m$

Exemplo 15

Resolver a inequação $\operatorname{tg} x \geq 1$. Como sabemos que $1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, podemos escrever, observando a figura:



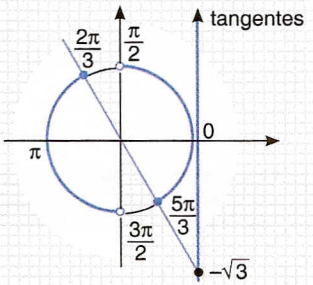
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Mesmo nos casos em que $m < 0$, o procedimento é análogo.

Exemplo 16

Seja a inequação $\operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3}$.

Como $-\sqrt{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right)$, podemos escrever:



$$0 + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} + k\pi \leq x < \pi + k\pi \quad \text{e}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} + k\pi \leq x < (k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

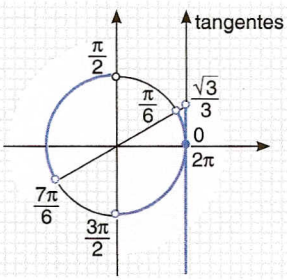
Note que, se fosse imposto o intervalo $[0, 2\pi]$ como conjunto universo para a inequação acima, teríamos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi\right\}$$

Resolução da inequação fundamental $\operatorname{tg} x < m$

Exemplo 17

Resolver a inequação $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Como sabemos que $\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, podemos escrever:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x < (k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercícios

Resolva as inequações apresentadas nos exercícios 49 a 54.

49 $\operatorname{tg} x < 1$

50 $\operatorname{tg} x \leq -1$

51 $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

52 $\operatorname{tg} x < 0$

53 $\operatorname{sen} x \cos x > 0$

54 $\operatorname{cotg} x < \sqrt{3}$

55 Resolva, em $[0, 2\pi[$, a inequação $\operatorname{tg}^2 x \geq 1$.

56 Resolva em $[0, 2\pi]$: $\sqrt{3} < 3 \operatorname{tg} x < 3\sqrt{3}$.

57 Resolva a inequação $0 < \operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

58 Encontre a solução do sistema
$\begin{cases} \operatorname{tg} x < 0 \\ \operatorname{sen} x \cos x > 0 \end{cases}$

Testes de vestibulares

1 (Unirio-RJ) O conjunto solução da equação $\operatorname{sen} x = \cos x$, sendo $0 \leq x < 2\pi$, é:

a) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$
b) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$
c) $\left\{\frac{5\pi}{4}\right\}$
d) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$
e) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

2 (U. F. Juiz de Fora-MG) O número de soluções da equação $\operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5}$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4

3 (UF-AL) Considere todas as soluções da equação $\cos 5x = \frac{1}{2}$, para $0° \leq x \leq 360°$. Se θ é a maior dessas soluções, então $\operatorname{sen} \theta$ é igual a:

a) $-\operatorname{sen} 60°$
b) $-\operatorname{sen} 12°$
c) $\operatorname{sen} 12°$
d) $\operatorname{sen} 48°$
e) $\operatorname{sen} 60°$

4 (UF-RS) O conjunto solução da equação $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$ é:

a) $\left\{k\pi - \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
b) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
c) $\left\{2k\pi + \frac{3\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
d) $\left\{2k\pi - \frac{3\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
e) $\left\{k\ \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

5 (Unirio-RJ) O conjunto solução da equação $\cos 2x = \frac{1}{2}$, sendo x um arco da 1ª volta positiva, é dado por:

a) {60°, 300°}
b) {30°, 330°}
c) {30°, 150°}
d) {30°, 150°, 210°, 330°}
e) {15°, 165°, 195°, 345°}

6 (Unifor-CE) Para todo número inteiro k, o conjunto solução de $(\cos x + \operatorname{sen} x)^4 = 0$ é o conjunto dos números reais x iguais a:

a) $\frac{\pi}{2} + k\pi$
b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$
c) $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$
d) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$
e) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

7 (UF-SE) No universo $[-2\pi, 2\pi]$, o conjunto solução da equação $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$ é:

a) $\left\{-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$
b) $\left\{-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$
c) $\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
d) $\left\{-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$
e) $\left\{-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

8 (FEB-BA) Sobre as soluções da equação $\sec^2 x + 2 \operatorname{tg} x = 0$, pode-se afirmar que são arcos com extremidades nos quadrantes:

a) I e II
b) I e III
c) I e IV
d) II e IV
e) II e III

9 (UF-CE) Considere a equação $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$. Pode-se afirmar que a soma de suas soluções que pertencem ao intervalo $[0, 4\pi]$ é:

a) 1 c) 0 e) 2π
b) -1 d) 4π

10 (U. F. Viçosa-MG) Se $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, então:

a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{\pi}{6}$

b) $\operatorname{sen}\theta = 1$ ou $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen}\theta = 0$ ou $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{\pi}{8}$

e) $\theta = 0$ ou $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

11 (Uneb-BA) No universo $[0; 2\pi]$, o conjunto solução da inequação $0 \leq \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$ é:

a) $\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$

b) $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right]$

d) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

12 (U. F. Uberlândia-MG) O conjunto solução da desigualdade

$$\left|\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4},$$

para $0 < x < 2\pi$, é igual a:

a) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ e $\pi < x < \frac{7\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$ e $\frac{11\pi}{6} < x < 2\pi$

c) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$

d) $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$ e $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$

e) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$

13 (Mackenzie-SP) As soluções positivas de $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen}^2 x$, com $\operatorname{sen} x \neq 0$, formam uma seqüência que é uma:

a) PG de razão 3 e primeiro termo $\frac{\pi}{4}$.

b) PA de razão π e primeiro termo $\frac{\pi}{4}$.

c) PA de razão 2π e primeiro termo $\frac{3\pi}{4}$.

d) PG de razão 3 e primeiro termo $\frac{3\pi}{4}$.

e) PA de razão $\frac{\pi}{2}$ e primeiro termo $\frac{\pi}{4}$.

14 (PUC-RJ) A equação $\operatorname{tg} x = \cos x$ tem, para x no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, uma raiz $x = \theta$ sobre a qual podemos dizer:

a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ d) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\theta = \frac{\pi}{3}$

c) $\operatorname{sen}\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

15 (Fesp/UPE-PE) O número de soluções da equação $\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1$, no intervalo $[0, 6\pi]$ é:

a) 8 c) 10 e) 6
b) 4 d) 12

16 (UF-PI) O número de soluções da equação $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 2x = 1$ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 1 c) 5 e) 9
b) 3 d) 7

17 (UF-MA) Todas as raízes da equação $\operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x)^2 - \operatorname{sen} x(4\cos^2 x - 1) = 0$ para $x \in [0, \pi]$ são:

a) $0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}$ e π

b) $0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}$ e π

d) $\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}$ e π

e) $0; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}$ e $\frac{7\pi}{4}$

18 (U. E. Londrina-PR) Se $x \in [0, 2\pi]$, o número de soluções da equação

$\cos 2x = \text{sen}\left[\frac{\pi}{2} - x\right]$ é:

a) 1 c) 3 e) 5

b) 2 d) 4

19 (U. F. Uberlândia-MG) Na equação

$1 + \text{sen}^2\left(\frac{x}{a}\right) = \text{sen } x$, em que a é um número real não nulo e $0 \leq x \leq \pi$, o maior valor positivo de a para que essa equação admita solução é igual a:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2

20 (ITA-SP) Para x no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o conjunto de todas as soluções da inequação

$$\text{sen } (2x) - \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

é o intervalo definido por:

a) $\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$

Desafios

1 (Fuvest-SP)

a) Calcule cos 3θ em função de sen θ e de cos θ.

b) Calcule sen 3θ em função de sen θ e de cos θ.

c) Para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, resolva a equação: $\text{sen}^2\,\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + 1 = \frac{\text{sen } 3\theta}{\text{sen } \theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta}$.

2 (Unicamp-SP)

a) Encontre todos os valores reais de x para os quais $-1 \leq \frac{x^2 + 4}{4x} \leq 1$.

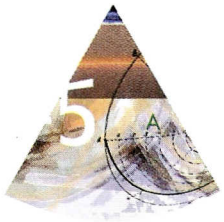
b) Encontre todos os valores reais de x e y, satisfazendo $x^2 + 4x \cos y + 4 = 0$.

3 (Unicamp-SP) Considere a equação trigonométrica $\text{sen}^2\,\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\text{sen } 2\theta = 0$.

a) Mostre que não são soluções dessa equação os valores de θ para os quais cos θ = 0.

b) Encontre todos os valores de cos θ que são soluções da equação.

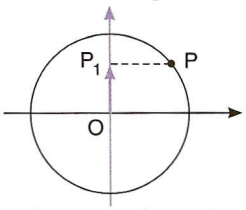
4 Determine os valores de x tais que $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.



18

RETOMANDO AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1 Função seno

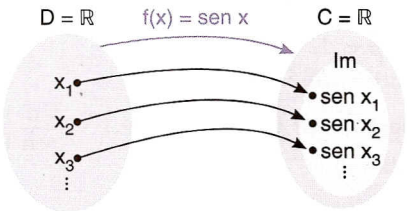


A cada número real x associamos o valor do seno do arco de x rad.

Tomemos um número real x, com imagem P no ciclo trigonométrico.

Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real $OP_1 = \text{sen } x$, isto é, $f(x) = \text{sen } x$.

O domínio e o contradomínio de $y = \text{sen } x$ são iguais a $\mathbb{R}$, mas o conjunto imagem é dado por $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$, pois o raio do ciclo é unitário: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.



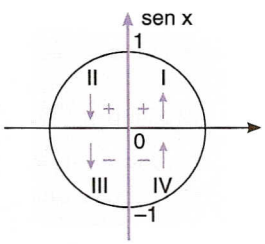
O sinal de $y = \text{sen } x$ é positivo quando x percorre o 1º e o 2º quadrantes, e é negativo quando x pertence ao 3º ou ao 4º quadrante. A função se anula para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Para estudar o crescimento da função $y = \text{sen } x$, devemos observar que, no percurso de x pelo 1º quadrante (no sentido positivo), os valores de sen x aumentam de 0 a 1: $\text{sen } 0 = 0$, $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$.

Já no 2º e no 3º quadrantes, os valores de sen x diminuem de 1 a –1, valor atingido para $x = \frac{3\pi}{2}$.

No 4º quadrante, a função retoma o crescimento, aumentando de –1 a 0, valor atingido para $x = 2\pi$.

A partir daí, repetem-se os valores de sen x. Temos:



1º e 4º quadrantes: $f(x) = \text{sen } x$ é crescente.
2º e 3º quadrantes: $f(x) = \text{sen } x$ é decrescente.

- $\text{sen } 0 = \text{sen } (0 + 2\pi) = \text{sen } (0 + 4\pi) = \ldots = 0$
- $\text{sen } \frac{\pi}{2} = \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \ldots = 1$
- $\text{sen } \pi = \text{sen } (\pi + 2\pi) = \text{sen } (\pi + 4\pi) = \ldots = 0$
- $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = \text{sen } \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = \text{sen } \left(\frac{3\pi}{2} + 4\pi\right) = \ldots = -1$

As igualdades apresentadas ilustram o fato de que a função $y = \text{sen } x$ repete o valor de y para cada acréscimo de 2π dado a x.

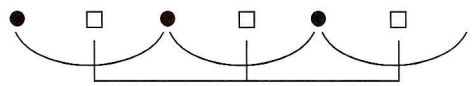
Diz-se, por isso, que a função seno é *periódica* e seu período é 2π.

Funções periódicas

Existem muitas funções y = f(x) que repetem valores de y para um determinado acréscimo no valor de x. Por exemplo, a função f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(x) = (-1)^x$ é uma delas.

Veja a tabela:

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	1	–1	1	–1	1	–1



- se x é par, f(x) = 1
- □ se x é ímpar, f(x) = –1

quando x varia de *duas* unidades, o valor de f(x) se repete:

f(x) = f(x + 2) = f(x + 4) = ...

Funções como essa são chamadas *periódicas*.

Uma definição formal para função periódica seria:

"Uma função f(x) de domínio D é periódica se existir $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(x + p) = f(x)$, $\forall x \in D$. Nessas condições, o menor valor de p para que isso ocorra é chamado período de f".

Em relação à função $f(x) = (-1)^x$, seu período vale 2. Já em relação à função f(x) = sen x, o número real $p = 2\pi$ é o menor número para o qual ocorre sempre f(x + p) = f(x):

$$\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Como se trata de uma função circular — e o período é justamente 2π, o número de radianos de uma volta completa —, isso significa que, *a cada volta*, os valores se repetem:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2k\pi), \ \forall k \in \mathbb{Z} \text{ e } x \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1

Vamos considerar a função f(x) = 1 + sen 3x.

Com relação ao período, devemos observar que o arco 3x executa uma volta completa no ciclo se x varia entre 0 e $\frac{2\pi}{3}$, isto é:

$$0 \leq 3x \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Isso significa que o período da função y = sen 3x é:

$$p = \frac{2\pi}{3} - 0 = \frac{2\pi}{3}$$

Além disso, como domínio temos D = $\mathbb{R}$; como conjunto imagem, lembrando que $-1 \leq \text{sen } 3x \leq 1$, somamos "1" aos membros dessa igualdade: $0 \leq 1 + \text{sen } 3x \leq 2$, obtendo Im = [0, 2].

Exemplo 2

Com relação à função $y = 1 + 3 \text{ sen } \left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$, temos:

- D = $\mathbb{R}$, pois existe $\left[1 + 3 \cdot \text{sen } \left(2x - \frac{\pi}{5}\right)\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Im = [–2, 4], pois:

$$-1 \leq \text{sen } \left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \text{ sen } \left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq 1 + 3 \text{ sen } \left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leq 4$$

- período: é o acréscimo a ser dado a x para que o arco $2x - \frac{\pi}{5}$ varie de 0 a 2π:

$$0 \leq 2x - \frac{\pi}{5} \leq 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{5} \leq 2x \leq \frac{11\pi}{5} \Rightarrow \frac{\pi}{10} \leq x \leq \frac{11\pi}{10}$$

Então $p = \frac{11\pi}{10} - \frac{\pi}{10} = \pi$.

De modo geral, podemos concluir que, se uma função apresenta a forma $f(x) = \text{sen}(m \cdot x + n)$, com m e n reais e $m \neq 0$, ela é periódica e seu período vale $p = \dfrac{2\pi}{|m|}$.

Observação

A função $y = \text{sen } x$ é uma função *ímpar*, pois $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

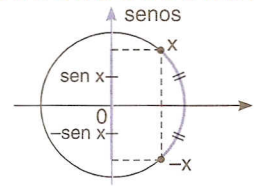
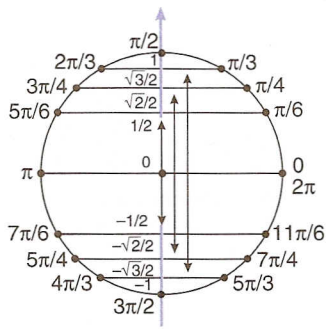


Gráfico de y = sen x

Retomando os valores já conhecidos (a), podemos montar a tabela (b) e, a partir dela, construir o gráfico (c) da função $y = \text{sen } x$.

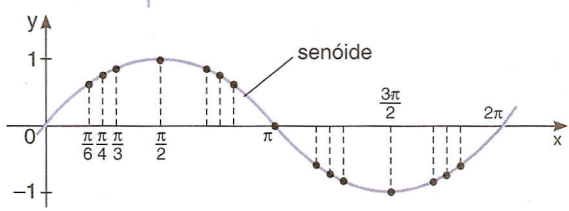
a)



b)

x	y = sen x
0	0
π/6	1/2
π/4	√2/2
π/3	√3/2
π/2	1
π	0
3π/2	–1
2π	0

c)



Para gráficos de outras funções menos simples, é aconselhável construir a tabela em etapas, para facilitar o trabalho.

Exemplo 3

Seja a função $y = 1 + \text{sen } 2x$. Vejamos:

1ª etapa:

x	2x	sen 2x	y
	0	?	
	π/2	?	
	π	?	
	3π/2	?	
	2π	?	

2ª etapa:

x	2x	sen 2x	y = 1 + sen 2x
	0	0	?
	π/2	1	?
	π	0	?
	3π/2	–1	?
	2π	0	?

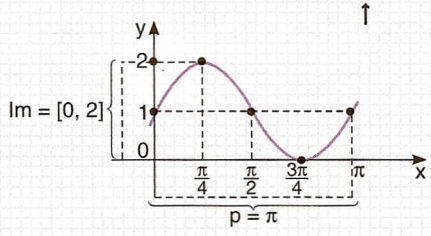
3ª etapa:

x	2x	sen 2x	y = 1 + sen 2x
?	0	0	1
?	π/2	1	2
?	π	0	1
?	3π/2	–1	0
?	2π	0	1
↓			↓

Finalmente:

x	2x	sen 2x	y = 1 + sen 2x
0	0	0	1
π/4	π/2	1	2
π/2	π	0	1
3π/4	3π/2	–1	0
π	2π	0	1
↑			↑

Para a construção do gráfico, utilizamos apenas a primeira e a última colunas, desprezando as demais.



Exercícios

1 Encontre o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções:

a) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = 2 - \text{sen } 3x$

2 Forneça o intervalo de variação de $m \in \mathbb{R}$ para que possa ocorrer $\text{sen}(x - \pi) = 3 - 2m$.

3 Estude os sinais da função $f(x) = -3 \text{ sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

4 Qual é o domínio da função $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2 - 4 \text{ sen } x}}$?

5 Ache o período de cada função:

a) $f(x) = \text{sen}\frac{x}{2}$ b) $f(x) = 3 \text{ sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ c) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

Nos exercícios 6 a 10, determine o período e o conjunto imagem, construindo o gráfico de um período completo para a função dada.

6 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 2 \text{ sen } x$

7 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = \text{sen } 2x$

8 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 2 + \text{sen } x$

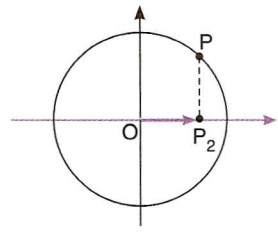
9 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = -\text{sen } x$

10 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 2 - \text{sen } x$

11 Sabendo que a função $f(x) = a \cdot \text{sen}(bx + c) + d$, com *a*, *b*, *c* e *d* reais, $b > 0$ e $ab < 0$, tem como conjunto imagem o intervalo $[-4, 2]$ e período igual a π, determine os valores de *a*, *b* e *d*.

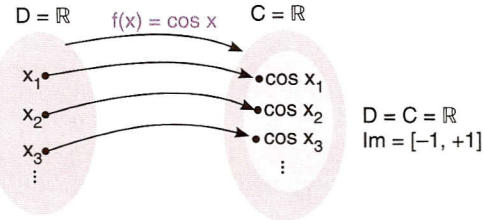
2 ○ Função cosseno

Tomemos um número real x, com imagem P no ciclo trigonométrico.



Denominamos função cosseno a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número real OP_2 = cos x, isto é, f(x) = cos x.

O domínio e o contradomínio de y = cos x são iguais a $\mathbb{R}$, mas o conjunto imagem é dado por Im = $\{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 1\}$, pois o raio do ciclo é unitário: $-1 \leq \cos x \leq 1$.



O sinal de y = cos x é positivo quando x percorre o 1º e o 4º quadrantes, e é negativo quando x pertence ao 2º ou ao 3º quadrante. A função se anula para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Para estudar o crescimento da função y = cos x, devemos observar que, no percurso de x pelos dois primeiros quadrantes (no sentido positivo), os valores de cos x diminuem de 1 a –1: cos 0 = 1 e cos π = –1.

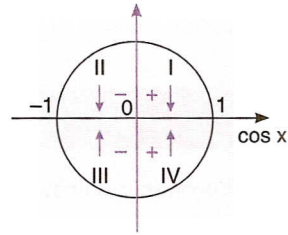
No 3º e no 4º quadrantes, os valores de cos x crescem de –1 a 1: cos π = –1 e cos 2π = 1.

A partir daí, repetem-se os valores de cos x. Temos:

- cos 0 = cos 2π = ... = 1
- $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{5\pi}{2} = \ldots = 0$
- cos π = cos 3π = ... = –1
- $\cos \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{7\pi}{2} = \ldots = 0$

⋮

- cos x = cos (x + $2k\pi$), $k \in \mathbb{Z}$



1º e 2º quadrantes:
f(x) = cos x é decrescente.
3º e 4º quadrantes:
f(x) = cos x é crescente.

Assim, reiteradas as observações feitas para a função seno e igualmente válidas para a função cosseno, podemos afirmar que y = cos x é também uma função periódica, e seu período p vale 2π.

Exemplo 4

Para a função $y = 2 + 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, temos:

- D = $\mathbb{R}$, pois existe $\left[2 + 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Im = [–1, 5], pois: $-1 \leq \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 2 + 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 5$
- $p = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow p = \pi$, pois

  $p = \frac{2\pi}{|m|}$, se f(x) = cos (m · x + n), com m e n reais e $m \neq 0$.

Observação

A função y = cos x é uma função *par*, pois cos (–x) = cos x, $\forall x \in \mathbb{R}$.

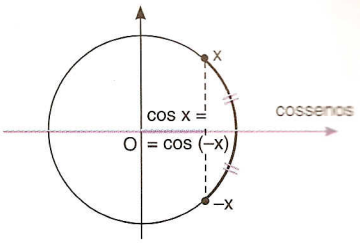
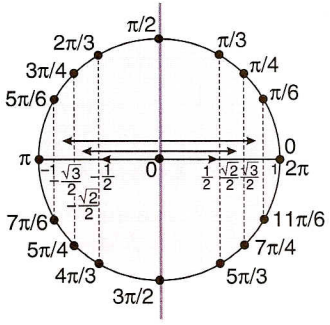


Gráfico de y = cos x

Os valores conhecidos (a) fornecem a tabela (b), a partir da qual podemos construir o gráfico (c) da função y = cos x.

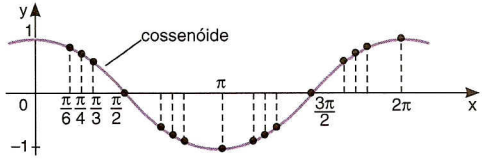
a)



b)

x	y = cos x
0	1
π/6	$\sqrt{3}/2$
π/4	$\sqrt{2}/2$
π/3	1/2
π/2	0
π	–1
3π/2	0
2π	1

c)



Exemplo 5

Dada a função $y = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, vamos construir seu gráfico.

Inicialmente construiremos a tabela em etapas, a saber:

1ª etapa:

x	2x	$2x - \frac{\pi}{4}$	$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	$y = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
		0	?	
		π/2	?	
		π	?	
		3π/2	?	
		2π	?	

2ª etapa:

x	2x	$2x - \frac{\pi}{4}$	$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	$y = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
		0	1	?
		π/2	0	?
		π	–1	?
		3π/2	0	?
		2π	1	?

3ª etapa:

x	2x	$2x - \frac{\pi}{4}$	$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	$y = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
	?	0	1	2
	?	$\pi/2$	0	1
	?	π	-1	0
	?	$3\pi/2$	0	1
	?	2π	1	2

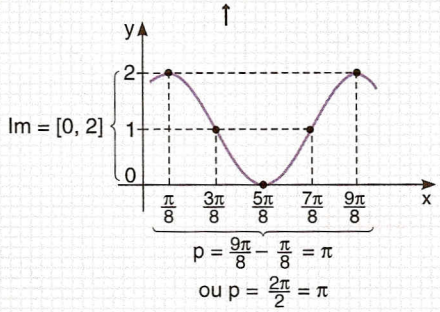
4ª etapa:

x	2x	$2x - \frac{\pi}{4}$	$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	$y = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
?	$\pi/4$	0	1	2
?	$3\pi/4$	$\pi/2$	0	1
?	$5\pi/4$	π	-1	0
?	$7\pi/4$	$3\pi/2$	0	1
?	$9\pi/4$	2π	1	2

Finalmente:

x	2x	$2x - \frac{\pi}{4}$	$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	$y = 1 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
$\pi/8$	$\pi/4$	0	1	2
$3\pi/8$	$3\pi/4$	$\pi/2$	0	1
$5\pi/8$	$5\pi/4$	π	-1	0
$7\pi/8$	$7\pi/4$	$3\pi/2$	0	1
$9\pi/8$	$9\pi/4$	2π	1	2

Utilizamos, na construção do gráfico, apenas a primeira e a última colunas, desprezando as demais.



Exercícios

12 Encontre o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

13 Para que valores de m tem-se $1 + \cos x = m - 1$?

14 Ache o período de cada função:

a) $f(x) = 2\cos\frac{x}{3}$ b) $f(x) = \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$ c) $f(x) = -\cos(-3x)$

15 Determine o período e o conjunto imagem de cada função:

a) $y = 2\cos\frac{x}{4}$ b) $f(x) = 1 - \cos 2x$ c) $y = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

16 Estude o sinal da função $f(x) = \frac{1}{2} - \cos x$.

17 Determine os sinais da função $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$.

Em cada um dos exercícios 18 a 22, determine o período e o conjunto imagem, construindo o gráfico de um período completo para a função dada.

18 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = \cos 2x$

19 $f(x) = -\cos x$

20 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = -1 + \cos 2x$

21 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = |\cos x|$

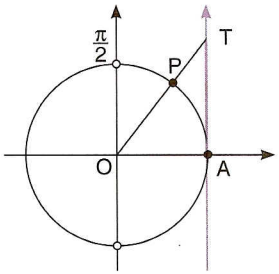
22 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = 2 - 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

23 Sabendo que a função $f(x) = a \cos (bx + c) - d$, com a, b, c e d reais, $a > 0$ e $d < 0$, apresenta o intervalo $[-2, 6]$ como conjunto imagem e $\frac{\pi}{2}$ como período, determine os valores de a, b e d.

3 Função tangente

Tomemos um número real x, com imagem P no ciclo trigonométrico.

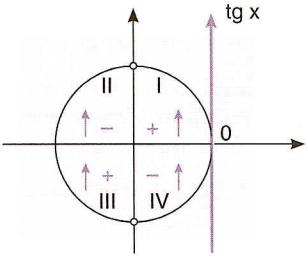
Seja $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



Denominamos função tangente a função $f : D \to \mathbb{R}$ que associa a cada número real $x \in D$ o número real $AT = \text{tg } x$; isto é, $f(x) = \text{tg } x$.

Temos, então:

- $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\text{Im} = \mathbb{R}$



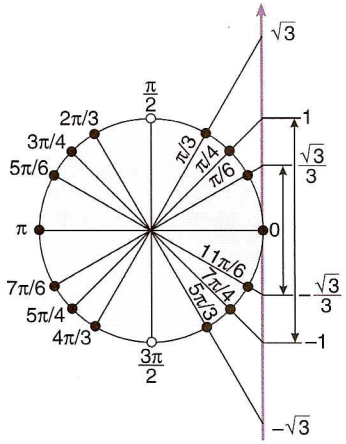
Quanto aos sinais e ao crescimento da função tangente, como já visto no capítulo 14, podemos escrever:

- $f(x) = \text{tg } x$ assume valores positivos nos quadrantes ímpares;
- $f(x) = \text{tg } x$ assume valores negativos nos quadrantes pares;
- $f(x) = \text{tg } x$ se anula para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$;
- $f(x) = \text{tg } x$ é crescente em qualquer quadrante.

Gráfico de $y = \text{tg } x$

Levando em conta os valores de x para os quais não se define tg x e os valores conhecidos (a), construímos a tabela (b) e, a partir dela, o gráfico (c) da função $y = \text{tg } x$.

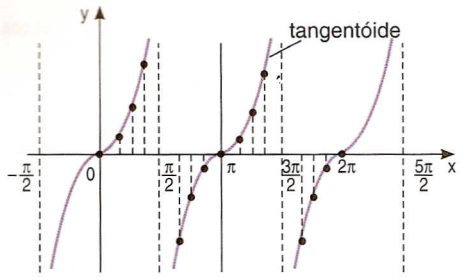
a)



b)

x	y = tg x
0	0
π/6	√3/3
π/4	1
π/3	√3
π/2	∄
2π/3	−√3
3π/4	−1
5π/6	−√3/3
π	0
3π/2	∄
2π	1

c)



Observando o gráfico, podemos notar que a função $f(x) = \text{tg } x$ é periódica, e seu período é $p = \pi$. Além disso, percebemos que, para os valores $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ..., ocorrem "interrupções" no gráfico, pois não existe $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos:

$$D = \mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ e } I_m = \mathbb{R}$$

Observação

A função $f(x) = \text{tg } x$ é ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$ para todo x do domínio. Além disso, é crescente em todos os quadrantes.

Exemplo 6

Para a função $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, vamos determinar seu domínio e gráfico.

Para achar o domínio, devemos notar que, para que exista $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, necessariamente devemos ter:

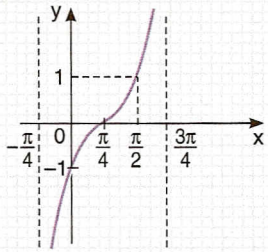
$$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Assim, temos: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Além disso, $Im = \mathbb{R}$.

Podemos afirmar que a função é periódica, e seu período é $p = \pi$.

Note que o gráfico dessa função tem o mesmo aspecto do gráfico de $y = \text{tg } x$, apresentando somente um "deslocamento" de $\frac{\pi}{4}$ à direita.



Exercícios

24 Encontre o domínio da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = 2 + \text{tg } 3x$.

25 Ache os valores de m para os quais temos $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2m - 1}{m + 2}$. Quais são os possíveis valores de x?

26 Qual é o domínio da função real $f(x) = -3 \text{ tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$?

27 Seja a função $f : D \to \mathbb{R} \mid f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, com $D = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Encontre o conjunto imagem de f.

28 Seja $f : A \to \mathbb{R} \mid f(x) = 4 + 2 \text{ tg } \frac{x}{2}$, com $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Determine o conjunto imagem de f.

29 Encontre o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

30 Esboce o gráfico e dê o domínio e o período da função real $f(x) = tg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

31 Esboce o gráfico dando o domínio e o período da função real $f(x) = -tg\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

4 ○ As outras funções trigonométricas

Quanto às funções cotangente, secante e cossecante, as considerações apresentadas nos capítulos anteriores são suficientes para a resolução da série de exercícios propostos a seguir, bem como dos testes de vestibulares.

Exercícios

32 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ b) $f(x) = \sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ c) $f(x) = \text{cossec}\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$

33 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ b) $f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ c) $f(x) = \text{cossec}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

34 Qual é o domínio da função $f(x) = tg\ x + \text{cotg}\ x$? E o da função $f(x) = \sec x + \text{cossec}\ x$?

35 Determine o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = \text{cossec}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

36 Determine o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = \text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

37 Ache o domínio da função $y = \text{sen}\ x + \cos x + tg\ x + \text{cotg}\ x$.

38 Ache o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = \sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

39 Para que valores de x a função $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ assume o valor mínimo?

40 Qual é o máximo valor assumido pela função $f(x) = \text{sen}\ x \cos x$? Para que valores de x a função assume esse valor máximo?

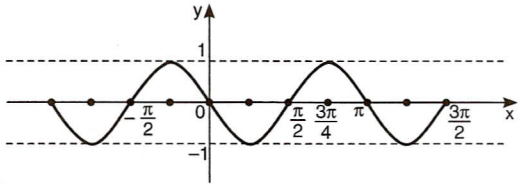
41 (UF-SC) Julgue os itens abaixo:

a) O domínio da função $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

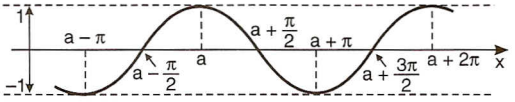
b) O período da função $g(x) = 2\ \text{sen}\ 3x$ é $\frac{2\pi}{3}$.

c) O número de raízes da equação $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, em $[0, 2\pi]$, é 4.

d) O gráfico abaixo representa a função $f(x) = \text{sen}\ 2x$.



42 (UF-MT) A figura mostra o gráfico de uma função trigonométrica f(x) num sistema cartesiano ortogonal, em que não está fixada a posição do eixo Oy e as abscissas são dadas em função de uma constante real *a*.



A partir dessas informações, julgue os itens:

a) O gráfico da função passa pela origem do sistema quando $a = -\frac{\pi}{2}$.

b) O período da função é 2π, qualquer que seja a constante real *a*.

c) A soma do quadrado de f(x) para $a = -\frac{\pi}{2}$ com o quadrado de f(x) para $a = \frac{\pi}{2}$ é igual a 1, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

43 (UF-PB) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = kx^2 \operatorname{sen} x$, sendo *k* uma constante. Se $f(3) = -2$, calcule $2f(3) + 5f(-3)$.

44 Repita o exercício anterior, substituindo sen x por cos x.

45 (Fuvest-SP) Considere a função $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 5x)$.

a) Resolva a equação $f(x) = 0$ no intervalo $[0, \pi]$.

b) O gráfico de *f* pode interceptar a reta de equação $y = \frac{8}{5}$?

Explique sua resposta.

46 (UnB-DF) Supondo que, em determinada região, a temperatura média semanal *T* (em °C) e a quantidade de energia solar média semanal *Q* que atinge a região (em kcal/cm²) possam ser expressas em função do tempo *t*, em semanas, por meio das funções

$$T(t) = 10 + 12 \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{t-15}{52}\right)\right] \text{ e}$$

$$Q(t) = 400 + 200 \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{t-11}{52}\right)\right],$$

julgue os itens a seguir:

a) A maior temperatura média semanal é de 22 °C.

b) Na 50ª semana, a quantidade de energia solar média semanal é mínima.

c) Quando a quantidade de energia solar média semanal é máxima, a temperatura média semanal também é máxima.

47 Ache o domínio e o período da função $f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

Testes de vestibulares

1 (Ucsal-BA) O período da função *f* definida por $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) π e) 2π

2 (Unifesp-SP) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Considere as afirmações seguintes:

1. A função f(x) é uma função par, isto é, $f(x) = f(-x)$, para todo *x* real.
2. A função f(x) é periódica, de período 2π, isto é, $f(x + 2\pi) = f(x)$, para todo *x* real.
3. A função f(x) é sobrejetora.
4. $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

São verdadeiras as afirmações:

a) 1 e 3, apenas.
b) 3 e 4, apenas.
c) 2 e 4, apenas.
d) 1, 2 e 3, apenas.
e) 1, 2, 3 e 4.

3 (PUC-PR) Se $f(x) = \text{sen } x$, $x \in \mathbb{R}$, então:

a) $0 < f(6) < \frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2} < f(6) < 0$

c) $-1 < f(6) < -\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2} < f(6) < -\frac{1}{2}$

e) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < f(6) < -\frac{1}{2}$

4 (Unip-SP) Para a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}^2 x - 7 \text{ sen } x + 6$, é correto afirmar que:

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

b) $f(3\pi) = 0$

c) $0 \leq f(x) \leq 14$, $\forall x \in \mathbb{R}$

d) $-1 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

e) $-4 \leq f(x) \leq 10$, $\forall x \in \mathbb{R}$

5 (PUC-MG) Sobre a função $f(x) = \cos(\pi x)$, definida para todo x real, foram feitas três afirmativas:

I. f tem período 2.

II. $f(n) = (-1)^n$ para todo n natural.

III. f é crescente para $-1 \leq x \leq 1$.

É *correto* afirmar:

a) São verdadeiras somente as afirmativas I e II.

b) É verdadeira somente a afirmativa I.

c) As três afirmativas são verdadeiras.

d) São verdadeiras somente as afirmativas I e III.

e) É verdadeira somente a afirmativa II.

6 (Unifor-CE) O período da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos 2x \cdot \cos x - \text{sen } 2x \cdot \text{sen } x$ é:

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) π

d) $\frac{3\pi}{2}$

e) 2π

7 (U. F. Viçosa-MG) Se f é a função real dada por $f(x) = 2 - \cos 4x$, então é *correto* afirmar que:

a) $f(x) \leq 3$ e $f(x) \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) o gráfico de f intercepta o eixo dos x.

c) $f(x) \leq 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) $f(2) < 0$.

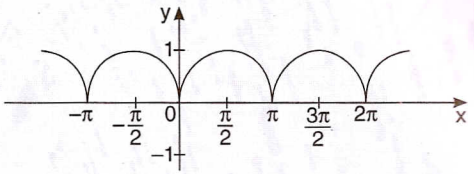
e) $f(x) \geq \frac{3}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8 (U. F. Santa Maria-RS) A função $f(x) = A \cos bx$, na qual A e b são constantes, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ e $x \in \mathbb{R}$, é tal que $f(0) = 20$ e $f(1) = 10$. O valor de $f(3)$ é:

a) -25 c) -10 e) 20

b) -20 d) 0

9 (Ulbra-RS) A função que melhor representa o gráfico abaixo é:

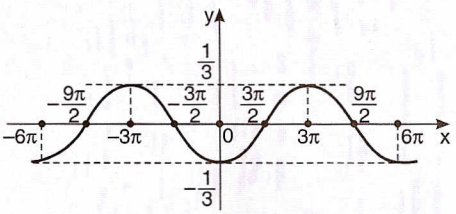


a) $y = \text{sen } x$ d) $y = |\text{sen } x|$

b) $y = \cos x$ e) $y = |\cos x|$

c) $y = \text{tg } x$

10 (UF-SE) Na figura abaixo tem-se representada parte do gráfico de uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



Se $f(x) = k \cdot \cos tx$, então:

a) $t = 3k$ c) $k = 3t$ e) $k + t = 0$

b) $k = t$ d) $k - t = 1$

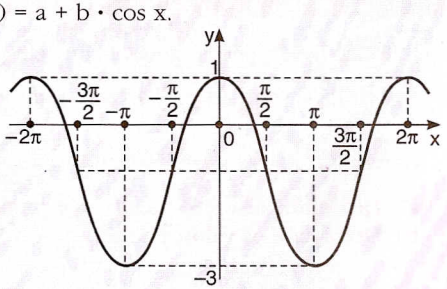
11 (PUC-RS) Se f e g são funções definidas por $f(x) = \frac{2 \text{ tg } x}{1 + \text{tg}^2 x}$ e $g(x) = \text{sen } 2x$, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$ é

a) $\mathbb{R}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\}$

b) $\mathbb{R}_+$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}(x) \neq 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \text{tg}(x) \neq 0\}$

12 (UF-SE) Na figura abaixo tem-se um esboço do gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + b \cdot \cos x$.

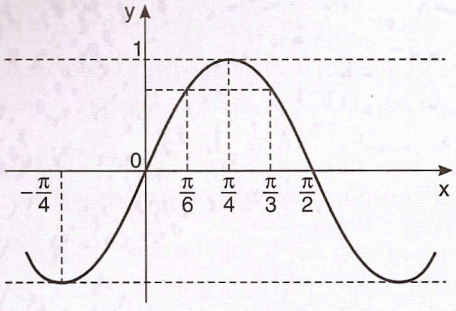


Os números reais a e b são tais que:

a) $b = 2a$ c) $a \cdot b = 2$ e) $2a + b = 0$

b) $a = 2b$ d) $a - b = -1$

13 (Puccamp-SP) Observe o gráfico abaixo.



A função real de variável real que *melhor* corresponde a esse gráfico é:

a) $y = \cos x$
b) $y = \text{sen } x$
c) $y = \cos 2x$
d) $y = \text{sen } 2x$
e) $y = 2 \text{ sen } x$

14 (FEI-SP) Na estação de trabalho de pintura de peças de uma fábrica, a pressão em um tambor de ar comprimido varia com o tempo conforme a expressão $P(t) = 50 + 50 \text{ sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$, $t > 0$.

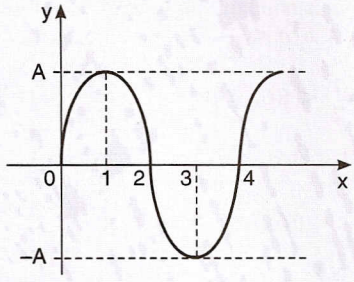
Assinale a alternativa em que o instante t corresponde ao valor mínimo da pressão.

a) $t = \frac{\pi}{2}$
b) $t = \pi$
c) $t = \frac{3\pi}{2}$
d) $t = 2\pi$
e) $t = 3\pi$

15 (UF-RS) Analisando os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{-x}$ e $g(x) = \text{sen } 2x$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, podemos afirmar que a equação $2^{-x} = \text{sen } 2x$, para $x \in [0, 12\pi]$, possui:

a) 2 raízes
b) 4 raízes
c) 6 raízes
d) 12 raízes
e) 24 raízes

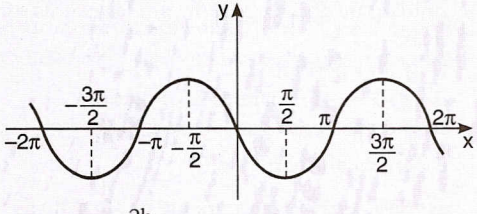
16 (U. F. Santa Maria-RS)



O gráfico representa a função:

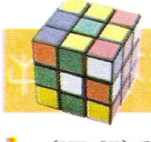
a) $y = 2A (\text{sen } x + \cos x)$
b) $y = \frac{A}{2}\left(\text{sen } \frac{\pi}{2}x + \cos \frac{\pi}{2}x\right)$
c) $y = -A \cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$
d) $y = A \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$
e) $y = A \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)$

17 (Vunesp-SP) Sabe-se que h é o menor número positivo para o qual o gráfico de $y = \text{sen } (x - h)$ é:



Então, $\cos \frac{2h}{3}$ é igual a:

a) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{-1}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



Desafios

1 (UF-CE) Determine o menor valor real positivo de x para o qual a função real de variável real, definida por $f(x) = 7 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, atinge seu valor máximo.

2 (Fuvest-SP) Considere a função $f(x) = \text{sen } x + \text{sen } 5x$.

a) Determine as constantes k, m e n tais que $f(x) = k \cdot \text{sen } (mx) \cos (nx)$.
b) Determine os valores de x, $0 \leq x \leq \pi$, tais que $f(x) = 0$.

3 (PUC-RS, adaptado) Se $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e se $y = \log \text{sen } \alpha + \log \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, determine o intervalo de variação de y.

Respostas dos exercícios e testes

11 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

EXERCÍCIOS

1 90 km **2** 6 cm

3 não; $\frac{6}{8} \neq \frac{5}{6}$ e $\frac{5}{8} \neq \frac{6}{6}$

4 $x = \frac{14}{3}$ e $y = \frac{15}{2}$

5 3 m, 4 m e 6 m; $\frac{1}{10}$ e 10

6 a) Porque possuem os ângulos congruentes: $\hat{B} \equiv \hat{D}$ (retos); $A\hat{C}B \equiv E\hat{C}D$ (o.p.v.) e $\hat{A} \equiv \hat{E}$ (alternos internos).

b) $x = 12$; $k = \frac{5}{3}$

c) 50; 18

7 $x = 3$ e $y = 12$

8 a) V b) V c) F d) V e) F

9 a) 2 ou $\frac{1}{2}$ b) 4 ou $\frac{1}{4}$

10 a) $\frac{4}{25}$ b) $\frac{21}{4}$ **11** $\frac{230}{13}$

12 a) 6 b) 1 c) $\frac{1}{4}$

13 $\sqrt{21}$ cm e $2\sqrt{7}$ cm

14 a) $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $y = \frac{5}{2}$ b) $x = \frac{5}{2}$ e $y = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

15 $4\sqrt{2}$ cm **16** a) $\frac{4}{3}$ ou $\frac{3}{4}$

b) 0,96 m², 0,54 m² e 1,5 m²

17 a) $3\sqrt{3}$ b) 12 c) $\frac{25}{4}$

18 a) $3\sqrt{3}$ b) 10 c) $8\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$

19 $17\sqrt{2}$ cm **20** 3,84 m, aproximadamente

21 $r = a(\sqrt{2} - 1)$ **22** 3,6 cm

23 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ cm **24** 2,1 m **25** 50%

TESTES DE VESTIBULARES

1 c	**5** a	**9** c	**13** b
2 c	**6** d	**10** c	**14** e
3 b	**7** c	**11** c	**15** c
4 b	**8** b	**12** d	

12 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

EXERCÍCIOS

1 $\frac{5\sqrt{89}}{89}$ e $\frac{8\sqrt{89}}{89}$

2 a) $\frac{\sqrt{11}}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $0{,}7071 \cong \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 sen $\hat{B} = 0{,}769$ e $\hat{B} \cong 50°$
sen $\hat{C} = 0{,}639$ e $\hat{C} \cong 40°$

4 a) aproximadamente 5,07
b) aproximadamente 71°

5 aproximadamente 5,45 cm; aproximadamente 0,91

6 a) 2
b) 3,28, aproximadamente
c) 17,11, aproximadamente

7 $\cos \hat{B} = \text{sen } \hat{C} = \frac{7\sqrt{149}}{149}$

$\cos \hat{C} = \frac{10\sqrt{149}}{149}$

$\hat{B} \cong 55°$
$\hat{C} \cong 35°$

8 São semelhantes.

9 $\frac{\sqrt{13}}{4}$; 64°, aproximadamente

10 0,95 e 6,3, aproximadamente

11 a) 2,34, aproximadamente
b) 4,76, aproximadamente
c) 2,61, aproximadamente

12 a) 67°, aproximadamente
b) 29°, aproximadamente
c) 50°, aproximadamente

13 $\frac{4}{3}$ **14** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

16 1,75 cm, aproximadamente

17 a) $6\sqrt{2}$ c) 4 e) $\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$ d) 60°

18 a) 1
b) $\text{tg}^2\ 80°$

19 50 cm; $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$

20 35°, aproximadamente

21 a) 4 km e 1,7 km **22** 84 m
b) R$ 13,60

23 a) $(10 + 5\sqrt{3})$ m e $(5 + 10\sqrt{3})$ m
b) 29,1 m, aproximadamente

24 28 m

25 a) $5 + 3\sqrt{3}$ b) $\frac{15 + 9\sqrt{3}}{2}$

27 $(3\sqrt{3} + 7)$ m

TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**6**	b	**11**	b	**16**	e
2	e	**7**	b	**12**	a	**17**	b
3	c	**8**	a	**13**	b	**18**	a) F c) F
4	a	**9**	c	**14**	b		b) V d) V
5	e	**10**	a	**15**	d		

13 RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

EXERCÍCIOS

1 $4\sqrt{2}$

2 5,3 e 3,9, aproximadamente

3 $x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cong 2{,}12$ cm ou $x \cong 4{,}85$ cm

4 0,8845 p e 1,085 p

5 1,93, aproximadamente

6 $\hat{B} = 120°$ e $\hat{C} = 45°$; $AB = \frac{7\sqrt{6}}{2}$ cm

7 a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8 a) $\sqrt{37}$ b) 7 c) $2\sqrt{61 - 30\sqrt{2}}$

9 a) 8 c) $8\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cong 15{,}45$
b) $4\sqrt{2(2 + \sqrt{2})} \cong 10{,}45$

10 a) 2,27, aproximadamente c) $4\sqrt{3}$
b) 13,52, aproximadamente

12 3 cm **13** $BO = \sqrt{90} - \sqrt{30}$; $AO = 2(\sqrt{15} - \sqrt{5})$

14 $2\sqrt{6}$ cm **15** $\ell(1 + \sqrt{3})$ **16** $2\sqrt{2}$

TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**4**	a	**7**	e
2	d	**5**	d	**8**	b
3	b	**6**	a	**9**	a

14 FUNÇÕES CIRCULARES

EXERCÍCIOS

1 25,12 cm **2** 50 m

3 a) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{3\pi}{4}$ rad e) $\frac{3\pi}{2}$ rad
b) $\frac{\pi}{5}$ rad d) $\frac{4\pi}{3}$ rad

4 a) 30° c) 150° e) 108°
b) 120° d) 660°

5 4 rad; 2 km **6** 9 cm **7** 10° ou 350°

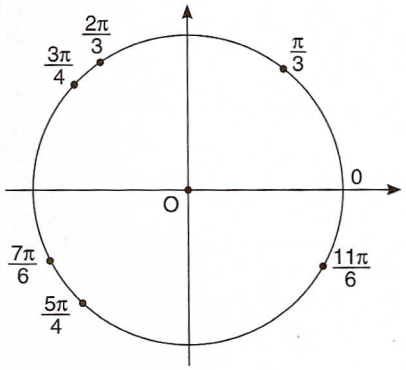
8 Ambos possuem o mesmo comprimento.

9 30° **10** 30°

11 1 rad e $(2\pi - 1)$ rad **12** 31,4 cm

13 600°

14

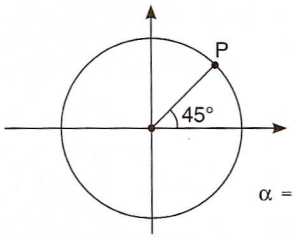


15 I Q: $\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{2\pi}{5}$; II Q: $\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{5}, \frac{6\pi}{7}$;
III Q: $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}$; IV Q: $\frac{5\pi}{3}, \frac{15\pi}{4}, 5$

16 a) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{4}$
b) 195° ou $\frac{13\pi}{12}$ rad e 165° ou $\frac{11\pi}{12}$ rad
c) $\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{11\pi}{12}$ unidades de comprimento

17 a) São extremidades de um diâmetro.
b) Coincidem.
c) Determinam um segmento horizontal nos 3º e 4º quadrantes.

18



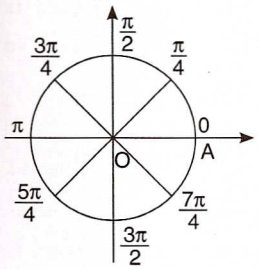
$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

19 $\beta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

20 $\alpha = 40° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z}$ ou
$\alpha = \frac{2\pi}{9} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

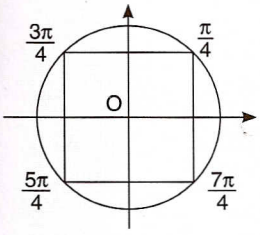
21 a) $\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
c) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

22



$k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

23



$\alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

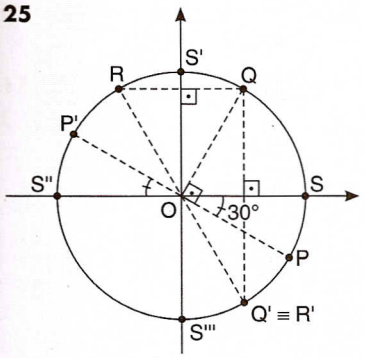
24 a) $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

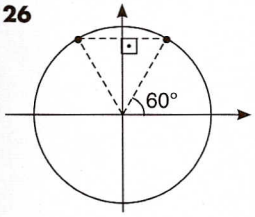
c) $\alpha = \frac{\pi}{9} + 2k\pi$ ou $\alpha = \frac{8\pi}{9} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $\alpha = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

25



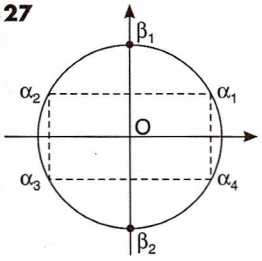
26



$\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ou $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

27



$\gamma = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

28 A – 6; B – 1; C – 4; D – 5; E – 3; F – 2

29 a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) 0 e) $2 - \sqrt{3}$

b) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\sqrt{6}$

30 a) negativo c) negativo

b) positivo ou nulo

31 a) 0 b) ±1 c) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

32 No 2º lançamento (x = 40 m); os outros dois ângulos de lançamento fornecem alcances iguais.

33 $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

34 a) $\frac{1}{2}$ d) 1 g) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ h) 0

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) 0 i) 0

35 a) negativo c) positivo ou nulo

b) negativo

36 $0 \leq m \leq \frac{2}{3}$, $m \in \mathbb{R}$

37 a) $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

38 a) 1 b) –1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

39 $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ **40** $-\frac{3}{5}$

41 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\frac{2}{3}$ **42** $-\frac{\sqrt{11}}{6}$

43 a) $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ b) $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

45 a) positivo, pois $0 < \frac{4\pi}{9} < \frac{\pi}{2}$

b) a

c) sen $\frac{\pi}{18} = +\sqrt{1 - a^2}$ e cos $\frac{\pi}{18} = a$

46 a) $\frac{1 - a^2}{2}$ b) $\frac{3a - a^3}{2}$

47 positivo

48 $\text{tg}\frac{2\pi}{3} < \text{tg}\frac{3\pi}{4} < \text{tg}\,\pi < \text{tg}\frac{\pi}{6} < \text{tg}\frac{\pi}{4} < \text{tg}\frac{\pi}{3}$

49 $\sqrt{35}$ **50** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

51 $\pm\frac{\sqrt{7}}{21}$ **52** ±1

53 2 **54** $-\frac{2}{3}$

55 $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ **56** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

57 a) 0 c) não existe
b) 0 d) não existe

58 positivo; positivo

59 a) 1 c) não existe
b) –1 d) –1

60 negativo **61** não; sim **62** não; sim

63 a) 1 c) não existe
b) –1 d) não existe

64 negativo

TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**6**	b	**11**	a	**16**	d
2	c	**7**	b	**12**	b	**17**	a
3	b	**8**	c	**13**	d	**18**	c
4	c	**9**	b	**14**	a	**19**	c
5	b	**10**	c	**15**	c	**20**	c

15 RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES

EXERCÍCIOS

1 $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{3}$; $\operatorname{sen} x = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$; $\cos x = \frac{-\sqrt{10}}{10}$;
$\sec x = -\sqrt{10}$; $\operatorname{cossec} x = \frac{-\sqrt{10}}{3}$

2 $\cos x = \frac{\sqrt{91}}{10}$; $\operatorname{cossec} x = -\frac{10}{3}$; $\operatorname{cotg} x = \frac{-\sqrt{91}}{3}$

3 sec x **4** $\frac{-3 - 8\sqrt{15}}{23}$

5 falsa; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta}}$ **6** 7

7 a) $\sqrt{2}$ c) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
b) –1 d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) –2

8 $\pm(1 - p^2)^{-\frac{1}{2}}$ **9** $\frac{1}{2}$; $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ **10** ab = 1

11 a) $\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$;
$\cos\theta = \pm\frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$;
$\operatorname{cotg}\theta = \frac{b}{a}$

b) $a = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}\theta = 0\\ \cos\theta = \pm 1\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = 0$ e $\nexists \operatorname{cotg}\theta$

12 $-\frac{\sqrt{21}}{2}$ **13** $\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$ **14** 41

15 a) $\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$ b) 1

17 –1 **19** não; não; sim

37 $\operatorname{cotg} x = \pm\frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$

TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**6**	c	**11**	c	**16**	c
2	d	**7**	c	**12**	c	**17**	b
3	e	**8**	d	**13**	d		
4	d	**9**	d	**14**	a		
5	e	**10**	d	**15**	d		

16 TRANSFORMAÇÕES

EXERCÍCIOS

1 $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ e $2 - \sqrt{3}$

2 $-(2 + \sqrt{3})$; $2 + \sqrt{3}$

3 $\frac{1}{4}$ **4** $\frac{1}{2}$

6 $-\sqrt{3}\operatorname{sen} x$ **8** $45° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$

9 a) 0,45 b) 4,60 c) 0,67

10 não existe **11** $-\frac{4}{19}$

12 0 **13** $\frac{1}{2}$

15 $\frac{12\sqrt{5}}{49}$; $-\frac{12\sqrt{5}}{41}$ **16** $\frac{84}{13}$

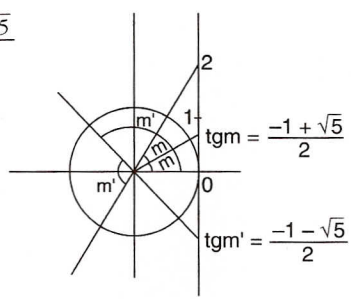
17 $-\frac{97}{225}$ **18** $-\frac{7}{25}$; $\pm\frac{24}{25}$

20 cos 2x **21** $\frac{8}{9}$

22 $\operatorname{sen} 2x = \frac{24}{25}$; $\cos 2x = \pm\frac{7}{25}$

24 $\frac{3}{4}$

25 $\operatorname{tg} m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$



28 a) $2 \operatorname{sen} x \cos 2x$ c) $2 \cos x \cos 2x$
b) $2 \operatorname{sen} x \cos \frac{x}{2}$

29 a) $2 \operatorname{sen} 20^\circ \cos 10^\circ$ c) $\operatorname{sen} 80^\circ$
b) $\sqrt{3} \operatorname{sen} 10^\circ$

30 $2 \operatorname{sen} 40^\circ \cos 15^\circ$ **31** 0

33 $-2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$

34 a) $\sec 40^\circ \sec 50^\circ$ **35** $(\operatorname{sen} x - \cos x)^2$
b) $2 \operatorname{tg} 10^\circ$

36 a) $2 \operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ b) $2 \cos^2 \frac{x}{2}$

37 $-\operatorname{tg}(x - 45^\circ)$; $-\operatorname{tg} 25^\circ$

38 a) $\frac{\sqrt{3} - 2}{4}$ b) $\frac{-2 - \sqrt{2}}{4}$

39 $2 \operatorname{cossec} 2x$

TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**7**	b	**13**	b	**19**	d
2	d	**8**	d	**14**	e	**20**	a
3	d	**9**	a	**15**	a	**21**	e
4	c	**10**	a	**16**	a		
5	e	**11**	a	**17**	d		
6	c	**12**	a	**18**	d		

17 EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

EXERCÍCIOS

1 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4 a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

5 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

6 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\}$

7 $S = \left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

8 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

9 a) $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

10 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

11 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{2\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

12 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

13 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

14 $S = \varnothing$

15 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

16 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

17 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

18 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

19 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

20 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

21 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

22 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

23 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

24 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

25 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

26 $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$

27 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\}$

28 A figura é um triângulo eqüilátero com $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ unidades de área.

29 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = (2k + 1)\frac{\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

30 a) $4(1 + \sqrt{3})$

b) $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

31 $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

32 $S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi \text{ e } y = 2k_2\pi,\ k_1 \text{ e } k_2 \in \mathbb{Z}\right\}$

33 $x = -\frac{\pi}{6}$ e $y = \frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$ e $y = \frac{5\pi}{6}$

34 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

35 a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$

36 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < 2(k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

37 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$

38 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } (2k + 1)\pi \leq x \leq (k + 1)2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

39 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi\right\}$

40 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2(k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

41 a) t = 0 h ou t = 12 h ou t = 24 h

b) 20 °C; 3 horas e 15 horas

42 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2(k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

43 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x \leq 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}\right\}$

44 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2(k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \mathbb{R}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

45 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

46 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

47 $\left\{\theta \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}\right\}$

48 a) t ∈ {4h30min, 16h30min, 28h30min, ...}

b) 4h30min

49 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + k\pi < x < (k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

50 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

51 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

52 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x < (k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

53 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

54 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} + k\pi < x < (k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

55 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4}\right\}$

56 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3}\right\}$

57 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

58 $S = \varnothing$

TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**6**	d	**11**	c	**16**	d
2	c	**7**	b	**12**	e	**17**	a
3	b	**8**	d	**13**	b	**18**	d
4	a	**9**	d	**14**	c	**19**	b
5	d	**10**	c	**15**	d	**20**	a

18 RETOMANDO AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

EXERCÍCIOS

1 a) $D = \mathbb{R}$; $Im = [-1; 1]$
b) $D = \mathbb{R}$; $Im = [1; 3]$

2 $1 \leq m \leq 2$

3 $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

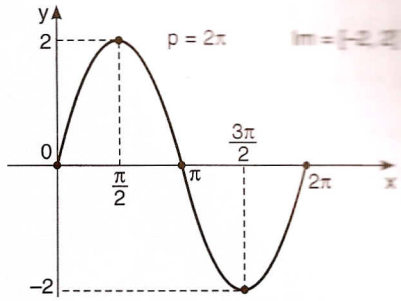
$f(x) < 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou

$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < (k + 1) \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

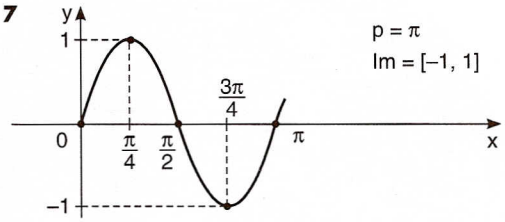
4 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < (k + 1) \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

5 a) 4π b) $\frac{2\pi}{3}$ c) π

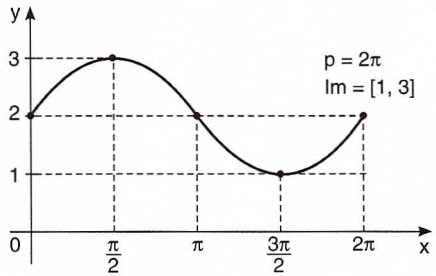
6



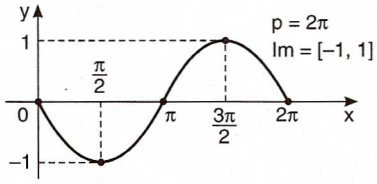
7



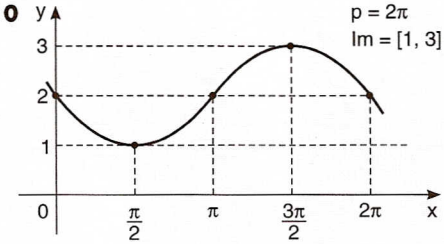
8



9



10



11 $a = -3$, $b = 2$, $d = -1$

12 $D = \mathbb{R}$; $Im = [-2, 2]$

13 $m \in \mathbb{R} \mid 1 \leq m \leq 3$

14 a) 6π b) π c) $\frac{2\pi}{3}$

15 a) $p = 8\pi$; $Im = [-2, 2]$
b) $p = \pi$; $Im = [0, 2]$
c) $p = 2\pi$; $Im = [0, 2]$

16 $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

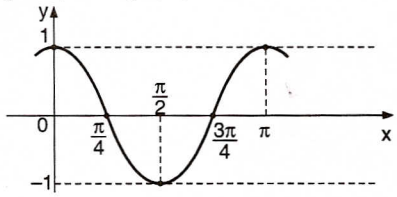
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou

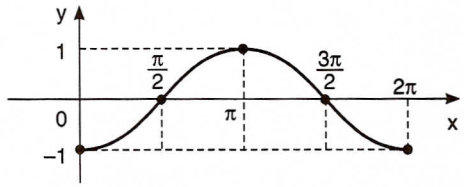
$\frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x \leq (2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

17 Função positiva nos quadrantes ímpares e negativa nos quadrantes pares.

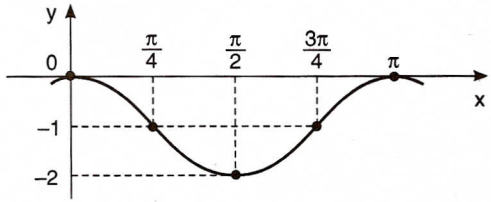
18 $p = \pi$; $Im = [-1, 1]$



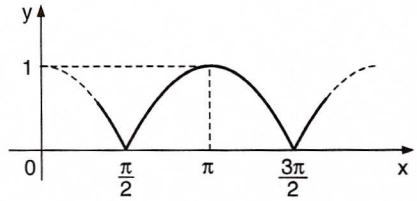
19 $p = 2\pi$; $Im = [-1, 1]$



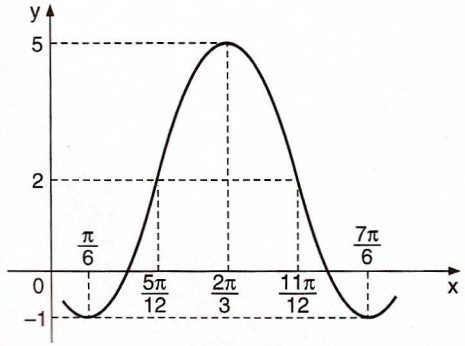
20 $p = \pi$; $Im = [-2, 0]$



21 $p = \pi$; $Im = [0, 1]$



22 $p = \pi$; $Im = [-1, 5]$



23 $a = 4$, $b = \pm 4$, $d = -2$

24 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

25 $m \in \mathbb{R} - \{-2\}$; $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

26 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

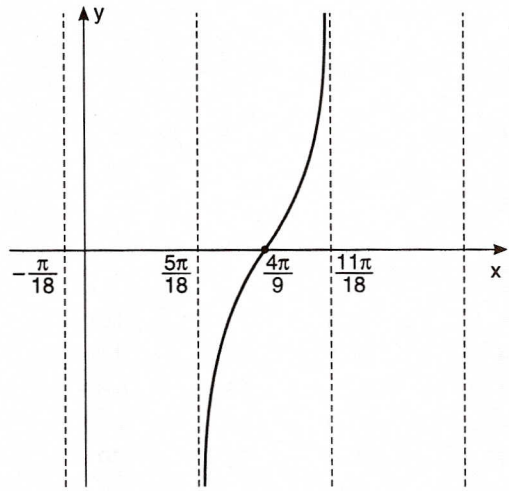
27 $Im = [0, 1]$

28 $Im = [4, 6]$

29 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$; $Im = \mathbb{R}$

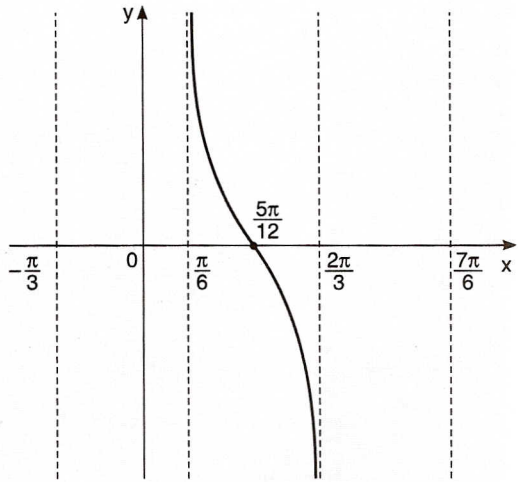
30 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$p = \frac{\pi}{3}$



31 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$p = \frac{\pi}{2}$



32 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

33 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

34 Para ambas as funções, o domínio é:

$D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

35 $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

36 $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

37 $D = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

38 $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

39 $x \in \mathbb{R} | x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

40 $\frac{1}{2}$; $x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

41 a) V b) V c) F d) F

42 a) V b) V c) F; o correto é $2 \operatorname{sen}^2 x$.

43 6 **44** −14

45 a) $S = \left\{0, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \pi\right\}$

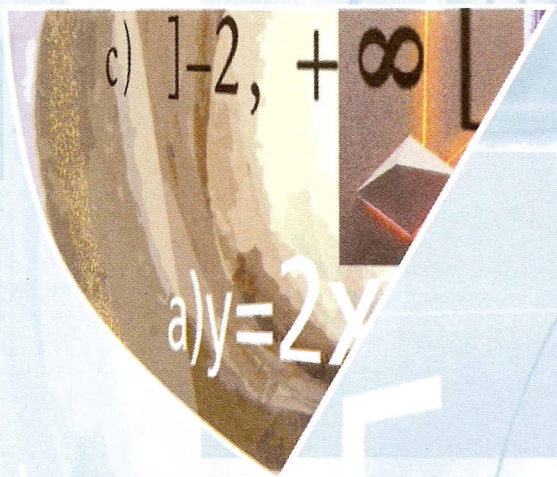
b) Não, pois o valor máximo da função é $\frac{3}{2}$.

46 a) V b) V c) F

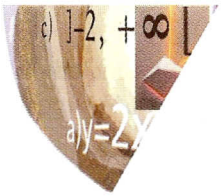
TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**5**	a	**9**	d	**13**	d	**17**	c
2	c	**6**	b	**10**	b	**14**	d		
3	b	**7**	a	**11**	d	**15**	e		
4	c	**8**	b	**12**	e	**16**	e		

• ÁLGEBRA II •



Parte 4



19

MATRIZES

1 ○ Introdução

Quando abrimos jornais e revistas, encontramos com freqüência informações numéricas organizadas na forma de tabelas com linhas e colunas. Essas tabelas serão chamadas, em matemática, de *matrizes*. Observe os exemplos a seguir.

Maurício Simonetti/Pulsar

	Trigo	Soja	Milho	Algodão
Produtividade há dez anos (quilos por hectare)	1500	1600	1800	1000
Produtividade atual (quilos por hectare)	1900	2700	3100	2900
Aumento de produtividade	27%	69%	72%	190%

Fonte: *Veja*, 31/10/2001.

DISPARIDADE DE PREÇOS

O argentino ganha mais que o brasileiro. Mas o custo de vida em Buenos Aires é altíssimo	**Com 100 dólares é possível comprar...**	
	... em São Paulo	**... em Buenos Aires**
arroz	170 quilos	84 quilos
queijo mussarela	31 quilos	13 quilos
filé *mignon*	17 quilos	12,5 quilos
Coca-Cola de 2 litros	127 garrafas	67 garrafas

Fonte: *Veja*, 21/11/2001.

Dizemos, então, que uma matriz m × n é uma tabela de m · n números dispostos em *m* linhas (filas horizontais) e *n* colunas (filas verticais). Vejamos:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$ é uma matriz 3 × 2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$ é uma matriz 2 × 2

2 ○ Representação de uma matriz

Consideremos uma matriz *A* do tipo m × n. Um elemento qualquer dessa matriz será representado pelo símbolo a_{ij}, no qual o índice *i* refere-se à linha em que se encontra tal elemento e o índice *j* refere-se à coluna em que se encontra o elemento.

Representaremos também a matriz *A* por $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Note que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 1

Vamos escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, sendo $a_{ij} = i + j$. Uma matriz do tipo 2 × 3 pode ser genericamente representada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

Utilizando a regra de formação de seus elementos, encontramos:

$a_{11} = 1 + 1 = 2$; $a_{12} = 1 + 2 = 3$; $a_{13} = 1 + 3 = 4$

$a_{21} = 2 + 1 = 3$; $a_{22} = 2 + 2 = 4$; $a_{23} = 2 + 3 = 5$

Assim, a matriz pedida é $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

3 ○ Matrizes especiais

Vejamos a seguir alguns tipos de matrizes especiais.

- *Matriz linha:* é uma matriz formada por uma única linha.
  Exemplo: A = (1 2 −3) é uma matriz linha 1 × 3.

- *Matriz coluna:* é uma matriz formada por uma única coluna.

  Exemplo: $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna 4 × 1.

- *Matriz nula:* é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.

  Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula 2 × 3, e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz nula 2 × 2.

- *Matriz quadrada:* é uma matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.

  Exemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2 × 2. Dizemos que *A* é quadrada de ordem 2.

  A *diagonal principal* de *A* é formada pelos elementos cujo índice da linha é igual ao índice da coluna (a_{11} e a_{22}).

A outra diagonal é chamada *diagonal secundária* de A.
Temos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonal secundária — diagonal principal

$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -7 \\ 11 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3. Dizemos que B é quadrada de ordem 3.

A *diagonal principal* de B é formada por 4, $\frac{1}{3}$ e 6.

A *diagonal secundária* de B é formada por -7, $\frac{1}{3}$ e 0.

▶ *Matriz transposta:*
Dada $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *transposta de* A a matriz $A^t = (a'_{ij})_{n \times m}$, em que $a'_{ij} = a_{ji}$, para todo i e todo j. Isso significa que as linhas de A^t são ordenadamente iguais às colunas de A (e vice-versa).
Assim:

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, \text{ então } A^t = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$\text{se } B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \text{ então } B^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

Exercícios

1 Escreva o tipo de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 19 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2 Em cada caso, construa a matriz:

a) $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, em que $a_{ij} = 2i + 5j$.
b) $B = (b_{ij})_{4 \times 3}$, tal que $b_{ij} = ij$.
c) $C = (c_{ij})_{1 \times 3}$, tal que $c_{ij} = j^i$.

3 Construa a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 4i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, identificando os elementos que pertencem às diagonais principal e secundária de A.

4 A matriz D seguinte representa as distâncias (em km) entre as cidades X, Y e Z:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 27 \\ 15 & 0 & 46 \\ 27 & 46 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz fornece a distância entre as cidades i e j. Se a cidade X é representada pelo número 1, Y por 2 e Z por 3:

a) Determine as distâncias entre X e Y, Z e X e Y e Z
b) Qual é a transposta da matriz D?

5 Determine a transposta de cada uma das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ b) $B = (1 \quad 0 \quad -4 \quad 2)$ c) $C = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

6 (Unifor-CE) Diz-se que uma matriz quadrada é simétrica se ela for igual à sua matriz transposta.

Determine x e y a fim de que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & x^2 - 4 \\ x + 1 & 1 & 2y \\ 0 & 2 + y & 2 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

7 (Covest-PE) Eric necessita de complementos das vitaminas A e C. Diariamente precisa de pelo menos 63 unidades de A e no mínimo 55 unidades de C. Ele pode escolher entre os compostos I e II, que apresentam, por cápsula, as características abaixo:

Composto	Vitamina A	Vitamina C	Valor R$
I	7 unidades	4 unidades	0,70
II	4 unidades	5 unidades	0,50

Qual o gasto mínimo diário de Eric, em reais, com os compostos I e II?

8 (UF-RJ) Antônio, Bernardo e Cláudio saíram para tomar chope, de bar em bar, tanto no sábado quanto no domingo.

As matrizes a seguir resumem quantos chopes cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

S refere-se às despesas de sábado e D às de domingo.

Cada elemento a_{ij} nos dá o número de chopes que i pagou para j, sendo Antônio o número 1, Bernardo o número 2 e Cláudio o número 3 (a_{ij} representa o elemento da linha i, coluna j de cada matriz).

Assim, no sábado Antônio pagou 4 chopes que ele próprio bebeu, 1 chope de Bernardo e 4 de Cláudio (primeira linha da matriz S).

a) Quem bebeu mais chope no fim de semana?

b) Quantos chopes Cláudio ficou devendo para Antônio?

4 Igualdade de matrizes

Elementos correspondentes

Dadas duas matrizes de mesmo "formato" (ou "tipo"), dizemos que elementos que ocupam a *mesma posição* são *correspondentes*.

No exemplo, sendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, dizemos que a_{11} e b_{11} são correspondentes, o mesmo ocorrendo com a_{12} e b_{12}; a_{21} e b_{21}; a_{22} e b_{22}.

Igualdade

Duas matrizes de mesmo tipo m × n são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais.

Exemplo 2

Vamos determinar os valores de a, b, c, d para que se tenha:

$$\begin{pmatrix} a & b+1 & 0 \\ -4 & c-4 & d+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Igualando os elementos de mesma posição, segue que:

$$a = 4$$
$$b + 1 = -1 \Rightarrow b = -2$$
$$c - 4 = 6 \Rightarrow c = 10$$
$$d + 3 = 8 \Rightarrow d = 5$$

Exercícios

9 Determine a, b, c e d que verifiquem: $\begin{pmatrix} 2 & 3a \\ b & d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-1 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

10 Determine os valores de p e q que satisfazem a igualdade: $\begin{bmatrix} p-q \\ -1 \\ 2p+3q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

11 Determine os reais a e k de modo que se tenha: $\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 1-a & a^3 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12 Sendo $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, com $a_{ij} = \begin{cases} i - j, \text{ se } i > j \\ i + j, \text{ se } i \leqslant j \end{cases}$, e $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & p^2 \\ p & s \end{bmatrix}$, determine p, q, r e s de modo que tenhamos $A = B$.

13 Determine x e y reais de modo que $\begin{pmatrix} 2^x - 1 & y^4 \\ y^x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5 Adição e subtração

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a matriz soma $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i e todo j.

Em outras palavras, a matriz soma C é do mesmo tipo que A e B e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de A e B, como podemos observar nas somas:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz oposta

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Chama-se *oposta* de A a matriz representada por $-A$, tal que $A + (-A) = O$, em que O é a matriz nula do tipo $m \times n$.

Da definição, decorre que $-A$ é sempre obtida de A trocando-se o sinal de cada um de seus elementos.

Dessa maneira, temos:

- se $A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, então $-A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;
- se $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, então $-B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, definimos a matriz diferença $A - B$ como a soma de A com a oposta de B; isto é: $A - B = A + (-B)$.

Vejamos estes exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição

Sendo A, B e C matrizes de mesmo tipo e O a matriz nula, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

I. $A + B = B + A$ (comutativa)
II. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativa)
III. $A + (-A) = O$ (oposto)
IV. $A + O = A$ (elemento neutro)

Exemplo 3

Vamos resolver a equação $X - A = B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Vamos ver dois modos de resolução.

1º modo:

A matriz procurada é $X = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$. Temos:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p-3 & q-1 \\ r-4 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Igualando os elementos correspondentes vem:

- $p - 3 = 7 \Rightarrow p = 10$
- $r - 4 = -1 \Rightarrow r = 3$
- $q - 1 = 10 \Rightarrow q = 11$
- $s + 2 = 5 \Rightarrow s = 3$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

2º modo:

Vamos "isolar" a matriz X na equação:

▶ **1º** Somamos, aos dois membros, a matriz A:

$$(X - A) + A = B + A$$

▶ **2º** Usamos as propriedades II e III:

$$X + \underbrace{(-A + A)}_{0} = B + A$$

▶ **3º** Usamos a propriedade IV:

$$X = B + A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

A seqüência acima nos mostra que essa equação matricial é resolvida do mesmo modo que a equação $x - a = b$, sendo x, a e b números reais.

Assim, para *adição e subtração* de matrizes é possível simplesmente fazer: $X - A = B \Rightarrow X = B + A$.

Exercícios

14 Efetue:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

15 Sejam $A = (a_{ij})_{6 \times 3}$, com $a_{ij} = 3i - 2j$, e $B = (b_{ij})_{6 \times 3}$, com $b_{ij} = 1 + i + j$.

a) Represente genericamente um elemento s_{ij} da matriz $S = A + B$ e um elemento d_{ij} da matriz $D = A - B$.

b) Qual é o valor de $s_{21} + d_{43}$?

c) Existe s_{44}?

16 Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} - X$

c) $X - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 11 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

17 Resolva o sistema matricial: $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \end{cases}$

18 (UC-GO) Uma matriz quadrada A é dita simétrica se $A = A^T$ e é dita anti-simétrica se $A^T = -A$, em que A^T é a matriz transposta de A. Analise a afirmação seguinte:

Se A é uma matriz quadrada, então $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz anti-simétrica.

Sugestão: Considere $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

6 ○ Multiplicação de um número real por uma matriz

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e k um número real diferente de zero. A multiplicação de k pela matriz A é definida como a matriz B (do tipo $m \times n$), $B = k \cdot A$, em que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

O significado é: B é obtida de A, multiplicando-se todos os seus elementos por k.

Assim, por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, então:

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 24 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 3 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exemplo 4

Vamos determinar X na equação $3 \cdot X - A = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}$.

1º modo:

A matriz procurada é $X = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Temos:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3p \\ 3q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3p - 5 \\ 3q + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Daí:

$$\begin{cases} 3p - 5 = 1 \rightarrow p = 2 \\ 3q + 3 = -12 \rightarrow q = -5 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2º modo:

Vamos operar como se A, B e X fossem números reais:

$$3X = A + B \Rightarrow X = \frac{1}{3} \cdot (A + B),$$

isto é:

$$X = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Exercícios

19 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 25 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix}$; obtenha as matrizes:

a) $2 \cdot A$ b) $\frac{1}{5} \cdot B$ c) $3 \cdot A + 2 \cdot B^t$

20 Sabendo que $3 \cdot X^t = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 21 \end{pmatrix}$, determine a matriz $2 \cdot X$.

21 Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $2 \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

c) $X - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - X$

22 (UE-CE) Sejam as matrizes $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se $(2 - n) \cdot I + n \cdot P_1 = P_2$ ($n \in \mathbb{N}$), quanto vale $n^2 - 2n + 7$?

23 Resolva o sistema $\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -9 & 19 \end{pmatrix} \\ X - 4Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -18 \end{pmatrix} \end{cases}$

24 Em cada equação seguinte, suponha que as operações indicadas entre as matrizes sejam possíveis de serem feitas e "isole" a matriz X:

a) $2 \cdot X + B = 3C$

b) $X^t + 2A = B$

c) $\frac{1}{4} \cdot (X - A)^t = B + C$

7 Multiplicação de matrizes

Introdução

Suponhamos que um jornal esportivo, o *Brasil*, circule em todo o país. Seu preço varia de acordo com o Estado em que é vendido, pois leva-se em consideração a distância ao Estado de São Paulo, onde ele é produzido.

As bancas de jornal "Leia já", que distribuem o jornal *Brasil*, fazem parte de uma rede com sede em São Paulo e filiais em Belo Horizonte, Salvador e Recife.

O proprietário da rede decidiu, durante uma semana, fazer um levantamento sobre a arrecadação gerada pelas vendas do jornal *Brasil*, a fim de estimar qual fração dessa receita as vendas do domingo representavam.

Na semana em que foi realizado o levantamento, foram vendidas as seguintes quantidades:

Cidade	Número de exemplares vendidos	
	de segunda-feira a sábado	domingo
São Paulo	248	46
Belo Horizonte	93	32
Salvador	62	29
Recife	57	25

Na tabela seguinte, é possível encontrar o preço de venda do *Brasil* em cada cidade citada:

Cidade	Preço (em reais)
São Paulo	1,50
Belo Horizonte	2,00
Salvador	2,60
Recife	3,00

Qual foi a receita obtida pelas vendas de *Brasil* de segunda-feira a sábado nessas cidades? E no domingo?

- De acordo com as tabelas anteriores, a arrecadação de *segunda-feira a sábado* pode ser assim calculada:

$$\underbrace{248 \cdot 1{,}50}_{\text{São Paulo}} + \underbrace{93 \cdot 2{,}00}_{\text{Belo Horizonte}} + \underbrace{62 \cdot 2{,}60}_{\text{Salvador}} + \underbrace{57 \cdot 3{,}00}_{\text{Recife}} = 890{,}20 \quad \text{(I)}$$

- A arrecadação de *domingo* é calculada como segue:

$$\underbrace{46 \cdot 1{,}50}_{\text{São Paulo}} + \underbrace{32 \cdot 2{,}00}_{\text{Belo Horizonte}} + \underbrace{29 \cdot 2{,}60}_{\text{Salvador}} + \underbrace{25 \cdot 3{,}00}_{\text{Recife}} = 283{,}40 \quad \text{(II)}$$

Construiremos duas matrizes: a matriz "vendas" e a matriz "preços". O cálculo anterior sugere um processo para se multiplicarem matrizes. A matriz resultante corresponde à arrecadação da semana.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 248 & 93 & 62 & 57 \\ 46 & 32 & 29 & 25 \end{pmatrix}_{2 \times 4}}_{\text{"vendas"}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}50 \\ 2{,}00 \\ 2{,}60 \\ 3{,}00 \end{pmatrix}_{4 \times 1}}_{\text{"preços"}} = \begin{pmatrix} 890{,}20 \\ 283{,}40 \end{pmatrix}_{2 \times 1} \begin{matrix} \leftarrow \text{ arrecadação de segunda-feira a sábado} \\ \leftarrow \text{ arrecadação de domingo} \end{matrix}$$

Note que (I), por exemplo, corresponde a tomar a 1ª linha da matriz "vendas", a 1ª (e única) coluna na matriz "preços" e somar os respectivos produtos.

Esse exemplo facilita a compreensão da definição formal de produto de matrizes.

Definição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se *produto de A por B*, e se indica por $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$, em que um elemento qualquer c_{ik} é obtido da seguinte maneira:

- **1º** Tomamos ordenadamente os n elementos da linha i da matriz A: $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. (I)
- **2º** Tomamos ordenadamente os n elementos da coluna k da matriz B: $b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}$. (II)
- **3º** Multiplicamos o 1º elemento de (I) pelo 1º elemento de (II), o 2º elemento de (I) pelo 2º elemento de (II), e assim sucessivamente.
- **4º** Somamos os produtos obtidos.

Assim:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Observações

1ª) A definição garante a existência do produto AB se, e somente se, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

2ª) A matriz produto $C = AB$ é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de linhas de A e o número de colunas é igual ao número de colunas de B. Observemos o esquema abaixo:

$$A_{(m \times \underbrace{\mathbf{n}}_{\text{garante a existência do produto}})} \cdot B_{(\mathbf{n} \times p)} = C_{(m \times p)}$$

3ª) Notemos que, se A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$, com p diferente de m, então AB existe, mas BA não existe, pois:

$$B_{(n \times \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{diferentes!}})} \cdot A_{(\mathbf{m} \times n)}$$

Exemplo 5

Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, vamos determinar a matriz $A \cdot B$.

Vejamos se é possível fazer tal produto:

$$\underset{(2 \times 3)}{A} \cdot \underset{(3 \times 2)}{B} = \underset{(2 \times 2)}{C}$$

Façamos $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Temos:

- c_{11}: (linha 1 de A e coluna 1 de B); $c_{11} = 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 8 = -7$

5	1	−1

1
−4
8

- c_{12}: (linha 1 de A e coluna 2 de B); $c_{12} = 5 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 27$

5	1	−1

5
3
1

- c_{21}: (linha 2 de A e coluna 1 de B); $c_{21} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 7 \cdot 8 = 51$

3	2	7

1
−4
8

- c_{22}: (linha 2 de A e coluna 2 de B); $c_{22} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 28$

3	2	7

5
3
1

Assim, $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -7 & 27 \\ 51 & 28 \end{pmatrix}$

Exemplo 6

Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 9 & -4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, vamos determinar a matriz C, produto de A por B.

Temos:

$$\underset{\text{iguais}}{A_{(4 \times 2)} \cdot B_{(2 \times 3)}} = C_{(4 \times 3)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}$$

Seguindo o mesmo esquema do exemplo anterior, temos:

$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 2$
$c_{21} = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 10$
$c_{31} = 9 \cdot 2 + (-4) \cdot 0 = 18$
$c_{41} = 0 \cdot 2 + 7 \cdot 0 = 0$

$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$
$c_{22} = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 14$
$c_{32} = 9 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 = -3$
$c_{42} = 0 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 21$

$c_{13} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) = -5$
$c_{23} = 5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = -11$
$c_{33} = 9 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2) = -1$
$c_{43} = 0 \cdot (-1) + 7 \cdot (-2) = -14$

Logo, $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 10 & 14 & -11 \\ 18 & -3 & -1 \\ 0 & 21 & -14 \end{pmatrix}$

É possível fazer o produto de B por A? Vejamos:

$$B_{(2 \times 3)} \cdot A_{(4 \times 2)} \rightarrow \nexists\ B \cdot A$$

diferentes

Exemplo 7

Vejamos se para o produto de matrizes é verdadeira ou não a frase "A ordem dos fatores não altera o produto".

Considerando $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, determinemos $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Como A e B são matrizes quadradas de ordem 2, estão definidos $C = A \cdot B$ e $D = B \cdot A$. Temos:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 10 & 2 + 15 \\ -28 - 6 & -8 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 17 \\ -34 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 8 & 35 + 6 \\ -2 - 12 & -10 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 41 \\ -14 & -1 \end{pmatrix}$$

diferentes!

Nesse caso, a ordem dos fatores *alterou* o produto.

Observação

Notemos, nesse exemplo, que AB e BA existem, mas $AB \neq BA$. Isso mostra que, em geral, o produto de matrizes *não* é comutativo.

Quando $AB = BA$, dizemos que ***A*** *e* ***B*** *comutam*.

Exercícios

25 Determine, se existirem, os produtos:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 7 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \\ 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 11 \end{bmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 3 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

26 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$, determine, se existirem:

a) $A \cdot C$
b) $B \cdot A$
c) $B \cdot C$
d) $A \cdot B$
e) $C^t \cdot B$

27 Determine x e y nas equações seguintes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -y \\ x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$

28 (UF-SC) Sejam $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$ duas matrizes definidas por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = 2i - j$, respectivamente. Se $A \cdot B = C$, então qual é o elemento c_{32} da matriz C?

29 Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule $(A + B) \cdot C$ e $A \cdot C + B \cdot C$. Os resultados são iguais?
b) Calcule $(A - B) \cdot C$ e $A \cdot C - B \cdot C$. Os resultados são iguais?
c) Calcule $(A \cdot B) \cdot C$ e $A \cdot (B \cdot C)$. Os resultados são iguais?
d) Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Os resultados são iguais?

30 (UF-MT) Um projeto de pesquisa sobre dietas envolve adultos e crianças de ambos os sexos. A composição dos participantes no projeto é dada pela matriz

$$\begin{matrix} & \text{adultos} & \text{crianças} \\ \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{masculino} \\ \text{feminino} \end{matrix}$$

O número diário de gramas de proteínas, de gorduras e de carboidratos consumidos por criança e por adulto é dado pela matriz

$$\begin{matrix} \text{proteínas} & \text{gorduras} & \text{carboidratos} \\ \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{adultos} \\ \text{crianças} \end{matrix}$$

A partir dessas informações, julgue os itens:

a) 6000 g de proteínas são consumidos diariamente por adultos e crianças do sexo masculino.
b) A quantidade de gorduras consumida diariamente por adultos e crianças do sexo masculino é 50% menor que a consumida por adultos e crianças do sexo feminino.
c) As pessoas envolvidas no projeto consomem diariamente um total de 13200 g de carboidratos.

31 Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Definimos $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$ e assim sucessivamente. Sendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, obtenha:

a) A^2
b) A^3
c) A^4
d) A^{17}
e) A^{36}

32 Resolva as seguintes equações matriciais:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$

Sugestão: Determine, inicialmente, o formato da matriz X.

33 O gerente de uma danceteria fez um levantamento sobre a freqüência da casa em um final de semana e enviou a seguinte tabela para o proprietário:

$$\begin{matrix} & \text{rapazes} & \text{moças} \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \text{sábado} \\ \text{domingo} \end{matrix} \begin{pmatrix} 80 & 60 \\ ? & 75 \end{pmatrix}$$

O gerente esqueceu de informar um campo da tabela, mas sabia que, curiosamente, a arrecadação nos dois dias foi a mesma. Sabendo que o ingresso para rapazes é R$ 15,00 e para moças é R$ 12,00:

a) represente, através de produto de matrizes, a matriz que fornece a arrecadação da casa em cada dia.
b) qual é o valor do campo que ficou sem ser preenchido?

34 Determine x e y a fim de que as matrizes $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ comutem.

35 Qual é a condição sobre os elementos da matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ para que ela comute com $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$?

Dê dois exemplos.

36 Para todo x, $0 \leq x < 2\pi$, considere $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & 1 \\ 0 & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$

a) Determine x para que $A(x) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Verifique se existe x de modo que $A(x) \cdot A(x) = A(x)$

37 (U. F. Ouro Preto-MG) Resolva a equação matricial: $\begin{bmatrix} 0 & 7^x \\ 5^{-2x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5^{-y} \\ 7^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log 10 \\ \log 10^{125} \end{bmatrix}$

8 ○ Matriz identidade

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A é dita *matriz identidade de ordem* n (indica-se por I_n) quando os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a 1, e os demais elementos são iguais a zero.

Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.

$\vdots$

- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem n.

Propriedade

Qualquer que seja a matriz quadrada A de ordem n, tem-se:

$$A \cdot I_n = A \quad \text{e} \quad I_n \cdot A = A$$

Veja dois exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Devido a essa propriedade, a matriz identidade funciona como elemento neutro na multiplicação de matrizes.

9 ○ Matriz inversa

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A é dita inversível (ou invertível) se existir uma matriz B tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Nesse caso, B é dita *inversa* de A e é indicada por A^{-1}.

Exemplo 8

Vamos encontrar, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Devemos determinar $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando os elementos correspondentes, seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } c = -1$$

$$\begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -2 \text{ e } d = 3$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Note que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}$$

Exemplo 9

Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem e invertíveis.
Como podemos "isolar" a matriz X em $A \cdot X = B$?

- Multiplicamos os dois membros, à esquerda, por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

- Usamos a associativa, a definição de matriz inversa e o elemento neutro:

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Exercícios

38 Determine, se existir, a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

39 Considere $X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Determine:

a) $4 \cdot X^{-1}$ b) $X^t + (X^{-1})^t$ c) $(X^{-1})^2$

40 (UC-GO) Determine x a fim de que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ seja igual à sua inversa.

41 Qual é a inversa de cada uma das matrizes seguintes?

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

42 Usando a inversão de matrizes, resolva a equação $A \cdot X = B$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

43 Supondo invertíveis e de mesma ordem todas as matrizes envolvidas, isolar a matriz X em:

a) $X \cdot B = A$ b) $B \cdot X + C = A$ c) $A^{-1} \cdot X = B^{-1}$

44 Supondo $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ e $\cos\theta \neq 0$, encontre a inversa da matriz $T = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$

45 Uma matriz quadrada A se diz *ortogonal* se A é inversível e $A^{-1} = A^t$.

a) Determine x e y a fim de que $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & -1 \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

b) Mostre que não existem x e y reais de modo que a matriz $\begin{pmatrix} \pi & x \\ y & \pi \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

Testes de vestibulares

1 (Umesp-SP) Uma empresa fabrica três produtos: P_1, P_2 e P_3 conforme mostra a Tabela A abaixo, e os custos e lucros de cada produto estão representados pela Tabela B:

Tabela A

Produtos / Mês	P_1	P_2	P_3
Janeiro	2	1	3
Fevereiro	0	0	1
Março	4	5	2

Tabela B

Reais / Produtos	Custo	Lucro
P_1	1	0
P_2	2	1
P_3	3	2

Com base nessas tabelas, o lucro obtido em março é de:

a) 9 c) 17 e) 26
b) 10 d) 21

2 (Unopar-PR) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, o valor de $x + y$ tal que $AC = B$ é:

a) 8 c) 0 e) −8
b) 4 d) −4

3 (Unificado-RJ) Resolvendo-se a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, encontramos para x e y valores respectivamente iguais a:

a) −2 e 1 c) 1 e −2 e) 2 e −1
b) −1 e 2 d) 1 e 2

4 (FEI-SP) Se B é a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, então:

a) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e) $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
c) $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

5 (Unirio-RJ) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = [2 \quad 1 \quad 3].$$

A adição da transposta de A com o produto de B por C é:

a) impossível de se efetuar, pois não existe o produto de B por C.
b) impossível de se efetuar, pois as matrizes são todas de tipos diferentes.
c) impossível de se efetuar, pois não existe a soma da transposta de A com o produto de B por C.
d) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 2×3.
e) possível de se efetuar e o seu resultado é do tipo 3×2.

6 (Ucsal-BA) A igualdade matricial

$$2 \cdot \begin{bmatrix} x & x^2 - 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 6x & 30 \\ -2 & -2x \end{bmatrix},$$

em que $x \in \mathbb{R}$, é verdadeira se, e somente se, x^3 é igual a:

a) −64 c) 0 e) −64, 0 ou 64
b) 64 d) −64 ou 64

7 (PUC-MG) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$ e $A^2 = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$, o valor do produto ab é:

a) −4 b) −6 c) −8 d) −12 e) −17

8 (UF-RN) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, qual é o resultado de AB – BA?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & -18 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 32 & 20 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 20 & 48 \\ 8 & 20 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 20 & -18 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$

9 (UA-AM) Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 7 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, a matriz $-2A + \frac{1}{2}B - \frac{3}{2}C$ é igual a:

a) $\begin{pmatrix} -11 & 13 & -3 \\ 0 & 17 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -17 & 18 & 19 \\ 0 & 17 & -12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -11 & 13 & 19 \\ -12 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -17 & 18 & -3 \\ -12 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 7 & -11 & 6 \\ 18 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

10 (UF-PB) A inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ é a matriz $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & x & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Então, o valor de x é:

a) –1 b) 0 c) 1 d) 3 e) 2

11 (Unirio-RJ) O valor de a tal que $\begin{bmatrix} \frac{-11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$ seja a matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ a & 11 \end{bmatrix}$ é:

a) –1 b) 3 c) $\frac{1}{5}$ d) 2 e) 5

12 (UCDB-MT) Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4x & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ são tais que $AB = \begin{bmatrix} x & 4x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, então x é igual a:

a) 0 c) 1 e) 4

b) $\frac{1}{4}$ d) 2

13 (U. F. Juiz de Fora-MG) Considerando a equação matricial $\begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$, em que a, b e c são números reais, podemos afirmar que:

a) $c + b = 4$

b) a é um número positivo.

c) não existem números reais a, b e c que satisfaçam à equação matricial dada.

d) c não é um número inteiro.

14 (UF-SE) A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser descrita como a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que a_{ij} é igual a:

a) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq j \\ i^2 - j \text{ se } i > j \end{cases}$

b) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq j \\ 2(i + j) \text{ se } i > j \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq 2 \\ 4(i - j) \text{ se } i = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \leq 2 \\ i^2 - 1 \text{ se } i = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 1 + j \text{ se } i \leq 2 \\ i^2 - j \text{ se } i = 3 \end{cases}$

15 (Puccamp-SP) Em um laboratório, as substâncias A, B e C são a matéria-prima utilizada na fabricação de dois medicamentos. O Mariax é fabricado com 5 g de A, 8 g de B e 10 g de C e o Luciax é fabricado com 9 g de A, 6 g de B e 4 g de C. Os preços dessas substâncias estão em constante alteração e, por isso, um funcionário criou um programa de computador para enfrentar essa dificuldade. Fornecendo-se ao programa os preços X, Y e Z de um grama das substâncias A, B e C, respectivamente, o programa apresenta uma matriz C, cujos elementos correspondem aos preços de custo da matéria-prima do Mariax e do Luciax. Essa matriz pode ser obtida de:

a) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ X & Y & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 6 & 4 \\ X & Y & Z \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ X & Y & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ X & Y & Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $[X \quad Y \quad Z] \cdot \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

16 (Funrei-MG) Sendo A uma matriz quadrada, definimos $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ vezes}}$.

No caso de A ser a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, é *correto* afirmar que a soma $A + A^2 + A^3 + A^4 + \ldots + A^{39} + A^{40}$ é igual à matriz:

a) $\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 40 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 40 \\ 40 & 0 \end{bmatrix}$

Desafios

1 (UE-RJ) João comeu uma salada de frutas com a, m e p porções de 100 g de abacaxi, manga e pêra, respectivamente, conforme a matriz X. A matriz A representa as quantidades de calorias, vitamina C e cálcio, em mg, e a matriz B indica os preços, em reais, dessas frutas em 3 diferentes supermercados. A matriz C mostra que João ingeriu 295,6 cal, 143,9 mg de vitamina C e 93 mg de cálcio.

Matriz X (porções de 100 g)	
Abacaxi	a
Manga	m
Pêra	p

Matriz A (por 100 g)			
Calorias	52	64,3	63,3
Vitamina C	27,2	43	3,5
Cálcio	18	21	15

Matriz B (por 100 g)			
Coma bem	0,15	0,30	0,40
Compre mais	0,16	0,25	0,45
Boa compra	0,20	0,27	0,35

Matriz C	
Calorias	295,6
Vitamina C (mg)	143,9
Cálcio (mg)	93

Considerando que as matrizes inversas de A e B são A^{-1} e B^{-1}, indique que operações entre matrizes devem ser feitas para se obter o custo dessa salada de frutas em cada supermercado.

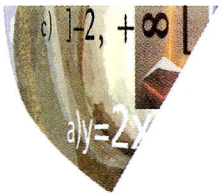
2 (FGV-SP) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Obtenha as matrizes:

a) $A^2 + A^3$ b) $\sum_{j=1}^{10} A^j$

3 (Funrei-MG, adaptado) Uma matriz n × n é chamada de *quadrado mágico* quando a soma dos elementos de cada linha, de cada coluna, da diagonal principal e da outra diagonal é igual.

Se a matriz 4 × 4 dada por $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & c & d \\ r & s & t & u \end{bmatrix}$ é um quadrado mágico, então qual é o valor de $\frac{c + t + d + u}{a + b + r + s}$?

4 (PUC-RJ) Um quadrado mágico de ordem n é uma matriz n × n cujas entradas são os inteiros de 1 até n^2 e tal que a soma de todos os inteiros em cada linha e em cada coluna dá o mesmo resultado S. Qual o valor de S?



20

DETERMINANTES

1 ○ Definição e regras práticas

Seja A uma matriz *quadrada* de ordem n. Chama-se *determinante* da matriz A, e se indica por det A, o número obtido a partir de operações entre os elementos de A, de modo que:

▶ **1º** Se A é de ordem n = 1, então det A é o único elemento de A:

$$A = (3) \Rightarrow \det A = 3 \qquad B = (-8) \Rightarrow \det B = -8$$

▶ **2º** Se A é de ordem n = 2, então det A é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal de A e o produto dos elementos de sua diagonal secundária:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 4 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = -12 + 1 = -11$$

Podemos também indicar o determinante de uma matriz colocando uma barra vertical em cada um de seus lados.
Assim:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 5 = 25 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

▶ **3º** Se A é de ordem n = 3, utilizaremos o seguinte procedimento para obter o valor de det A:

a) copiamos ao lado da matriz A as suas duas primeiras colunas;

b) multiplicamos os elementos da diagonal principal de A. Segundo a direção da diagonal principal, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais";

c) multiplicamos os elementos da diagonal secundária de A, trocando o sinal do produto obtido. Segundo a direção da diagonal secundária, multiplicamos, separadamente, os elementos das outras duas "diagonais", também trocando o sinal dos produtos;

d) somamos todos os produtos obtidos nos itens *b* e *c*.

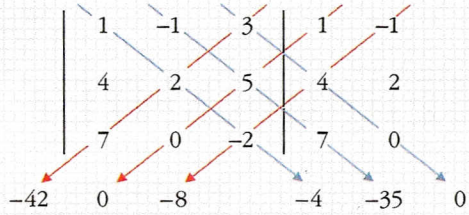
Esse procedimento é conhecido como *Regra de Sarrus*.

Observação

A utilidade dos determinantes será explicada no próximo capítulo. No presente, o objetivo é apresentar as regras práticas de cálculo de determinantes de matrizes 2 × 2 e 3 × 3, e também o teorema de Laplace, que pode ser usado em matrizes de qualquer ordem.

Exemplo 1

Vamos calcular o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

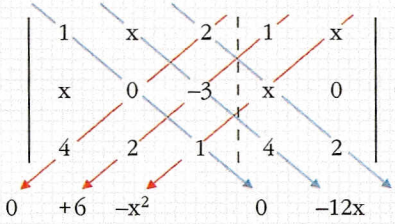


Assim, det M = −42 + 0 − 8 − 4 − 35 + 0 = −89.

Exemplo 2

Vamos determinar o valor de x em $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$.

Aplicando a regra de Sarrus no primeiro membro vem:



$= 0 + 6 - x^2 + 0 - 12x + 4x = -x^2 - 8x + 6$

Daí:

$-x^2 - 8x + 6 = -3 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = -9$ ou $x = 1$

Exercícios

1 Calcule o valor de cada um dos seguintes determinantes:

a) $|-3|$ b) $|7|$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & 5 \\ x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2^{x+1} & 2^x \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 16$

3 Calcule o valor de cada um dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}$

4 (Unicap-PE) Calcule o valor de x, a fim de que o determinante da matriz A seja nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{pmatrix}$$

5 Considere a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ em que $a_{ij} = \begin{cases} x, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.
Determine os valores de x para os quais $\det A = 2$.

Para resolver as questões de números 6 e 7 considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

6 (Unifor-CE) Determine k para o qual o determinante da matriz A é nulo.

7 (Unifor-CE) Na matriz A, faça $k = 0$ e resolva a equação matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Dê o valor de $x - y - z$.

8 (U.F. Ouro Preto-MG) Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $C = (5 \quad -1)$.
Pede-se:

a) Calcular $BC + 2A$ e CB.
b) Determinar λ de maneira que $\det(A - \lambda I) = 0$, sendo I a matriz identidade de ordem 2×2.

9 (Unirio-RJ) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & c & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ a & b & -2 \end{bmatrix}$. Sabendo-se que $A^t = A$, calcule o determinante da matriz $A - A^2 + I_3^2$, sendo I_3 a matriz identidade de ordem 3.

2 Cofator

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.
O *cofator* de um elemento a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ qualquer de A é indicado por A_{ij} e definido por:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A, eliminando sua i-ésima linha e j-ésima coluna.

Exemplo 3

Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, então, eliminando-se a 1ª linha e a 3ª coluna,

obtemos: $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = -13$ é o cofator do elemento a_{13}.

Exemplo 4

Sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 11 & -9 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e eliminando-se a 3ª linha e a 2ª coluna, obtemos:

$B_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 11 & 1 & -1 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow B_{32} = -70$ é o cofator do elemento b_{32}.

3 ○ Teorema de Laplace

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem n, escolhemos arbitrariamente uma de suas filas (linha ou coluna) e somamos os produtos dos elementos dessa fila pelos respectivos cofatores.

Omitiremos, nesta obra, a demonstração desse teorema, bem como a demonstração de que o valor do determinante *não* depende da fila escolhida.

O Teorema de Laplace se aplica a toda matriz quadrada de ordem n; entretanto, para os casos $n = 2$ e $n = 3$ é mais simples, em geral, utilizar as regras práticas que foram vistas páginas atrás.

Exemplo 5

Vamos calcular $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 11 & 2 \end{vmatrix}$ ←

Escolhemos a linha 3 de D. Pelo Teorema de Laplace vem:

$$D = 7 \cdot A_{31} + 4 \cdot A_{32} + (-5) \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} \ (*)$$

Temos:

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 9, \ A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 20 \text{ e } A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Observe que não é necessário calcular A_{34}.

Daí, em (*), temos:

$$D = 7 \cdot 9 + 4 \cdot 20 + (-5) \cdot 7 = 108$$

Exemplo 6

Qual é o valor de $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \\ -9 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$? ↑

Embora a escolha seja arbitrária, devemos optar pela fila com maior número de zeros, a fim de simplificar os cálculos. Escolhemos, dessa forma, desenvolver pelos elementos da 2ª coluna. Temos:

$$D = \underbrace{0 \cdot A_{12}}_{=0} + (-2) \cdot A_{22} + \underbrace{0 \cdot A_{32}}_{=0} + \underbrace{0 \cdot A_{42}}_{=0} = -2 \cdot A_{22}$$

Assim, basta calcular A_{22}.

Como $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & -3 & -2 \\ -9 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -183$, segue que $D = (-2) \cdot (-183) = 366$.

Exercícios

10 Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

11 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3$.

12 (Mackenzie-SP) Se $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+2^x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-2^x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-2^x \end{vmatrix} = 0$, qual é o valor de 2^x?

Sugestão: Faça $2^x = y$.

13 Calcule: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Testes de vestibulares

1 (Vunesp-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz $A \cdot B$ é:

a) -1
b) 6
c) 10
d) 12
e) 14

2 (Unaerp-SP) São dadas as matrizes $M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$. Considerando-se que o determinante da matriz M_2 vale D, o determinante de M_1 valerá:

a) $-2D^{-1}$
b) $-2D$
c) $-\frac{1}{2}D$
d) $\frac{1}{2}D^{-1}$
e) $\frac{1}{2}D$

3 (UF-RN) Sendo $a = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e $b = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$
b) 4
c) 1
d) $\frac{1}{2}$

4 (Unit-MG) Calcular x e y de sorte que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ x & y & 5 \end{vmatrix} = 6 \text{ e } \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & y & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 47$$

a) $x = 1, y = 3$
b) $x = 3, y = 2$
c) $x = 4, y = 4$
d) $x = 4, y = 3$

5 (U.F. São Carlos-SP) A condição para que o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ seja diferente de zero é:

a) $a = -1$ e $a = 2$
b) $a \neq 1$ e $a \neq -2$
c) $a > 0$
d) $a \neq -1$ e $a \neq 2$
e) $a \neq 1$ e $a \neq 2$

6 (Unificado-RJ) O valor de $\begin{vmatrix} \cos a & -\text{sen } a & 0 \\ \text{sen } a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ é:

a) $4(\cos a + \text{sen } a)$
b) 4
c) $2(\cos^2 a - \text{sen } a)$
d) 2
e) 0

7 (Fatec-SP) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A equação $\det(A - xB) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$, admite:

a) uma raiz de multiplicidade 2.
b) uma raiz negativa.
c) duas raízes negativas.
d) uma raiz positiva e outra negativa.
e) uma raiz nula.

8 (UE-CE) Sejam m_1 e m_2 números reais positivos. Se o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{m_1} \\ \sqrt{m_2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

então o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & m_1 - 1 & 2 \\ 1 & -1 & m_2 + 2 \end{pmatrix}$ é:

a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{25}{4}$ d) $\frac{25}{2}$

9 (PUC-MG) O valor do determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é igual a:

a) -4 c) -1 e) 3
b) -3 d) 2

10 (UF-SE) Se $D_1 = \begin{vmatrix} 2^n & -1 & 0 \\ 1 & 2^n & 2 \\ 2^n & 0 & 1 \end{vmatrix}$ e $D_2 = \begin{vmatrix} 2^n & 1 \\ 1 & 2^n \end{vmatrix}$, com $n \neq 0$, então o quociente $\frac{D_1}{D_2}$ é igual a:

a) 2^{n+1} d) $\frac{1}{2^n + 1}$
b) $1 + 2^{n+1}$ e) $\frac{2^n}{2^n - 1}$
c) $\frac{2^n - 1}{2^n + 1}$

11 (Unimes-SP) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & y & x \\ y & z & x \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x + y & x + z \\ z - y & z - x \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Sabe-se que B = C, o determinante da matriz A será:

a) 42 c) 24 e) 15
b) 21 d) 12

12 (Cefet-PR) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ e $M = A^t + A^{-1}$, então o determinante da matriz M é igual a:

a) -89 c) 0 e) 39
b) -39 d) -1

13 (UPE-PE) Se A é uma matriz quadrada de ordem n, de elementos reais, λ é um número real e I, a matriz identidade de ordem n, chama-se "valor próprio" de A a uma raiz da equação $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$, em que "det" significa determinante.
Dessa forma, a soma dos valores próprios da matriz A, abaixo, é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) 4 c) 0 e) -4
b) 2 d) 6

14 (F. P. T. E. Lins-SP) O valor de determinante abaixo é:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & d \end{bmatrix}$$

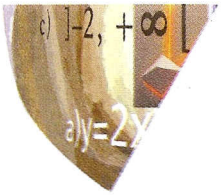
a) 3abcd c) 3abc e) $-2abd$
b) 2abcd d) $-3abc$

Desafios

1 Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{sen } 2x \\ \cos x & 1 & \text{sen } x \\ 0 & \text{sen } x & 1 \end{vmatrix}$ assume valores entre zero e $\frac{1}{2}$.

2 (U. F. Uberlândia-MG) Quais são as raízes da equação dada abaixo, sendo $x > 0$?

$$\begin{vmatrix} \log_3(x) & \log_3(x^3) & \log_3(x^9) \\ 3^x & 9^x & 27^x \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$



21

SISTEMAS LINEARES

1 ○ Introdução

Bruce Ayres/Stone

Três irmãos, Paula, Júlia e André, ao confrontarem suas contas de telefone celular, ficaram curiosos em saber quanto custou um minuto de cada tipo de ligação realizada. As três contas apresentaram ligações para telefones fixos e móveis (celulares) e ligações internacionais para Buenos Aires, onde moram seus primos.

A tabela informa o tempo (em minutos) das ligações que cada um efetuou e o valor correspondente da conta, já descontado o preço da assinatura.

	Fixo	Móvel	Internacional (Buenos Aires)	Valor
Paula	10 min	6 min	2 min	12,20
Júlia	14 min	4 min	3 min	13,40
André	8 min	5 min	5 min	14,70

Vamos denominar x, y e z os preços do minuto de ligação para telefones fixos, para telefones móveis e para Buenos Aires, respectivamente.

- A conta de Paula é dada por: $10x + 6y + 2z = 12{,}20$.
- A conta de Júlia é dada por: $14x + 4y + 3z = 13{,}40$.
- A conta de André é dada por: $8x + 5y + 5z = 14{,}70$.

As três equações acima constituem um exemplo de *sistema linear*. Ao final do capítulo seremos capazes de resolvê-lo.

2 ○ Equação linear

Observe as seguintes equações:

$$2x - y = 5 \qquad 4x - 3y + z = 0 \qquad -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 1$$

Cada equação acima é do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b$, em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as *variáveis* (*incógnitas*); $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são *coeficientes reais* (b é o coeficiente independente).

Equações desse tipo recebem o nome de *equações lineares*.

Note que, numa equação linear, os expoentes de todas as variáveis são sempre iguais a 1.

Solução de uma equação linear

Na equação $4x - y = 2$, o par ordenado $(3, 10)$ é uma *solução*, pois substituindo x por 3 e y por 10 obtemos uma igualdade:

$$4 \cdot 3 - 10 = 12 - 10 = 2$$

Já o par $(0, 1)$ *não* é solução, pois $4 \cdot 0 - 1 = -1 \neq 2$.

Se quisermos obter outra solução dessa equação, podemos escolher, arbitrariamente, um valor para x e o valor de y fica determinado. Por exemplo:

se $x = -\frac{1}{2} \rightarrow 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - y = 2 \rightarrow y = -4$, e a solução é $\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$.

Em geral, dizemos que a seqüência ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ quando a expressão $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira.

Exercícios

1 Dada a equação linear $-3x + 2y = 1$, verifique se os pares seguintes são soluções:

a) $(-1, -1)$ b) $(0, 0)$ c) $(2, 3)$ d) $(-3, -4)$

2 Verifique se as triplas ordenadas são soluções da equação $-x + y - 2z = 3$:

a) $(1, 1, 1)$ b) $(0, 1, -1)$ c) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$ d) $\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$

3 Dada a equação $m \cdot x + 2y - 4z = 5$, sendo $m \in \mathbb{R}^*$, sabe-se que a tripla $(-1, 1, -1)$ é uma solução.

a) Encontre o valor de m.
b) Forneça outras duas soluções dessa equação.

4 Apresente duas soluções *inteiras* da equação $-4x + 3y = 0$.

5 Dois irmãos, João e José, pescaram em uma manhã x e y peixes, respectivamente. Sabendo que $3x + 4y = 61$, determine as possíveis quantidades de peixes que eles conseguiram juntos.

3 Sistema linear

Um conjunto de m equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dito *sistema linear* de m equações e n variáveis.

Dessa maneira, temos:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e duas variáveis.

b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3x + 4y = 1 \end{cases}$ é um sistema linear com duas equações e três variáveis.

c) $\{x - y + 2z - w = 0$ é um sistema linear com uma equação e quatro variáveis.

Matrizes associadas a um sistema

Podemos associar a um sistema linear duas matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

a) No sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -2 \end{cases}$, temos que $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ é a *matriz incompleta* e

$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ é a *matriz completa.*

b) As matrizes associadas ao sistema $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x - z = 3 \\ y + 3z = -1 \end{cases}$ são:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Notemos que a matriz completa B é obtida de A acrescentando-se a coluna relativa aos termos independentes das equações do sistema.

Solução de um sistema

Dizemos que a seqüência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear de n variáveis quando é solução de cada uma das equações do sistema.

Exemplo 1

A tripla ordenada $(-1, -2, 3)$ é uma solução do sistema $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$, pois:

- 1ª equação → $3 \cdot (-1) - (-2) + 3 = -3 + 2 + 3 = 2$ (V)
- 2ª equação → $-1 - 2 \cdot (-2) - 3 = -1 + 4 - 3 = 0$ (V)
- 3ª equação → $2 \cdot (-1) + (-2) + 2 \cdot 3 = -2 - 2 + 6 = 2$ (V)

Classificação

Um sistema linear é classificado de acordo com seu número de soluções.
Podemos ter:

SISTEMA POSSÍVEL (tem solução)	DETERMINADO (a solução é única)	(I)
	INDETERMINADO (tem infinitas soluções)	(II)
SISTEMA IMPOSSÍVEL	não apresenta nenhuma solução	(III)

Exemplifiquemos:

(I) O par ordenado $(1, 3)$ é a *única* solução do sistema $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 7x - 3y = -2 \end{cases}$.

Nesse caso, o sistema é dito *Sistema possível e determinado* (SPD).

(II) O sistema $\begin{cases} 3x - 3y + 3z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ apresenta *infinitas* soluções, como por exemplo $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 0)$, $(2, -1, -2)$. Dizemos que o sistema é *possível e indeterminado* (SPI).

(III) O sistema $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ -4x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ não apresenta nenhuma solução, pois a primeira e a terceira equações *não* podem ser satisfeitas ao mesmo tempo. Dizemos que o sistema é *impossível* (SI).

Exercícios

6 Verifique se o par (1, 2) é solução do sistema $\begin{cases} 7x - 4y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$.

7 Verifique se a tripla (2, –1, 2) é solução do sistema dado pelo produto: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

8 Classifique, em cada caso, o sistema linear:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 8 \\ 4x + 3y = 11 \\ 11x - 7y = 76 \end{cases}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

9 Construa a matriz incompleta A e a completa B de cada um dos sistemas:

a) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 4x + y - z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ y + z = 2 \\ -z = 1 \end{cases}$

4 Sistemas escalonados

Consideremos um sistema linear S no qual, em cada equação, existe pelo menos um coeficiente não nulo.

Dizemos que S está na *forma escalonada* (ou, simplesmente, *é escalonado*) se o número de coeficientes nulos, antes do 1º coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação.

São exemplos de sistemas escalonados:

$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 2y - 3z = -1 \\ -z = 5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x - y + 5z = 3 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x + y - z - t - w = 1 \\ z + t + 2w = 0 \\ 2w = -3 \end{cases}$

Resolução de um sistema na forma escalonada

Vamos considerar dois tipos de sistemas escalonados:

▶ **1º** *Número de equações igual ao número de variáveis*

Seja o sistema escalonado $\begin{cases} 3x + 7y + 5z = -3 \\ y + z = -2 \\ -2z = 8 \end{cases}$

Partindo da última equação, obtemos z. Substituindo esse valor na segunda equação obtemos y. Por fim, substituímos y e z na primeira equação, obtendo x.

Dessa forma:

3ª equação → $z = -4$

2ª equação → $y + (-4) = -2 \rightarrow y = 2$

1ª equação → $3x + 7 \cdot 2 + 5 \cdot (-4) = -3 \rightarrow 3x - 6 = -3 \rightarrow x = 1$

Assim, a solução do sistema é (1, 2, –4).

Esse tipo de sistema apresenta sempre uma *única* solução. Temos, então, um *sistema possível e determinado* (SPD).

2º *Número de equações menor que o número de variáveis*

Seja o sistema escalonado $\begin{cases} x - y + 3z = 5 \\ y + z = 2 \end{cases}$. Intuitivamente, sabemos que *não* é possível determinar x, y e z de maneira *única*, pois há três variáveis e apenas duas "informações" sobre elas. Dizemos que esse sistema apresenta um grau de indeterminação igual a $3 - 2 = 1$. Nesse caso, a solução do sistema será dada em função de uma de suas variáveis, que será chamada de *variável livre* do sistema.

Acompanhe os passos para chegar à solução geral:

a) A variável que *não* aparecer no início de nenhuma das equações do sistema será convencionada como variável livre. No exemplo, a única variável livre do sistema é z.

b) Transpomos a variável livre z para o 2º membro em cada equação e obtemos:

$$\begin{cases} x - y = 5 - 3z \\ y = 2 - z \end{cases}$$

c) Para obtermos x como função de z, substituímos $y = 2 - x$, na 1ª equação:

$$x - (2 - z) = 5 - 3z \Rightarrow \quad x = 7 - 4z$$

Assim, toda tripla ordenada da forma $(7 - 4z, 2 - z, z)$, sendo $z \in \mathbb{R}$, é solução do sistema. Para cada valor real que atribuirmos a z, chegaremos a uma solução do sistema. Vejamos:

- $z = 0 \rightarrow (7, 2, 0)$
- $z = 1 \rightarrow (3, 1, 1)$
- $z = -1 \rightarrow (11, 3, -1)$
- $z = \frac{1}{2} \rightarrow \left(5, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Em geral, se $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a solução é dada por $S = \{(7 - 4\alpha, 2 - \alpha, \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Esse tipo de sistema apresenta infinitas soluções e, por isso, é denominado *sistema possível e indeterminado* (SPI).

Exercícios

10 Indique quais sistemas estão escalonados.

a) $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ t = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 5y - 3z = 9 \\ 4y + 5z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + z + t = 0 \\ y - z - t = 0 \\ z + 2t = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + 5y + 3z = 1 \\ -x - y + z = 5 \end{cases}$

11 Classifique e resolva os seguintes sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ 3y + z = 1 \\ -z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z + t = -1 \\ y - 2z - t = 0 \\ z + t = 3 \\ t = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a + b - c = 3 \\ 2b + c = 1 \end{cases}$

12 O sistema escalonado $\begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ z - t = 0 \end{cases}$ apresenta quatro incógnitas e apenas duas informações sobre seus valores.

a) Qual é o grau de indeterminação desse sistema?

b) Expresse a solução geral do sistema em função de y e t, apresentando duas de suas soluções.

3 A soma dos salários de três irmãos, em um mês, é R$ 2 950,00. Seja a diferença entre o maior e o menor salário de R$ 400,00.

a) Expresse cada salário em função do *menor* salário.

b) Se os salários são expressos por múltiplos de 50 e não há salários iguais, quais as possibilidades para tais valores?

Sistemas equivalentes e escalonamento

Dizemos que dois sistemas lineares, S_1 e S_2, são *equivalentes* quando toda solução de S_1 é também solução de S_2, e vice-versa.

Os sistemas $S_1 \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + y = 2 \end{cases}$ e $S_2 \begin{cases} -x + y = 2 \\ 6x - y = 23 \end{cases}$ são equivalentes, pois ambos admitem o par (5, 7) como única solução.

Dado um sistema linear qualquer, nosso objetivo é transformá-lo em outro equivalente, porém na forma escalonada. Procederemos dessa maneira, pois, como vimos, é fácil resolver um sistema na forma escalonada. Para isso, vamos apresentar duas propriedades que nos permitirão construir sistemas equivalentes.

Propriedade 1

Quando multiplicamos por k, $k \in \mathbb{R}^*$, os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S, obtemos um novo sistema S' equivalente a S.

Exemplo 2

Considere $S \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$, cuja solução é (3, –1).

Multiplicando-se a 1ª equação de S por 5, por exemplo, obtemos:

$$S' \begin{cases} 5x - 5y = 20 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases},$$

a solução também é (3, –1).

Propriedade 2

Quando substituímos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com outra, obtemos um novo sistema S', equivalente a S.

Exemplo 3

Seja $S: \begin{cases} -x + y = -2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$, cuja solução é (5, 3).

Substituindo a 2ª equação pela soma dela com a 1ª:

Rascunho:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 1 \\ -x + y = -2 \\ \hline x - 2y = -1 \end{array} \quad (+)$$

$$S': \begin{cases} -x + y = -2 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \xleftarrow{(2ª \text{ eq.}) + (1ª \text{ eq.})}$$

O par (5, 3) é também solução de S', pois a segunda equação também é verificada:

$$x - 2y = 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1$$

Exemplo 4

Vamos utilizar as duas propriedades a fim de transformar $S \begin{cases} -x + y = -2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ em um sistema escalonado.

Vamos substituir a 2ª equação de S pela soma dela com a 1ª multiplicada por 2:

Rascunho:

$$S' \begin{cases} -x + y = -2 \\ -y = -3 \end{cases} \xleftarrow{(2) \times (1ª\ eq.) + (2ª\ eq.)} \begin{array}{r} -2x + 2y = -4 \\ 2x - 3y = 1 \\ \hline -y = -3 \end{array} (+)$$

É fácil notar que (5, 3) também é solução de S'.

Escalonamento de um sistema

Para escalonar um sistema linear qualquer, vamos seguir o roteiro abaixo, baseado nas propriedades anteriores:

- *1º passo:* Escolhemos, para 1ª equação, uma em que o coeficiente da 1ª incógnita seja *não* nulo. Se possível, fazemos a escolha a fim de que esse coeficiente seja igual a –1 ou 1, pois os cálculos ficam, em geral, mais simples.
- *2º passo:* Anulamos o coeficiente da 1ª incógnita das demais equações, usando as propriedades 1 e 2.
- *3º passo:* Desprezamos a 1ª equação e aplicamos os dois primeiros passos com as equações restantes.
- *4º passo:* Desprezamos a 1ª e a 2ª equações e aplicamos os dois primeiros passos nas equações restantes, até o sistema ficar escalonado.

Exemplo 5

Vamos escalonar e depois resolver o sistema: $\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ 2x + y + z = 6 \\ -2x - 2y + z = 1 \end{cases}$.

Em primeiro lugar, precisamos anular os coeficientes de x na 2ª e na 3ª equação.

Rascunho:

Substituímos a 2ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por 2:

$$\begin{array}{r} -2x + 2y - 4z = -18 \\ 2x + y + z = 6 \\ \hline 3y - 3z = -12 \end{array}$$

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ 3y - 3z = -12 \\ -4y + 5z = 19 \end{cases}$$

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 1ª, multiplicada por (–2):

$$\begin{array}{r} 2x - 2y + 4z = 18 \\ -2x - 2y + z = 1 \\ \hline -4y + 5z = 19 \end{array}$$

Deixando de lado a 1ª equação, vamos repetir o processo para a 2ª e a 3ª equação. Convém, entretanto, dividir os coeficientes da 2ª equação por 3, a fim de facilitar o escalonamento:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ \quad y - \ z = -4 \\ -4y + 5z = 19 \end{cases}$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -9 \\ \quad y - \ z = -4 \\ \quad\quad z = 3 \end{cases}$$

Rascunho:

Substituímos a 3ª equação pela soma dela com a 2ª, multiplicada por 4:

$$\begin{array}{r} 4y - 4z = -16 \\ -4y + 5z = 19 \\ \hline z = 3 \end{array}$$

O sistema obtido está escalonado e é do 1º tipo (SPD).

Resolvendo-o, obtemos como solução: (2, –1, 3).

Exemplo 6

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 3x - 2y - \ z = 0 \\ \ x - \ y + 2z = 1 \\ 8x - 6y + 2z = 2 \end{cases}$.

Para facilitar o escalonamento, é interessante trocar as posições das duas primeiras equações, para que o primeiro coeficiente de x seja igual a 1:

$$\begin{cases} \ x - \ y + 2z = 1 \\ 3x - 2y - \ z = 0 \\ 8x - 6y + 2z = 2 \end{cases}$$

Rascunho:

(–3) × (1ª eq.) + (2ª eq.):

$$\begin{array}{r} -3x + 3y - 6z = -3 \\ 3x - 2y - \ z = 0 \\ \hline y - 7z = -3 \end{array} \quad (+)$$

$$\begin{cases} x - y + \ 2z = 1 \\ \quad y - \ 7z = -3 \\ \quad 2y - 14z = -6 \end{cases}$$

(–8) × (1ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -8x + 8y - 16z = -8 \\ 8x - 6y + \ 2z = 2 \\ \hline 2y - 14z = -6 \end{array} \quad (+)$$

Deixamos a 1ª equação de lado e repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equação:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ \quad y - 7z = -3 \\ \quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

(–2) × (2ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -2y + 14z = 6 \\ 2y - 14z = -6 \\ \hline 0 = 0 \end{array} \quad (+)$$

A 3ª equação pode ser retirada do sistema, pois, apesar de ser sempre verdadeira, não traz informação sobre os valores das variáveis. Assim, obtemos o sistema escalonado:

$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \ \text{(I)} \\ \quad y - 7z = -3 \ \text{(II)} \end{cases}$, que é do 2º tipo (SPI), com grau de indeterminação igual a 1.

A variável livre do sistema é z.

Temos:

- (II) $y = 7z - 3$
- (I) $x - (7z - 3) + 2z = 1 \Rightarrow x = 5z - 2$

Assim, $S = \{(5z - 2, 7z - 3, z); z \in \mathbb{R}\}$.

Observação

Quando, durante o escalonamento, encontramos duas equações com coeficientes ordenadamente iguais ou proporcionais, podemos retirar uma delas do sistema.

Exemplo 7

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -5x - 20y - 15z = 11 \\ 3x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$.

Nenhum dos coeficientes de x nas equações dadas vale 1, mas precisamos anular os coeficientes de x na 2ª e na 3ª equação:

Rascunho:

$5 \times$ (1ª eq.) $+ 2 \times$ (2ª eq.):

$$\begin{array}{r} 10x - 5y + 5z = -5 \\ -10x - 40y - 30z = 22 \\ \hline -45y - 25z = 17 \end{array}$$

$(-3) \times$ (1ª eq.) $+ 2 \times$ (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -6x + 3y - 3z = 3 \\ 6x + 6y + 8z = 6 \\ \hline 9y + 5z = 9 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -45y - 25z = 17 \\ 9y + 5z = 9 \end{cases}$$

Repetimos o processo para a 2ª e a 3ª equação, deixando a 1ª de lado; é interessante, entretanto, dividir os coeficientes da 2ª equação por 5.

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -9y - 5z = \dfrac{17}{5} \\ 9y + 5z = 9 \end{cases},$$

que equivale a:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -9y - 5z = \dfrac{17}{5} \\ 0 = \dfrac{62}{5} \end{cases}$$

Rascunho:

(2ª eq.) + (3ª eq.):

$$\begin{array}{r} -9y - 5z = \dfrac{17}{5} \\ 9y + 5z = 9 \\ \hline 0 = \dfrac{62}{5} \end{array}$$

A 3ª equação do sistema acima obtido é sempre falsa, pois, para quaisquer x, y e z, $0 \neq \dfrac{62}{5}$. Logo, o sistema é *impossível*, isto é, não admite nenhuma solução.

Observação

Quando, durante o escalonamento, encontramos duas equações incompatíveis entre si ou uma sentença falsa, já podemos concluir que se trata de um sistema impossível.

Exercícios

14 Resolva, por meio de escalonamento, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + 3y = 8 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 7x - 7y = 15 \end{cases}$

15 (UE-RJ) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras por apenas 2, num total de 38 fregueses. Qual o número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas?

16 (U. F. Juiz de Fora-MG) Numa prova de 40 questões, cada resposta certa vale 0,25 e cada resposta errada vale −0,1. Um aluno resolveu todas as questões e obteve nota 0,2. Determine a percentagem de erros desse aluno em relação ao número total de questões.

17 (U. F. Uberlândia-MG) Gumercindo decidiu dividir sua fazenda de 30 alqueires entre seus dois filhos João e José. Essa divisão seria diretamente proporcional à produção que cada filho conseguisse em uma plantação de soja. Eles produziram juntos 1,5 tonelada de soja, sendo que José produziu 250 kg a mais que João. Como foi dividida a fazenda?

18 Escalone e resolva os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -2x - y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$

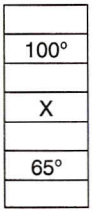
b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y - z = 1 \\ 2x - 6y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - y + 7z = 9 \\ 5x + 3y - z = 0 \\ -7x - 11y + 17z = 19 \end{cases}$

19 (UF-RJ) Na figura ao lado, cada um dos sete quadros contém a medida de um ângulo expressa em graus. Em quaisquer três quadros consecutivos temos os três ângulos internos de um triângulo.
Determine o valor do ângulo *X*.



20 Ao ser indagado sobre o valor do pedágio, um caixa respondeu: "Quando passaram 2 carros de passeio e 3 ônibus, arrecadou-se a quantia de R$ 26,00; quando passaram 2 ônibus e 5 caminhões, a quantia arrecadada foi de R$ 47,00, e quando passaram 6 carros de passeio e 4 caminhões, arrecadou-se a quantia de R$ 52,00".
Qual foi o valor do pedágio para cada tipo de veículo citado?

21 (UnB-DF) Na França, três turistas trocaram por francos franceses (F), no mesmo dia, as quantias que lhes restavam em dólares, libras e marcos, da seguinte forma:

1º turista: 50 dólares, 20 libras e 10 marcos por 502,90 F;
2º turista: 40 dólares, 30 libras e 10 marcos por 533,40 F;
3º turista: 30 dólares, 20 libras e 30 marcos por 450,70 F;

Calcule o valor de 1 libra, em francos franceses, no dia em que os turistas efetuaram a transação.

22 (UF-MS) Um menino possui vários soldadinhos de chumbo e quer colocá-los em fileiras, todas com o mesmo número de soldadinhos. Se ele formar x fileiras de x soldadinhos, sobram-lhe 12 soldadinhos. Para que ele pudesse colocar mais 2 soldadinhos por fileira e ainda formar uma nova fileira, o menino precisaria de 11 soldadinhos a mais do que ele tem. Determinar o número de soldadinhos de chumbo que o menino possui.

23 Uma das soluções de $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ mx + y - 3z = 0 \end{cases}$ é (2, 2, 2). Determine o conjunto solução desse sistema.

24 (UFR-RJ) Uma loja de departamentos, para vender um televisor, um videocassete e um aparelho de som, propôs a seguinte oferta: o televisor e o videocassete custam juntos R$ 1 200,00; o videocassete e o aparelho de som custam juntos R$ 1 100,00; o televisor e o aparelho de som custam juntos R$ 1 500,00. Quanto pagará um cliente que comprar os três produtos anunciados?

25 Resolva, usando o escalonamento, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ x + y = -10 \\ y - x = -6 \\ 3y - 9x = 6 \end{cases}$

6 ○ Sistemas homogêneos

Observe as equações lineares seguintes:

$$x - y + 2z = 0 \qquad 4x - 2y + 5z = 0 \qquad -x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

O coeficiente *independente* de cada uma delas é igual a zero. Passaremos a denominá-las *equações homogêneas*.

Note que a tripla ordenada (0, 0, 0) é uma possível solução dessas equações. Essa solução é chamada solução *nula*, *trivial* ou *imprópria*.

Um conjunto de equações homogêneas recebe o nome de *sistema homogêneo*. Veja alguns exemplos:

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -4x + 7y + z = 0 \\ x + y + 9z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 7y + 5z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Um sistema homogêneo é *sempre possível*, pois a solução nula satisfaz cada uma de suas equações.

Segue, daí, a classificação de um sistema homogêneo.

SISTEMA HOMOGÊNEO

- SPD: só possui a solução *nula*, *trivial* ou *imprópria*.
- SPI: além da solução nula, há outras soluções chamadas *próprias* ou *não triviais*.

Exemplo 8

Escalonando o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 5x + 7y + z = 0 \end{cases}$ vem:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \longleftarrow (-2) \times (1^a \text{ eq.}) + (2^a \text{ eq.}) \\ 2y + 6z = 0 \longleftarrow (-5) \times (1^a \text{ eq.}) + (3^a \text{ eq.}) \end{cases}$$

Dividindo os coeficientes da 3ª equação por 2, notamos que ela ficará igual à 2ª equação e, portanto, poderá ser retirada do sistema.

Assim, o sistema se reduz à forma escalonada $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$ e é do 2º tipo (SPI).

Resolvendo-o, vem $y = -3z$ e $x = 4z$. Se $z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, segue a solução geral $(4\alpha, -3\alpha, \alpha)$.

Vejamos algumas de suas soluções:

- $\alpha = 0 \rightarrow (0, 0, 0)$: solução nula ou trivial
- $\alpha = 1 \rightarrow (4, -3, 1)$
- $\alpha = -2 \rightarrow (-8, 6, -2)$

} soluções próprias ou diferentes da trivial

⋮

26 Classifique e resolva os seguintes sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 6x - 5y + 5z = 0 \\ -4x - 3y + z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ -4x - 2y + z = 0 \end{cases}$

27 O sistema escalonado $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ (m - 1)y = 0 \end{cases}$ admite uma infinidade de soluções.
Qual é o valor de m? Escreva, em função de y, a solução geral.

28 (Unicamp-SP) Seja A a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a) Ache as raízes da equação $\det A = 0$.
(Sugestão: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2$ e fatore.)
b) Ache a solução geral desse sistema para $\lambda = -2$

29 Para que valores reais de m a equação matricial $A \cdot X = B$, em que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, admite uma única solução (x_1, x_2, x_3)?

7 Regra de Cramer

Consideremos o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$. Suponhamos que $a \neq 0$. Observemos que a matriz incompleta desse sistema é $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cujo determinante é indicado por $D = ad - bc$.

Escalonando o sistema, obtemos: $\begin{cases} ax + by = e \\ (ad - bc) \cdot y = (af - ce) \end{cases}$ (*)

Se substituirmos em M a 2ª coluna (dos coeficientes de y) pela coluna dos coeficientes independentes, obteremos $\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}$, cujo determinante é indicado por D_y e vale $af - ce$.

Assim, em (*), na 2ª equação, obtemos: $D \cdot y = D_y$. Se $D \neq 0$, segue que $y = \frac{D_y}{D}$.

Substituindo esse valor de y na 1ª equação de (*) e considerando a matriz $\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}$, cujo determinante é indicado por D_x e vale $ed - bf$, obtemos $x = \frac{D_x}{D}$, $D \neq 0$.

Em resumo, o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ é *possível e determinado* quando $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. A solução desse sistema é dada por:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad e \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Os resultados anteriores são conhecidos como *Regra de Cramer* e podem ser generalizados para um sistema n × n (*n* equações e *n* incógnitas). A Regra de Cramer é um importante recurso na resolução de sistemas lineares possíveis e determinados, especialmente quando o escalonamento se torna muito trabalhoso (por causa dos coeficientes das equações do sistema), ou ainda quando o sistema é literal.

Exemplo 9

Vamos aplicar a Regra de Cramer para resolver o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x - y - 5z = -6. \\ 2x + y + 2z = -3 \end{cases}$

Observemos, de início, que $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$. Temos, dessa forma, SPD.

$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 - 6 - 3 + 12 = 18; \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{-9} = -2$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -12 - \cancel{12} + \cancel{12} - 15 = -27; \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-27}{-9} = 3$

$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 12 + 6 + 12 = 9; \; z = \frac{D_z}{D} = \frac{9}{-9} = -1$

(Uma alternativa para encontrar o valor de z seria substituir x por -2 e y por 3 em qualquer uma das equações do sistema.)

Assim, $S = \{(-2, 3, -1)\}$.

Exercícios

30 Resolva, usando a Regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ -11x - 9y = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + z = 12 \\ 2y - z = -13 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$

31 (UA-AM) Resolva o sistema não-linear:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 8 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 7 \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 9 \end{cases}$$

Sugestão: Faça $\frac{1}{a} = a'$, $\frac{1}{b} = b'$ e $\frac{1}{c} = c'$ e aplique Cramer.

32 Prove que o sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - z + w = -4 \\ y - z - w = -2 \\ -x + z - 2w = 2 \end{cases}$ é possível e determinado e encontre seu conjunto solução.

33 (Covest-PE) Um nutricionista pretende misturar três tipos de alimentos (A, B e C) de forma que a mistura resultante contenha 3 600 unidades de vitaminas, 2 500 unidades de minerais e 2 700 unidades de gorduras. As unidades por gramas de vitaminas, minerais e gorduras dos alimentos constam da tabela abaixo:

	Vitaminas	Minerais	Gorduras
A	40	100	120
B	80	50	30
C	120	50	60

Quantos gramas do alimento C devem compor a mistura?

34 (Unicamp-SP) Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$ 5,00, o quilo da castanha de caju, R$ 20,00, e o quilo de castanha-do-pará, R$ 16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$ 5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

a) Escreva o sistema linear que representa a situação descrita acima.
b) Resolva o referido sistema, determinando as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata.

35 Considere o sistema $\begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\theta - y \cdot \cos\theta = \operatorname{sen}\beta \\ x \cdot \cos\theta + y \cdot \operatorname{sen}\theta = \cos\beta \end{cases}$

a) Mostre que, qualquer que seja $\theta \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e determinado.
b) Resolva-o pela Regra de Cramer.

8 ○ Discussão de um sistema

Consideremos novamente o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, cuja forma escalonada é:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ \underbrace{(ad - bc)}_{D} \cdot y = (af - ce) \quad (*) \end{cases}$$

em que $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ é o determinante da matriz incompleta do sistema.

Já vimos que, se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado e a solução pode ser obtida através da Regra de Cramer.

Se $D = 0$, o 1º membro de (*) se anula. Dependendo do anulamento, ou não, do 2º membro de (*), temos SPI ou SI.

Em geral, sendo D o determinante da matriz incompleta dos coeficientes de um sistema linear, temos:

$$D \neq 0 \rightarrow \text{SPD}$$
$$D = 0 \rightarrow (\text{SPI ou SI})$$

Esse resultado é válido para qualquer sistema linear de n equações e n incógnitas, $n \geqslant 2$.

De modo geral, discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros significa dizer para quais valores do(s) parâmetro(s) temos SPD, SPI ou SI.

Exemplo 10

Vamos discutir, em função de m, o sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + mz = 2 \end{cases}$

Temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = m - 4 + 27 - 6 - 3 + 6m = 7m + 14.$

- Se $7m + 14 \neq 0$, isto é, se $m \neq -2$, temos SPD.
- Se $7m + 14 = 0$, isto é, se $m = -2$, podemos ter SI ou SPI. Vamos, então, substituir m por -2 no sistema e resolvê-lo:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 7y - 8z = 2 \leftarrow (-3) \times (1ª \text{ eq.}) + (2ª \text{ eq.}) \\ 7y - 8z = 2 \leftarrow (-2) \times (1ª \text{ eq.}) + (3ª \text{ eq.}) \end{cases}$$

ou ainda $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 7y - 8z = 2 \end{cases}$, que é escalonado e do 2º tipo (SPI).

Assim, $m \neq -2 \rightarrow$ SPD
$m = -2 \rightarrow$ SPI

Exemplo 11

Determinemos o valor de m em $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -5x + 4y - 2z = 0 \\ mx - 2y = 0 \end{cases}$ a fim de que esse sistema admita soluções próprias.

Como um sistema homogêneo é sempre possível, valem as relações:

$D \neq 0 \rightarrow$ SPD (O sistema só tem a solução nula ou imprópria.)
$D = 0 \rightarrow$ SPI (O sistema tem soluções próprias.)

Assim, devemos impor $D = 0$, isto é:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ m & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6m + 10 - 4m - 8 = 0 \Rightarrow m = -1$$

Observação

Para um *sistema não homogêneo*, a condição $D = 0$ é *necessária* para que tenhamos SPI, mas *não é suficiente* (pois existe a possibilidade de se ter SI).

Para um *sistema homogêneo*, a condição $D = 0$ é *suficiente* para que tenhamos SPI.

Exercícios

36 Discuta, em função de m, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = -5 \\ mx + 3y = -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ mx + 4y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ -x + 3my + z = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x + 2y - mz = 3 \end{cases}$

37 (Unesp-SP) Dado o sistema de equações lineares S:

$$\begin{cases} x + 2y + cz = 1 \\ y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

no qual $c \in \mathbb{R}$, determine:

a) a matriz A dos coeficientes de S e o determinante de A;
b) o coeficiente c, para que o sistema admita uma única solução.

38 O sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ mx + 2y - 3z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$ admite uma infinidade de soluções. Determine m.

39 (UF-SC) Determine o valor de a para que o sistema $\begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ x + y + az = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$ seja impossível.

40 (UF-BA, adaptado) Considerando-se o sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 4y - 3z = 1 \\ (1 - a^2)z = a - 1 \end{cases}$, classifique as sentenças em V ou F, justificando:

a) Se $a \notin \{-1, 1\}$, então o sistema tem solução única.
b) Se $a \neq -1$, o sistema tem solução.
c) Se $a = 1$, então as soluções do sistema são da forma (x, y, z), com $y = 3x - 2$, $z = 4 - x$, $x \in \mathbb{R}$.
d) Se $a = 0$, então a solução do sistema é (m, n, p), com $m = \frac{1}{2}$.
e) Se $a = 0$ e A é a matriz dos coeficientes do sistema, então os elementos da 1ª coluna da matriz B, inversa de A, são $b_{11} = 1$, $b_{21} = 0$ e $b_{31} = 0$.

41 (FGV-SP) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e a matriz incógnita $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, chama-se autovalor de A qualquer valor real de λ que faz com que a equação matricial $AX = \lambda X$ tenha soluções não nulas para X.

a) Determine os autovalores de A.
b) Para cada um dos valores encontrados no item anterior, obtenha a expressão da matriz X.

42 Discuta, em função de a e b, os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 12x + ay = b \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y - z = 4 \\ 4x + ay + z = -19 \\ x - y + 3z = b \end{cases}$

43 (UC-GO) Determine a e b para que o sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ 2x + by - 6z = 1 \end{cases}$ seja indeterminado.

44 (FGV-SP) Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - 3y = 7 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

a) Discuta o sistema em função do parâmetro k.
b) Resolva o sistema para $k = 12$.

45 (IME-RJ) Determine α para que seja impossível o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2 \end{cases}$$

1 (Fatec-SP) Dois casais foram a um barzinho. O primeiro pagou R$ 5,40 por 2 latas de refrigerante e uma porção de batatas fritas. O segundo pagou R$ 9,60 por 3 latas de refrigerante e 2 porções de batatas fritas.
Nesse local e nesse dia, a diferença entre o preço de uma porção de batatas fritas e o preço de uma lata de refrigerante era de:

a) R$ 2,00 c) R$ 1,75 e) R$ 1,20
b) R$ 1,80 d) R$ 1,50

2 (Unifor-CE) Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. Se a terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do de laranjas em 4 unidades, então nesse pacote há:

a) igual número de balas dos dois tipos.
b) duas balas de hortelã a mais que de laranja.
c) 20 balas de hortelã.
d) 26 balas de laranja.
e) duas balas de laranja a mais que de hortelã.

3 (Fuvest-SP)

$$\begin{cases} x + 4z = -7 \\ x - 3y = -8 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Então $x + y + z$ é igual a:

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 2

4 (Fafi-MG) Se a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = -15 \\ 3x + 6y - 7z = 59 \end{cases}$$ é $\{(x, y, z)\}$,

então o valor de $x^y + z$ é:

a) primo c) negativo
b) par d) irracional

5 (UCDB-MT) O sistema

$$\begin{cases} -x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x - 4y + 10z - 6 = 0 \\ 2x + 7y - 5z - 2 = 0 \end{cases}$$ é:

a) impossível.
b) homogêneo.
c) determinado.
d) indeterminado com uma variável arbitrária.
e) indeterminado com duas variáveis arbitrárias.

6 (F. Objetivo-AM) O sistema $\begin{cases} x + ay = 3 \\ 2x + 4y = b \end{cases}$ nas incógnitas x e y tem infinitas soluções. O valor de $a \cdot b$ é:

a) 6 d) 16
b) 2 e) 12
c) 8

7 (Cefet-PR) Para a festa do Natal, uma creche necessitava de 120 brinquedos. Recebeu uma doação de R$ 370,00. Esperava-se comprar carrinhos a R$ 2,00 cada, bonecas a R$ 3,00 e bolas a R$ 3,50. Se o número de bolas deveria ser igual ao número de bonecas e carrinhos juntos, a solução seria comprar:

a) 60 bonecas, 30 carrinhos e 30 bolas
b) 20 bonecas, 40 carrinhos e 60 bolas
c) 30 bonecas, 30 carrinhos e 60 bolas
d) 25 bonecas, 45 carrinhos e 70 bolas
e) 40 bonecas, 20 carrinhos e 60 bolas

8 (Unificado-RJ) Para que valores de k existe uma única matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tal que

$$\begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ -1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

a) $k \neq -1$ d) $k \neq -2$ e $k \neq 1$
b) $k = -2$ e) $k \neq 2$ e $k \neq -1$
c) $k = -2$ ou $k = 1$

9 (UF-AL) O sistema $\begin{cases} ax + 2y = 3 \\ bx - y = 1 \end{cases}$, nas variáveis reais x e y, é:

a) possível e determinado, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
b) possível e indeterminado se $a = 2b$.
c) possível e determinado se $a \neq 2b$.
d) possível e indeterminado se $a = -2b$.
e) impossível se $a = -2b$.

10 (PUC-Pelotas-RS) O sistema linear

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \\ x - 5y + 15z = 0 \end{cases}$$

a) admite infinitas soluções.
b) admite apenas duas soluções.
c) não admite solução.
d) admite solução única.
e) admite apenas a solução trivial.

11 (F. M. Triângulo Mineiro-MG) Em três mesas de uma lanchonete o consumo ocorreu da seguinte forma:

Mesa	Hambúrguer	Refrigerante	Porção de fritas
1ª	4	2	2
2ª	6	8	3
3ª	2	3	1

A conta da 1ª mesa foi R$ 18,00 e da 2ª mesa R$ 30,00. Com esses dados:

a) é possível calcular a conta da 3ª mesa e apenas o preço unitário do refrigerante.
b) é possível calcular a conta da 3ª mesa, mas nenhum dos preços unitários dos três componentes do lanche.
c) é possível calcular a conta da 3ª mesa e, além disso, saber exatamente os preços unitários de todos os componentes do lanche.
d) não é possível calcular a conta da 3ª mesa, pois deveriam ser fornecidos os preços unitários dos componentes do lanche.
e) é impossível calcular a conta da 3ª mesa e os preços unitários dos componentes do lanche, pois deve ter havido um erro na conta da 1ª ou da 2ª mesa.

12 (Unimes-SP) Em um país do Oriente Médio, existem dois tipos de poços de petróleo, P_a e P_b. Sabe-se que oito poços P_a mais seis poços P_b produzem em dez dias tantos barris quanto seis poços P_a mais dez poços P_b produzem em oito dias. Logo, a produção do poço P_a é:

a) 60,0% da produção do poço P_b.
b) 60,0% maior do que a produção do poço P_b.
c) 62,5% da produção do poço P_b.
d) 62,5% maior do que a produção do poço P_b.
e) 75,0% da produção do poço P_b.

13 (UF-GO) Classifique em *V* ou *F*:
Seja *k* um número real. Considerando-se o sistema linear nas variáveis *x* e *y*, dado por

$$\begin{cases} 4kx + (k-1)y = 1 \\ k^3x + (k-1)y = 2 \end{cases}$$

a) uma solução para o sistema é $x = 0$ e $y = 3$.
b) se $k = -2$, o sistema não tem solução.
c) se $k = 2$, o sistema tem infinitas soluções.
d) existem infinitos valores de *k*, para os quais o sistema possui solução única.

14 (PUC-SP) Alfeu, Bento e Cíntia foram a uma certa loja e cada qual comprou camisas escolhidas entre três tipos, gastando nessa compra os totais de R$ 134,00, R$ 115,00 e R$ 48,00, respectivamente.
Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ tais que:}$$

- os elementos de cada linha de *A* correspondem às quantidades dos três tipos de camisas compradas por Alfeu (1ª linha), Bento (2ª linha) e Cíntia (3ª linha);
- os elementos de cada coluna de *A* correspondem às quantidades de um mesmo tipo de camisa;
- os elementos de *X* correspondem aos preços unitários, em reais, de cada tipo de camisa.

Nessas condições, o total a ser pago pela compra de uma unidade de cada tipo de camisa é:

a) R$ 53,00
b) R$ 55,00
c) R$ 57,00
d) R$ 62,00
e) R$ 65,00

15 (UE-RJ) Observe a tabela de compras realizadas por Mariana:

Loja	Produtos	Preço unitário (R$)	Despesa (R$)
A	Caneta	3,00	50,00
	Lapiseira	5,00	
B	Caderno	4,00	44,00
	Corretor	2,00	

Sabendo que ela adquiriu a mesma quantidade de canetas e cadernos, além do maior número possível de lapiseiras, o número de corretores comprados foi igual a:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14

16 (Unifesp-SP) A solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} x - 2y - 2z = -1 \\ x - 2z = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$ é:

a) $x = -5$, $y = -2$ e $z = -1$
b) $x = -5$, $y = -2$ e $z = 1$
c) $x = -5$, $y = 2$ e $z = 1$
d) $x = 5$, $y = 2$ e $z = -1$
e) $x = 5$, $y = 2$ e $z = 1$

17 (U. F. Viçosa-MG) Sobre o sistema linear, nas variáveis *x*, *y* e *z*,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + ky - 2z = 6 \\ 3x + 6y + kz = 2 \end{cases}$$

é *correto* afirmar que:

a) se $k^2 - k - 12 = 0$, o sistema não possui solução.
b) se $k = -3$, o sistema é impossível.
c) se $k = 4$, o sistema é impossível.
d) se $k = 3$, o sistema possui infinitas soluções.
e) se $k^2 - k - 12 = 0$, o sistema possui infinitas soluções.

18 (Fuvest-SP) Sabendo que x, y e z são números reais e $(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$, então $x + y + z$ é igual a:

a) 3 c) 5 e) 7
b) 4 d) 6

19 (Vunesp-SP) Um orfanato recebeu uma certa quantidade x de brinquedos para ser distribuída entre as crianças. Se cada criança receber três brinquedos, sobrarão 70 brinquedos para serem distribuídos; mas, para que cada criança possa receber cinco brinquedos, serão necessários mais 40 brinquedos. O número de crianças do orfanato e a quantidade x de brinquedos que o orfanato recebeu são, respectivamente:

a) 50 e 290 d) 60 e 250
b) 55 e 235 e) 65 e 265
c) 55 e 220

20 (UF-RS) O sistema de equações

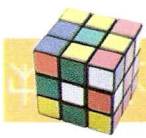
$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + 3y - 3z = a \end{cases}$$

tem solução se e só se o valor de a é:

a) 6 c) 4 e) zero
b) 5 d) 2

21 (Mackenzie-SP) A soma dos valores de m, para que o sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx - 2y + 4z = 5 \\ m^2x + 4y + 16z = 1 \end{cases}$ *não* admita uma única solução, é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5



Desafios

1 (U. F. Uberlândia-MG, adaptado) Um vendedor comprou n bolsas por d reais cada uma. Ele vendeu 2 bolsas para um bazar escolar beneficente pela metade do preço de custo. O restante ele vendeu para uma loja com um adicional de 8 reais por bolsa. Se após as vendas para o bazar e para a loja o lucro total foi de 72 reais, determine o menor valor possível para n. Dê também o correspondente valor de d.

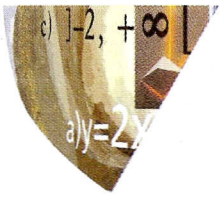
2 (Unicamp-SP) Encontre o valor de a para que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ x + 2y - z = 3 \\ 7x + 4y + 3z = 13 \end{cases}$$

seja possível. Para o valor encontrado de a, ache a solução geral do sistema, isto é, ache expressões que representem todas as soluções do sistema. Explicite duas dessas soluções.

3 (UF-MG, adaptado) Num cinema, ingressos são vendidos a R$ 10,00 para adultos e a R$ 5,00 para crianças. Num domingo, na sessão da tarde, o número de ingressos vendidos para crianças foi o dobro do número vendido para crianças na sessão da noite. A renda da sessão da tarde foi R$ 300,00 a menos que a da noite e, em ambas as sessões, foi vendido o mesmo número de ingressos. Nesse domingo, qual foi o número de ingressos vendidos para crianças, na sessão da noite?

4 (Mackenzie-SP) Qual é o menor valor positivo de α $(0 \leq \alpha < 360^\circ)$, para o qual o sistema $\begin{cases} (\text{sen } \alpha)x - y = 0 \\ x + (4 \cos \alpha)y = 0 \end{cases}$ tem mais de uma solução?



22

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1 ○ Introdução

Acompanhe os seguintes problemas:

- De quantas maneiras distintas cinco pessoas podem ser colocadas em fila indiana?
- De quantos modos diferentes pode ocorrer o resultado do sorteio dos números na Mega Sena?
- De quantas formas distintas cinco amigos podem ocupar os lugares de um automóvel se apenas dois deles sabem dirigir?

Problemas como esses são tratados pela *Análise Combinatória* — parte da Matemática que consiste em estudar *técnicas de contagem*.

2 ○ Princípio fundamental da contagem

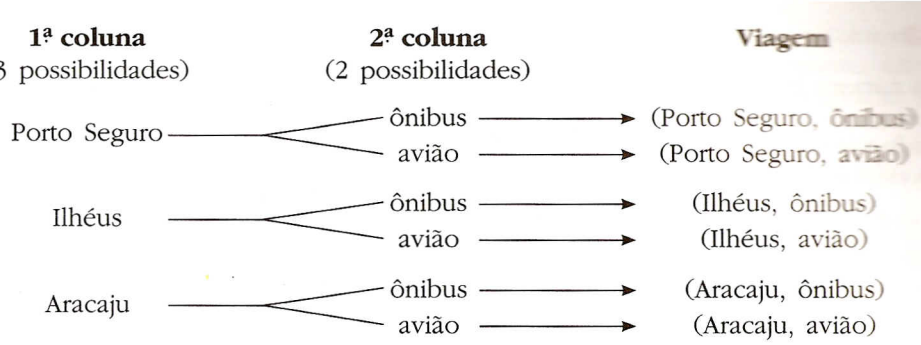
Os alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola de Salvador decidiram fazer uma viagem de confraternização. Uma comissão de alunos procurou uma agência de turismo, que ofereceu as seguintes opções de destino: Porto Seguro, Ilhéus e Aracaju. Os meios de transporte disponíveis eram ônibus e avião.

De quantos modos distintos poderá ser montada a viagem?

A escolha completa da viagem representa uma ação formada por duas etapas sucessivas:

1ª) escolha da cidade destino: há três opções para tal escolha;
2ª) escolha do meio de transporte que será utilizado: para cada uma das possibilidades anteriores, existem dois meios de transporte disponíveis.

A determinação de tais possibilidades pode ser esquematizada através de um diagrama, em que, na 1ª coluna, representamos as possibilidades de escolha da cidade destino e, na 2ª coluna, as possibilidades de escolha do meio de transporte. Acompanhe:



Esse esquema é conhecido como *diagrama de árvore*.

O número de maneiras de realizar a viagem é dado por $3 \times 2 = 6$.

Suponhamos que uma ação seja constituída de duas etapas sucessivas. A 1ª etapa pode ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a 2ª etapa pode ser realizada de m maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por $n \times m$.

Esse princípio, conhecido como princípio fundamental da contagem (PFC), pode ser generalizado para ações constituídas de mais de duas etapas sucessivas.

Exemplo 1

De sua casa ao trabalho, Silva pode ir a pé, de ônibus ou de metrô. Do trabalho à faculdade, ele pode ir de ônibus, metrô, trem ou pegar uma carona com um colega.

De quantos modos distintos Silva pode, no mesmo dia, ir de casa ao trabalho e de lá para a faculdade?

O trajeto completo representa uma ação formada por duas etapas sucessivas:

1ª) casa → trabalho: temos 3 possibilidades;

2ª) trabalho → faculdade: para cada uma das escolhas anteriores, há 4 opções de transporte.

Assim, pelo PFC, o resultado procurado é $3 \times 4 = 12$.

Exemplo 2

Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

Formar um número nessas condições pode ser considerado uma ação constituída de três etapas sucessivas, a saber:

1ª) escolha do algarismo das centenas: temos cinco possibilidades, pois, com exceção do zero, qualquer outro algarismo pode iniciar o número (lembre-se, por exemplo, de que o número 034 é, na verdade, o número 34);

2ª) escolha do algarismo das dezenas: temos cinco possibilidades, pois podemos incluir o zero, mas devemos excluir o algarismo já escolhido para a centena;

3ª) escolha do algarismo das unidades: temos quatro possibilidades, pois devemos escolher um algarismo diferente dos dois anteriores.

Pelo PFC, o resultado procurado é $5 \times 5 \times 4 = 100$ números.

Observação

Para simplificação da linguagem, usaremos a seguinte representação:

$$\underbrace{5}_{\substack{\uparrow \\ \text{número de maneiras de se efetuar a 1ª etapa}}} \quad \underbrace{5}_{\substack{\uparrow \\ \text{2ª etapa}}} \quad \underbrace{4}_{\substack{\uparrow \\ \text{3ª etapa}}} \quad \rightarrow \quad 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$$

Exemplo 3

Quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

Lembrando que um número é ímpar quando termina por algarismo ímpar, vamos começar o problema analisando o algarismo da unidade:

1ª) algarismo das unidades: há quatro possibilidades de escolha (1, 3, 5 ou 7);

2ª) algarismo das centenas: há seis possibilidades — devemos excluir o zero e o algarismo escolhido para as unidades;

3ª) algarismo das dezenas: há seis possibilidades — devemos escolher um algarismo diferente dos algarismos escolhidos para centena e unidade.

Assim, temos $\underbrace{6}\ \underbrace{6}\ \underbrace{4}$ $6 \times 6 \times 4 = 144$ números.

Exercícios

1 Do cardápio de um restaurante constam 8 tipos de salada e 5 tipos de grelhado. De quantas formas distintas um cliente pode fazer um pedido de uma salada acompanhada de um grelhado?

2 Uma prova é constituída de 12 testes do tipo verdadeiro ou falso. Quantas são as opções para resolver tal prova?

3

Intercontinental Press

(*O Estado de S. Paulo*, 16/10/2001.)

Na tira do *Recruta Zero*, de Mort Walker, suponha que cada um dos cinco soldados tenha uma carta para enviar a um dos três destinos destacados. De quantos modos distintos podem ser distribuídas essas cartas?

4 A senha de um cadeado é formada por uma seqüência de quatro letras, escolhidas entre as 26 do alfabeto.

a) Quantas senhas podemos formar?
b) Quantas senhas com quatro letras *distintas* podemos formar?
c) Quantas senhas começando por vogal podem ser formadas?
d) Quantas senhas de letras distintas podem ser formadas começando e terminando por vogal?

5 Com os algarismos 1, 2, 3, ..., 9 formam-se x números de quatro algarismos.

a) Determine x.
b) Quantos números pares podem ser formados?
c) Quantos números que começam por 7 e têm algarismos distintos podem ser formados?
d) Quantos números pares de quatro algarismos distintos podem ser formados?

6 Deseja-se formar números divisíveis por 5, compostos de quatro algarismos distintos. Qual é a quantidade de números existentes nessa condição?

Sugestão: analise dois casos: quando o número termina por zero e quando termina por 5.

7 Para ir ao trabalho, uma secretária procura sempre combinar blusa, saia e sapatos. Como ela não gosta de repetir as combinações, fez um levantamento nos armários e verificou que são possíveis 420 combinações diferentes. Se ela possui dez blusas, quantas saias e quantos pares de sapato ela pode ter, sabendo que, para cada item, há mais de uma peça?

8 Quantos números de três algarismos existem? Quantos deles são formados por algarismos distintos?

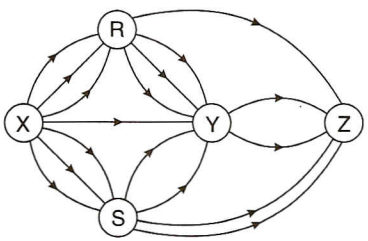
9 (PUC-PR, adaptado) Durante um exercício da Marinha de Guerra, empregaram-se sinais luminosos para transmitir palavras por meio de código Morse. Esse código só emprega dois sinais: ponto e traço. As palavras transmitidas tinham de um a seis sinais. Qual o número de palavras que podiam ser transmitidas?

10 (UF-CE) Atualmente, as placas dos veículos são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Considerando estas informações, calcule o número de placas distintas que podem ser fabricadas, iniciadas pelas letras HUI, nesta ordem, e cujo último algarismo seja ímpar.

11 Quantos números de três algarismos têm pelo menos dois algarismos repetidos?

12 Com os algarismos 1, 2, ..., 9 formam-se números de quatro algarismos distintos. Quantos são maiores que 4 326?

13 (UF-MG) Observe o diagrama.



Qual é o número de ligações distintas entre X e Z?

14 a) Determine o número de divisores positivos do número 8 400.
Sugestão: Faça a decomposição desse número em fatores primos.
b) O número $1\,125 \cdot 2^n$ apresenta 84 divisores positivos. Qual é o valor de n?

15 (UF-RJ) A mala do dr. Z tem um cadeado cujo segredo é uma combinação com cinco algarismos, cada um dos quais podendo variar de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação que escolhera como segredo, mas sabe que atende às condições:

- se o primeiro algarismo é ímpar, então o último algarismo também é ímpar;
- se o primeiro algarismo é par, então o último algarismo é igual ao primeiro;
- a soma dos segundo e terceiro algarismos é 5.

Quantas combinações diferentes atendem às condições estabelecidas pelo dr. Z?

16 Com os símbolos: △, □ e ○, deseja-se formar seqüências de cinco figuras geométricas, uma ao lado da outra.

a) De quantos modos distintos isso pode ser feito?
b) Se figuras vizinhas não podem ser iguais, quantas seqüências podem ser formadas?
c) Usando no máximo um círculo, quantas seqüências podem ser formadas?

3 ○ Fatorial de um número natural

Dado um número natural n, $n \geq 2$, o *fatorial de* ***n*** (indica-se por $n!$) é o produto dos n primeiros naturais positivos, escritos desde n até 1, isto é:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por exemplo:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \qquad 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Valem também as seguintes definições especiais:

$$0! = 1 \qquad \text{e} \qquad 1! = 1$$

Observação

À medida que n aumenta, o cálculo de $n!$ torna-se mais trabalhoso. Notemos, então, as seguintes simplificações:

- $5! = 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!} = 5 \cdot 4!$
- $8! = 8 \cdot 7 \cdot \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{6!} = 8 \cdot 7 \cdot 6!$ ou também

$$8! = 8 \cdot \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{7!} = 7! \cdot 8$$

Exemplo 4

Vamos simplificar $\frac{87!}{85!}$.

Desenvolvendo o fatorial do maior natural, "chegamos" ao fatorial do menor natural. Assim:

$$\frac{87!}{85!} = \frac{87 \cdot 86 \cdot \cancel{85!}}{\cancel{85!}} = 7\,482$$

Exemplo 5

Vamos encontrar o valor de n na equação: $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 12$.

Como $n - 1 > n - 3$, podemos escrever:

$$\frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = 12 \Rightarrow n^2 - 3n - 10 = 0 \Rightarrow n = 5 \text{ ou } n = -2 \text{ (não convém; verifique!)}$$

Exercícios

17 Calcule:

a) $5!$

b) $\frac{6!}{4!}$

c) $\frac{7!}{9!}$

d) $0! + 2!$

e) $2 \cdot 4!$

f) $\frac{10! + 9!}{9! + 8!}$

g) $5! - 3!$

h) $\frac{(4!)^2}{(3!)^2}$

18 Simplifique:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$

b) $\frac{(n-6)!}{(n-5)!}$

c) $\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+1)!}$

d) $\frac{(n!)^2}{(n+1)!\,(n-1)!}$

19 (UA-AM) Simplifique a expressão:

$$\frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!},\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1)$$

20 Resolva as seguintes equações:

a) $(n+3)! = 120$

b) $\frac{(2n)!}{(2n-2)!} = 6$

c) $n! = 12 \cdot (n-2)!$

d) $\frac{(n+2)! - (n+1)!}{n(n-1)!} = 25$

Agrupamentos

Todo problema de contagem pode, pelo menos teoricamente, ser resolvido pelo PFC.

Na prática, entretanto, a resolução de alguns desses problemas usando só o PFC pode-se tornar muito complicada.

Dessa forma, estudaremos técnicas de contagem de determinados *agrupamentos* — baseadas no PFC —, as quais simplificarão a resolução de muitos problemas.

Consideraremos, inicialmente, os agrupamentos (arranjos, permutações e combinações) *simples*, isto é, formados por elementos distintos.

4 ○ Arranjos

O Comitê Olímpico Brasileiro selecionou quatro cidades, São Paulo (SP), Rio de Janeiro (Rio), Porto Alegre (POA) e Belo Horizonte (BH), como candidatas a sede de dois eventos: os Jogos Pan-americanos e os Jogos Olímpicos. De quantos modos distintos o Comitê poderá lançar tais candidaturas se uma cidade só pode sediar um dos eventos?

Devemos escrever todas as seqüências *ordenadas* de duas cidades escolhidas entre as quatro, pois, por exemplo:

$$\underset{\text{Pan.}\ \ \text{Olimpíadas}}{(\text{SP},\ \text{Rio})} \neq \underset{\text{Pan.}\ \ \text{Olimpíadas}}{(\text{Rio},\ \text{SP})}$$

Temos:

Jogos Pan-americanos	Jogos Olímpicos
SP	Rio
SP	POA
SP	BH
Rio	SP
Rio	POA
Rio	BH
POA	SP
POA	Rio
POA	BH
BH	SP
BH	Rio
BH	POA

Cada maneira de apresentar as candidaturas é chamada de *arranjo* das quatro cidades tomadas duas a duas.

Observe na tabela que há 12 arranjos possíveis. Essa quantidade também poderia ser obtida usando o PFC:

$$\underset{\text{Pan.}}{4} \cdot \underset{\text{Olimpíada}}{3} = 12$$

De maneira mais formal temos a seguinte definição:

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se *arranjo dos* $\boldsymbol{n}$ *elementos*, tomados k a k, a qualquer *seqüência ordenada* de k elementos distintos escolhidos entre os n existentes.

Cálculo do número de arranjos

Seja um conjunto com n elementos distintos. Vamos encontrar uma expressão para o número de arranjos dos n elementos tomados k a k (indica-se por $A_{n,\,k}$).

Escrever um arranjo dos n elementos tomados k a k significa escrever uma seqüência ordenada de k elementos distintos ($k \leq n$), escolhidos entre os n disponíveis. Assim, pelo PFC, a ação pedida consta de k etapas sucessivas, que correspondem às escolhas dos k elementos.

1ª etapa	*2ª etapa*	*3ª etapa*	...	*k-ésima etapa*
(há n elementos para serem escolhidos)	(como os elementos devem ser distintos, há $n - 1$ possibilidades)			
n	$n - 1$	$n - 2$		$n - (k - 1)$

Dessa forma, o número total de arranjos dos n elementos tomados k a k é:

$$A_{n,\,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots (n - k + 1)$$

Multiplicando e dividindo a expressão acima por $(n - k)! = (n - k)(n - k - 1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, vem:

$$A_{n,\,k} = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - k + 1) \cdot \frac{(n - k)(n - k - 1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n - k)(n - k - 1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1},$$

isto é:

$$A_{n,\,k} = \frac{n!}{(n - k)!} \qquad n \geq k$$

Exemplo 6

Ao se cadastrar em um portal eletrônico de compras, o usuário deve criar uma senha formada por duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto) seguidas por dois algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas nessas condições?

A senha BG 18 é diferente da senha GB 81, isto é, *importa a ordem* em que as letras e os algarismos são escolhidos. Trata-se, portanto, de um *arranjo*.

- Para a escolha das letras, há $A_{26,\,2} = \frac{26!}{24!} = 650$ possibilidades.
- Para a escolha dos algarismos, temos $A_{10,\,2} = \frac{10!}{8!} = 90$ possibilidades.

Logo, pelo PFC, há ao todo $650 \cdot 90 = 58\,500$ senhas.

Poderíamos, alternativamente, fazer:

$$\underbrace{26 \cdot 25}_{\text{letras}} \quad \underbrace{10 \cdot 9}_{\text{algarismos}} = 58\,500$$

21 Calcule:

a) $A_{5,2}$ b) $A_{10,3}$ c) $A_{n,n-1}$

22 Numa pesquisa *on-line* pediu-se aos entrevistados que escolhessem dois dias da semana, em ordem de preferência, para a realização de um amistoso da seleção brasileira. Quantas respostas distintas podem ter sido obtidas?

23 Ao chegarem a um albergue da juventude, três irmãos dividiram um quarto com dois beliches. De quantos modos distintos eles podem definir a cama em que cada um irá dormir?

24 Num grêmio universitário, são realizadas eleições para definir três cargos: presidente, vice-presidente e tesoureiro. Oito jovens, entre eles Barbosa, candidatam-se a tais cargos.

a) De quantos modos distintos poderão ser escolhidos os ocupantes dos três cargos?
b) Quantos resultados apresentam Barbosa como presidente?
c) Em quantos resultados Barbosa *não* é tesoureiro?

25 Quinze seleções disputam o torneio olímpico de vôlei feminino, entre elas dois rivais históricos: Brasil e Cuba.

a) Quantos são os resultados possíveis para a distribuição das medalhas de ouro, prata e bronze?
b) Em quantos resultados o Brasil recebe medalha, mas Cuba não?
c) Em quantas premiações pelo menos uma dessas equipes recebe medalha, com o Brasil na frente de Cuba?

26 Resolva as seguintes equações:

a) $A_{n,2} = 30$ b) $A_{n+1,n-1} = 60$

27 Um casal, procurando um nome para o filho que nasceria em dois meses, relacionou cem nomes em uma lista. Quantas são as possibilidades, se o casal pode escolher entre um só nome ou um nome composto (2 nomes)?

28 (FGV-SP) Suponha que uma senha (*password*) utilizada numa rede de computadores seja constituída de 5 letras, escolhidas entre as 26 do alfabeto latino, sendo permitida a repetição de letras.

a) Quantas senhas diferentes podem ser construídas?
b) Quantas senhas podem ser construídas com uma letra comparecendo pelo menos duas vezes?

(Observação: não é necessário efetuar os cálculos, basta deixá-los indicados.)

29 Desconfiada de um esquema de "cola", uma professora mantém sempre um grupo de cinco alunos em uma certa fileira, mas nunca na mesma ordem. Quantas provas poderiam ser aplicadas sem que se repetisse uma determinada disposição?

30 Numa dinâmica de grupo, uma psicóloga de RH (Recursos Humanos) relaciona de todas as formas possíveis dois participantes: ao primeiro faz a pergunta e ao segundo pede que comente a resposta do colega. Admita que a psicóloga não fará a mesma pergunta mais de uma vez.

a) Se 10 candidatos participam da dinâmica, qual é o número de perguntas feitas pela psicóloga?
b) Qual é o número mínimo de candidatos que obriga a psicóloga a ter mais de 250 questões para realizar a dinâmica?

5 ○ Permutações

Vamos escrever todos os anagramas da palavra PAZ.

Um *anagrama* de uma palavra é obtido quando *trocamos a ordem* de suas letras, sem repeti-las, de modo que se forme uma nova seqüência de letras, com ou sem sentido. Temos:

PAZ, PZA, ZAP, ZPA, AZP, APZ

Cada anagrama obtido corresponde a uma *permutação* das letras *P*, *A* e *Z*.

Observe que a permutação é um caso particular do arranjo, pois das *três* letras disponíveis, *P*, *A*, *Z*, escolhemos exatamente *três* para formar uma seqüência ordenada (anagrama).

De maneira mais formal, segue a definição:

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se *permutação dos* ***n*** *elementos* todo arranjo desses n elementos tomados n a n.

O número total de permutações de n elementos, indicado por P_n, é dado por:

$$P_n = A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Assim, $P_3 = 3! = 6$, $P_4 = 4! = 24$, $P_7 = 7! = 5\,040$, etc.

Exemplo 7

Um grupo de 6 alunos (*A, B, C, D, E, F*) deverá apresentar um seminário de História em que cada um terá que explicar uma parte do assunto.

Em relação à ordem de apresentação, vamos responder às seguintes perguntas:

1ª) Como poderá ser definida a ordem, se o aluno *C* deve iniciar e o aluno *E* deve finalizar a apresentação?
Definidos os alunos que abrirão e encerrarão o seminário, os demais quatro poderão apresentar-se em qualquer ordem, totalizando $P_4 = 4! = 24$ possibilidades.

2ª) Como poderá ser definida a ordem, se os alunos *A* e *B* devem apresentar-se um em seguida do outro?
A fim de que possam se apresentar *consecutivamente*, vamos considerar *A* e *B* "uma só pessoa", que irá permutar com as quatro restantes (*C, D, E, F*), num total de $P_5 = 5! = 120$ maneiras. Porém, para cada uma dessas possibilidades, os alunos *A* e *B* podem trocar de lugar entre si, num total de $P_2 = 2! = 2$ maneiras.
Assim, o número de situações em que *A* e *B* aparecem sucessivamente é $120 \times 2 = 240$.

Exercícios

31 Calcule:

a) P_6 b) $\frac{P_5}{P_3}$ c) $\frac{P_n}{P_{n-2}}$ d) $P_3 + P_4$

32 Resolva as seguintes equações:

a) $P_n = 120$ b) $\frac{P_n + P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{8}$

33 Considere os anagramas formados a partir de JANEIRO.

a) Quantos são?
b) Quantos começam por J?
c) Quantos começam e terminam por vogal?
d) Quantos começam por vogal e terminam por consoante?
e) Quantos apresentam as letras J, A, N juntas?
f) Quantos apresentam a letra N antes da letra R?

34 (FGV-SP) Um processo industrial deve passar pelas etapas *A, B, C, D* e *E*.

a) Quantas seqüências de etapas podem ser delineadas se *A* e *B* devem ficar juntas no início do processo e *A* deve anteceder *B*?
b) Quantas seqüências de etapas podem ser delineadas se *A* e *B* devem ficar juntas, em qualquer ordem, e não necessariamente no início do processo?

35 (UF-AL) Aline e Cláudia fazem parte de um grupo de 6 pessoas que devem ocupar 6 cadeiras enfileiradas. Se as duas não podem ocupar simultaneamente as cadeiras das extremidades, de quantos modos podem ser acomodadas essas 6 pessoas?

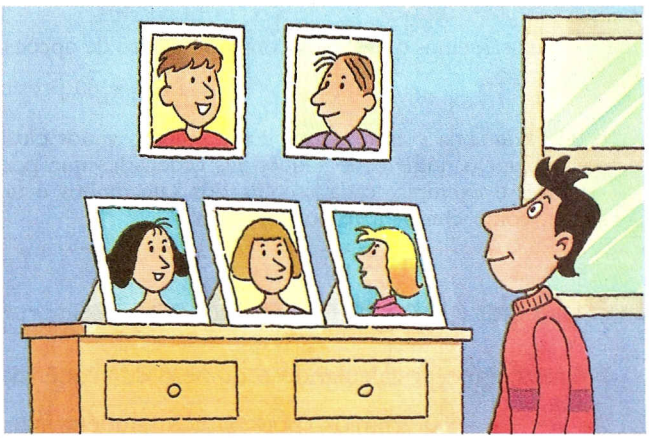
36 Um indivíduo esqueceu a senha de seu cartão bancário. Sabia que havia utilizado, sem repetição, todos os algarismos de sua data de nascimento — vinte e cinco de agosto de mil novecentos e setenta e três — e recordava-se de que os algarismos 2 e 5 estavam juntos. Se em um dia ele consegue testar 144 senhas, em quanto tempo, no máximo, ele terá acesso à conta?

37 Em quantos anagramas da palavra NORTE as vogais não aparecem lado a lado?

38 Antes de iniciar a decisão do Campeonato Brasileiro de Vôlei, seis atletas, dois preparadores físicos e três dirigentes de uma equipe posaram para uma foto, lado a lado. De quantos modos distintos esses profissionais podem aparecer, supondo que as pessoas de mesma função devam ficar juntas?

39 (Unifor-CE) A montanha-russa de um parque de diversões é composta de três carros, cada um com 4 bancos de 2 lugares. De quantos modos podem se acomodar 4 casais em um mesmo carro, de modo que cada casal ocupe o mesmo banco?

40 Suponha que Fábio tenha uma foto de cada uma de suas 3 ex-mulheres, uma foto de seu irmão, uma foto de um amigo, uma foto de um ídolo de *rock* e uma foto do jogador de futebol favorito. De quantos modos distintos ele poderá dispor tais fotos em 5 porta-retratos (3 sobre o aparador e 2 na parede), se deseja que as fotos das ex-mulheres apareçam juntas sobre o aparador?



41 Considere todos os números que podem ser obtidos permutando os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9. Colocando-os em ordem crescente, que lugar ocupa o número 78 659?

42

Intercontinental Press

(*O Estado de S.Paulo*, 15/11/2001.)

Nessa tira de Mort Walker, sempre que o Recruta Zero está com bolha no pé, os cinco recrutas (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*) se dividem na "missão" de carregá-lo respeitando as seguintes regras:

1ª) O Recruta Zero ficará "apoiado" nas cabeças dos três companheiros que ficarem no meio da fila.
2ª) Os recrutas *A* e *B* só carregarão o Recruta Zero se forem juntos e um atrás do outro.

Nessas condições, de quantos modos a fila poderá ser formada?

6 ○ Combinações

Para organizar um coquetel de lançamento de um produto, o departamento de eventos de uma empresa terá de escolher três entre cinco salgadinhos que um bufê oferece: coxinha (C), empadinha (E), rissole (R), quibe (Q) e minibauru (B).

Como poderão ser escolhidos os três salgadinhos que serão oferecidos no coquetel?

Escolher, por exemplo, {coxinha, quibe, rissole} é o mesmo que escolher {rissole, coxinha, quibe}, pois em qualquer caso esses três serão os salgadinhos oferecidos, *não* importando a ordem de escolha.

Acompanhe então as dez opções para escolher os três salgadinhos:

$$\{C, E, R\},\ \{C, E, Q\},\ \{C, E, B\},\ \{C, R, Q\},\ \{C, R, B\},$$
$$\{C, Q, B\},\ \{E, R, Q\},\ \{E, R, B\},\ \{E, Q, B\},\ \{R, Q, B\}$$

Cada escolha acima corresponde a um *subconjunto* de três elementos. Passaremos a designá-los *combinação* dos 5 salgadinhos tomados 3 a 3.

Observação

Se usássemos o PFC para contar o número de opções para a escolha dos salgadinhos, obteríamos:

$$\underbrace{5} \cdot \underbrace{4} \cdot \underbrace{3} = 60 \text{ possibilidades}$$

o que *não* seria correto. A explicação, como vimos em arranjos e permutações, é que o PFC serve para contar o número de seqüências ordenadas que podem ser formadas.

Nesse exemplo, cada escolha dos salgadinhos é um agrupamento *não* ordenado. Veremos, a seguir, como chegar à resposta correta.

Cálculo do número de combinações

Vamos começar calculando o número de seqüências *ordenadas* de salgadinhos. Como vimos, há $A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 60$ arranjos (poderíamos também fazer: $\underbrace{5} \cdot \underbrace{4} \cdot \underbrace{3} = 60$).

Essas 60 possibilidades incluem, entre outras:

$$(C, Q, R),\ (C, R, Q),\ (R, C, Q),\ (R, Q, C),\ (Q, C, R),\ (Q, R, C)$$

Em cada um desses casos — que diferem entre si apenas pela ordem dos elementos escolhidos —, os salgadinhos servidos serão coxinha, quibe e rissole. Assim, esses seis arranjos são "equivalentes entre si", correspondendo a uma única combinação {C, Q, R}.

Estabelecemos, assim, a seguinte proporção:

$$\begin{cases} 6 \text{ arranjos} & — \ 1 \text{ combinação} \\ 60 \text{ arranjos} & — \ x \end{cases}$$

donde

$$x = \frac{60}{6}$$

60 ← número de arranjos dos 10 salgadinhos tomados três a três

6 ← número de permutações entre coxinha, quibe e rissole

isto é, $x = 10$ combinações.

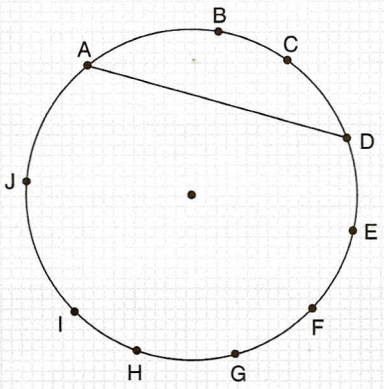
De modo geral, qualquer permutação de uma determinada seqüência ordenada dá origem a uma única combinação.

Genericamente, o número de combinações de n elementos distintos, tomados k a k, que se indica por $C_{n,\,k}$, é dado por:

$$C_{n,\,k} = \frac{A_{n,\,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,,\ n \geqslant k$$

Exemplo 8

Considerando dez pontos sobre uma circunferência, quantas cordas podem ser construídas com extremidades em dois desses pontos?



Uma corda fica determinada ao escolhermos dois pontos entre os dez disponíveis.

Escolher, por exemplo, (A, D) é o mesmo que escolher (D, A), pois esses pontos determinam, em qualquer caso, o segmento $\overline{AD}$.

Cada corda construída corresponde, então, a uma combinação dos dez pontos tomados dois a dois, totalizando $C_{10,\,2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} = 45$ cordas.

Exemplo 9

Num acampamento, o monitor deve montar uma equipe de quatro jovens para improvisar uma ponte que possibilite a travessia de um riacho.

Se há 8 rapazes e 6 moças, quantas equipes de dois rapazes e duas moças podem ser formadas?

- O número de maneiras de escolher os rapazes é $C_{8,\,2} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$.
- A escolha das moças pode ser feita de $C_{6,\,2} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$ modos.

Pelo PFC, a equipe poderá ser formada de $28 \times 15 = 420$ maneiras distintas.

Quantas equipes de quatro jovens têm pelo menos um rapaz?

- O número de equipes de quatro jovens que podem ser formadas sem nenhuma restrição é $C_{14,\,4} = \frac{14!}{10!\,4!} = 1\,001$.
- Dessas 1 001 equipes, existem $C_{6,\,4} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$ que apresentam *apenas moças* em sua composição.

Assim, a diferença $1\,001 - 15 = 986$ fornece a quantidade de equipes formadas com *pelo menos um rapaz*.

Exercícios

43 Calcule:

a) $C_{8,\,5}$ b) $C_{10,\,3}$ c) $C_{n,\,n-2}$

44 (UF-BA) Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maçã, mamão e melão, calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco, usando-se três frutas distintas.

45 Um professor forneceu a seus alunos uma lista com doze exercícios. Se ele pretende montar uma prova com quatro questões extraídas da lista, de quantos modos distintos poderá proceder?

46 De um baralho de 52 cartas extraímos quatro simultaneamente.

a) Quantas são as possibilidades de sorteio das cartas?
b) Quantos resultados apresentam, entre as cartas sorteadas, o rei de espada?
c) Quantos resultados apresentam exatamente dois ases?

47 (Vunesp-SP) Uma grande firma oferecerá aos seus funcionários 10 minicursos diferentes, dos quais só 4 serão de informática. Para obter um certificado de participação, o funcionário deverá cursar 4 minicursos diferentes, sendo que exatamente 2 deles deverão ser de informática. Determine de quantas maneiras distintas um funcionário terá a liberdade de escolher:

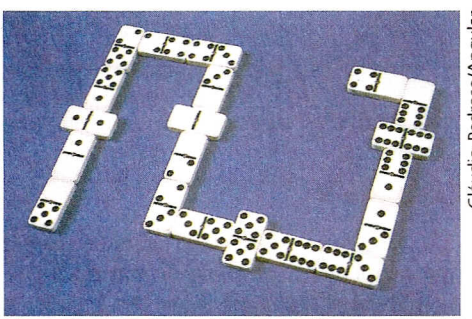
a) os minicursos que *não* são de informática;
b) os 4 minicursos, de modo a obter um certificado.

48 (FGV-SP) O administrador de um fundo dispõe de ações de 10 empresas para compra, entre elas as da empresa *R* e as da empresa *S*.

a) De quantas maneiras ele poderá escolher 7 empresas, entre as 10?
b) Se entre as 7 empresas escolhidas devem figurar obrigatoriamente as empresas *R* e *S*, de quantas formas ele poderá escolher as empresas?

49 Responda:

a) Qual é o número de peças de um jogo de dominó comum (números de 0 a 6)?
b) Qual seria o número de peças de um jogo de dominó especial cujos números fossem de 0 a 8?



Cláudio Pedroso/Angular

50 (UCDB-MS) Uma mulher possui 10 pares de sapatos, todos diferentes. De quantas formas ela pode selecionar 2 sapatos, sem que eles sejam do mesmo par?

51 (UF-RJ) Uma agência de turismo está fazendo uma pesquisa entre seus clientes para montar um pacote de viagens à Europa e pede aos interessados que preencham o formulário abaixo com as seguintes informações:

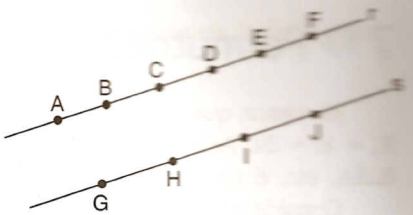
- a ordem de preferência entre as 3 companhias aéreas com que trabalha a agência;
- a 1ª e a 2ª opções dentre 4 possíveis datas de partida apresentadas pela agência;
- os nomes de 4 cidades diferentes a serem visitadas, que devem ser escolhidas de uma lista de 10 fornecida pela agência (sem ordem de preferência).

Preencher todos os campos, sem repetição.

Companhias aéreas	Datas	Cidades (ordem indiferente)
1ª	1ª opção	
2ª		
	2ª opção	
3ª		

Supondo que nenhum campo seja deixado em branco, determine de quantas maneiras diferentes pode o formulário ser corretamente preenchido.

52 Na figura, r // s.



a) Quantos triângulos podem ser construídos com vértices em três quaisquer desses pontos?

b) Quantos quadriláteros podem ser construídos com vértices em quatro quaisquer desses pontos?

53 Na Mega Sena, são sorteados 6 números entre os 60 primeiros naturais (não nulos): 1, 2, ..., 60.

a) De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio?
b) Quantos resultados apresentam 4 números pares e 2 ímpares?
c) Quantos resultados apresentam pelo menos um número ímpar?

54 Considere seis pontos não colineares três a três em um plano e um ponto não pertencente a ele. Quantas pirâmides de base triangular podem ser formadas tendo os quatro vértices nesses pontos?

55 Tomamos seis pontos sobre uma circunferência. Qual é o número de polígonos que podem ser formados com vértices nesses pontos?

56 Uma pessoa maníaca por *shopping center*, ao chegar a uma metrópole, programou que nos finais de semana iria passear em dois *shoppings* distintos.

a) Se há nessa metrópole trinta e dois *shoppings*, quantos anos serão necessários para que ela visite todas as combinações de *shoppings* possíveis sem repeti-las?
b) Quantos *shoppings*, no máximo, poderia haver nessa cidade de modo que o total de possibilidades se esgotasse nos 52 finais de semana do ano?

57

Caco Galhardo/Folha Imagem

(*Folha de S.Paulo*, 7/11/2001.)

Suponha que um professor possa responder a questão apresentada na tira de *Os pescoçudos* assinalando exatamente uma ou no máximo duas alternativas. De quantos modos distintos essa questão poderá ser respondida?

58 Resolva as seguintes equações:

a) $\frac{C_{n,3}}{A_{n,2}} = \frac{1}{3}$ b) $C_{n+1,2} = 15$ c) $C_{n+1,n-1} = 45$

59 Tina pretende prestar vestibular para quatro faculdades de medicina. Ela selecionou quatro faculdades na capital e cinco no interior. De quantas formas poderá escolher as quatro de modo que:

a) duas sejam da capital e duas sejam do interior?
b) não mais que duas faculdades escolhidas sejam do interior?

60 (UF-RJ) Em todos os 53 finais de semana de um certo ano, Júlia irá convidar duas de suas amigas para sua casa em Teresópolis, sendo que nunca o mesmo par de amigas se repetirá durante o ano.

a) Determine o maior número possível de amigas que Júlia poderá convidar.
b) Determine o menor número possível de amigas que ela poderá convidar.

7 ○ Permutação com elementos repetidos

Já vimos que o número de permutação de 4 elementos *distintos*, por exemplo, é dado por $P_4 = 4! = 24$. Assim, o número de anagramas que podem ser formados a partir de GATO, CAFÉ, ILHA, etc. é igual a 24.

Consideremos agora a palavra CASA. Ao montarmos seus anagramas (faça isso), percebemos que são apenas 12. Tal diminuição deve-se ao fato de que a letra *A* aparece repetida. De fato, dado um anagrama qualquer de CASA, ao mantermos fixas as posições de *C* e de *S* e permutarmos as duas letras *A*, obteremos a mesma seqüência:

SACA ↔ SACA
↑ ↑
troca

Nosso objetivo é descobrir uma maneira de contar tais permutações.

Considere os seguintes casos:

1º) *Apenas um elemento se repete*

Seja a palavra PARAÍBA; vamos determinar seu número de anagramas.

Vamos escolher, de início, as posições que as letras *P, R, I, B* podem ocupar no anagrama. Trata-se de escolher 4 entre 7 lacunas (ao todo são 7 letras). Isso pode ser feito de $C_{7,4} = 35$ maneiras.

Para fixar idéias, acompanhe o esquema, em que é apresentada *uma* possível escolha de lugares:

	P		R		B	I

(É claro que nas posições vazias devem figurar as letras *A*.)

Para a escolha acima (2º, 4º, 6º e 7º lugares), as letras *P, R, B, I* podem ser permutadas entre si, num total de $P_4 = 4! = 24$ maneiras.

Os raciocínios anteriores sugerem que o número de anagramas que podem ser formados é dado por:

$$C_{7,4} \cdot P_4 = \frac{7!}{\cancel{4!}\ 3!} \cdot \cancel{4!} = \frac{7!}{3!}$$

← 7 é o número total de letras
← 3 é o número de vezes que a letra *A* aparece

Indicaremos esse número por $\overset{(3)}{P}_7$.

Exemplo 10

Quantos são os anagramas da palavra ATRASADO?

São 8 letras ao todo e a letra *A* aparece 3 vezes.

Temos, então:

$$\overset{(3)}{P}_8 = \frac{8!}{3!} = 6\,720 \text{ anagramas}$$

2º) *Dois elementos diferentes se repetem*

Vamos considerar os anagramas obtidos a partir de PASSARELA.

Observe que ao todo são 9 letras, com 3 repetições da letra *A* e 2 repetições da letra *S*.

Inicialmente, escolhemos as posições que as letras *distintas* de *A* podem ocupar no anagrama. Há $C_{9,6} = 84$ possibilidades, pois devemos escolher 6 entre 9 lugares. Por exemplo:

L	S		E	P		S		R

(As 3 letras *A* entram nas posições vazias.)

Para tal opção de lugares (1º, 2º, 4º, 5º, 7º e 9º), podemos permutar as letras *L, S, E, P, S, R* entre si. Pelo 1º caso, o número de possibilidades é $\overset{(2)}{P}_6 = \frac{6!}{2!} = 360$, pois são 6 letras, das quais 2 são iguais a *S*.

Assim, o raciocínio desenvolvido mostra que o número de permutações possíveis é dado por:

$$C_{9,6} \cdot {}^{(2)}P_6 = \frac{9!}{\cancel{6!}\,3!} \cdot \frac{\cancel{6!}}{2!} = \frac{9!}{3!\,2!}$$

9 é o número total de letras
2 é o número de letras S
3 é o número de letras A

Indicaremos esse número por ${}^{(3,2)}P_9$.

Caso geral

De modo geral, se temos n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 (a_1 representa, por exemplo, uma letra), n_2 são iguais a a_2 (a_2 representa outra letra), n_3 são iguais a a_3, ..., n_r são iguais a a_r, o número de permutações possíveis é dado por:

$${}^{(n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_r)}P_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Exemplo 11

Vamos calcular o número de anagramas de:

- RESSACA: há 7 letras, das quais duas são iguais a S e duas são iguais a A.

  Temos, então, ${}^{(2,2)}P_7 = \frac{7!}{2!\,2!} = 1\,260$ anagramas.

- TERRITÓRIO: há 10 letras, das quais duas são iguais a T, três são iguais a R, duas iguais a O e duas iguais a I.

  Temos, então, ${}^{(2,3,2,2)}P_{10} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!\,2!} = 75\,600$ anagramas.

Exercícios

61 Determine o número de anagramas formados a partir de:

a) MALA
b) CORRER
c) BANANA
d) ASSISTENTE
e) IRRIGAR
f) COCO

62 Uma moeda é lançada 5 vezes. De quantos modos distintos podem ser obtidas 2 caras e 3 coroas?

63 Uma prova contém 10 testes que devem ser respondidos com V ou F. De quantos modos distintos ela pode ser resolvida assinalando-se 3 testes com V e 7 com F?

64 Considere os anagramas formados a partir de CORREDOR.
Responda:

a) Quantos são?
b) Quantos começam por R?
c) Quantos começam por COR?
d) Quantos começam e terminam por R?

65 a) Calcule o número de anagramas obtidos a partir de ARARA.
b) Conclua que, quando uma palavra de n letras é formada exclusivamente por 2 letras que se repetem n_1 vezes e n_2 vezes ($n_1 + n_2 = n$), as fórmulas de permutação e combinação se equivalem.

Testes de vestibulares

1 (UF-CE) Assinale a alternativa na qual consta a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9, e que são maiores que 200 e menores que 800.

a) 30
b) 36
c) 42
d) 48
e) 54

2 (UF-AL) Quantos números pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto A = {0, 1, 2, 3, 4}?

a) 60
b) 48
c) 36
d) 24
e) 18

3 (UMC-SP) O diretor de um pronto-socorro dispõe de 5 médicos, 4 enfermeiros e 4 atendentes para escalar uma equipe de plantão. A equipe é formada por 3 médicos, 2 enfermeiros e 1 atendente. O número de equipes diferentes que o diretor poderá formar é de:

a) 24
b) 72
c) 80
d) 120
e) 240

4 (Unisinos-RS) No vestibular de inverno da Unisinos, João conheceu Maria, que lhe informou seu telefone. João não anotou o número, mas sabe que Maria mora em São Leopoldo e que este número começa por 59. Lembra ainda que o 3º algarismo é 1 ou 2 e os outros quatro algarismos são 0, 3, 6, 8, mas não sabe sua ordem. As possibilidades de João descobrir o telefone de Maria são:

a) 4
b) 12
c) 20
d) 24
e) 48

5 (PUC-RS) Suponha que no Brasil existam n jogadores de vôlei de praia. O número de duplas que podemos formar com esses jogadores é:

a) $\frac{n}{2}$
b) $\frac{n^2 + 2n}{2}$
c) $\frac{n^2 - 2n}{4}$
d) $\frac{n^2 + n}{2}$
e) $\frac{n^2 - n}{2}$

6 (U. F. Juiz de Fora-MG) Cinco amigos vão viajar utilizando um carro com cinco lugares. Sabendo-se que apenas dois deles podem dirigir, o número de maneiras que os cinco amigos podem se acomodar para a viagem é:

a) 12 b) 24 c) 48 d) 120

7 (PUC-RJ) De um pelotão com 10 soldados, quantas equipes de cinco soldados podem ser formadas se em cada equipe um soldado é destacado como líder?

a) 1 260
b) 1 444
c) 1 520
d) 1 840
e) 1 936

8 (Uneb-BA) Três prêmios iguais vão ser sorteados entre as 45 pessoas presentes a uma festa. Se, desse total, 18 são homens e as restantes são mulheres, de quantas formas diferentes pode ser feita essa distribuição, de forma que entre os premiados exatamente dois sejam do mesmo sexo?

a) 10 449
b) 8 937
c) 7 575
d) 6 318
e) 4 131

9 (Unifor-CE) Pretende-se selecionar 4 pessoas, de um grupo constituído de 3 professores e 5 alunos, para tirar uma fotografia. Se pelo menos 1 dos professores deve aparecer na foto, de quantos modos poderá ser feita a seleção?

a) 1 680
b) 1 560
c) 330
d) 70
e) 65

10 (PUC-RS) Se $\frac{(n-1)!}{(n+1)! - n!} = \frac{1}{81}$, então n é igual a:

a) 13
b) 11
c) 9
d) 8
e) 6

11 (Uneb-BA) Uma senhora idosa foi retirar dinheiro em um caixa automático, mas se esqueceu da senha. Lembrava que não havia o algarismo 0, que o primeiro algarismo era 8, o segundo era par, o terceiro era menor que 5 e o quarto e último era ímpar. Qual o maior número de tentativas que ela pode fazer, no intuito de acertar a senha?

a) 13
b) 60
c) 75
d) 78
e) 80

12 (U. F. Ouro Preto-MG) Considere duas retas paralelas r e s. Marcam-se 6 pontos sobre r e 2 pontos sobre s. O número de triângulos obtidos, unindo-se 3 quaisquer desses pontos, é:

a) 15
b) 21
c) 30
d) 36
e) 56

13 (UFF-RJ) Com as letras da palavra PROVA podem ser escritos x anagramas que começam por vogal e y anagramas que começam e terminam por consoante. Os valores de x e y são, respectivamente:

a) 48 e 36
b) 48 e 72
c) 72 e 36
d) 24 e 36
e) 72 e 24

14 (PUC-RJ) Um polígono regular de n lados tem 90 diagonais. O valor de n é:

a) 10
b) 12
c) 15
d) 20
e) 21

15 (U. F. São Carlos-SP) A câmara municipal de um determinado município tem exatamente 20 vereadores, sendo que 12 deles apóiam o prefeito e os outros são contra. O número de maneiras diferentes de se formar uma comissão contendo exatamente 4 vereadores situacionistas e 3 oposicionistas é:

a) 27 720
b) 13 860
c) 551
d) 495
e) 56

16 (Mackenzie-SP) Numa empresa existem 10 diretores, dos quais 6 estão sob suspeita de corrupção. Para que se analisem as suspeitas, será formada uma comissão especial com 5 diretores, na qual os suspeitos não sejam maioria. O número de possíveis comissões é:

a) 66
b) 72
c) 90
d) 120
e) 124

17 (U. F. Juiz de Fora-MG) Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é:

a) 288
b) 296
c) 864
d) 1 728

18 (Unifesp-SP) Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores.

De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas?

a) 64
b) 126
c) 252
d) 640
e) 1 260

19 (UFF-RJ) O produto $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ é equivalente a:

a) $\frac{20!}{2}$
b) $2 \cdot 10!$
c) $\frac{20!}{2^{10}}$
d) $2^{10} \cdot 10!$
e) $\frac{20!}{10!}$

20 (PUC-SP) Buscando melhorar o desempenho de seu time, o técnico de uma seleção de futebol decidiu inovar: convocou apenas 15 jogadores, 2 dos quais só jogam no gol e os demais atuam em quaisquer posições, inclusive no gol. De quantos modos ele pode selecionar os 11 jogadores que irão compor o time titular?

a) 450
b) 480
c) 550
d) 580
e) 650

21 (U. F. Uberlândia-MG) De quantas maneiras três mães e seus respectivos três filhos podem ocupar uma fila com seis cadeiras, de modo que cada mãe sente junto de seu filho?

a) 6
b) 18
c) 12
d) 36
e) 48

22 (PUC-SP) No saguão de um teatro, há um lustre com 10 lâmpadas, todas de cores distintas entre si. Como medida de economia de energia elétrica, o gerente desse teatro estabeleceu que só deveriam ser acesas, simultaneamente, de 4 a 7 lâmpadas, de acordo com a necessidade. Nessas condições, de quantos modos distintos podem ser acesas as lâmpadas desse lustre?

a) 664
b) 792
c) 852
d) 912
e) 1 044

23 (Fuvest-SP) Considere todas as trinta e duas seqüências, com cinco elementos cada uma, que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1. Quantas dessas seqüências possuem *pelo menos* três zeros em posições consecutivas?

a) 3
b) 5
c) 8
d) 12
e) 16

24 (Fuvest-SP) Com as 6 letras da palavra FUVEST podem ser formadas 6! = 720 "palavras" (anagramas) de 6 letras distintas cada uma. Se essas "palavras" forem colocadas em ordem alfabética, como num dicionário, a 250ª "palavra" começa com:

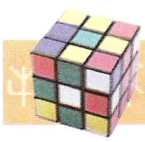
a) EV
b) FU
c) FV
d) SE
e) SF

25 (UCDB-MT) O número de permutações das letras da palavra AMIGA nas quais não aparece o grupo AA é:

a) 36
b) 24
c) 60
d) 120
e) 54

26 (UF-PE) Suponha que existam 20 diferentes tipos de aminoácidos. Qual dos valores abaixo mais se aproxima do número de agrupamentos ordenados, formados de 200 aminoácidos, que podem ser obtidos? Dado: Use a aproximação: $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$.

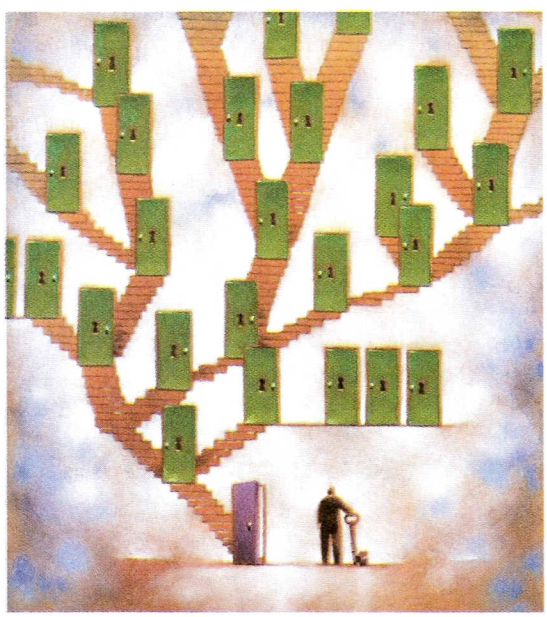
a) 10^{220}
b) 10^{230}
c) 10^{240}
d) 10^{250}
e) 10^{260}



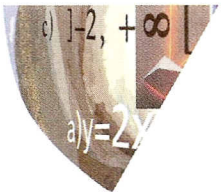
Desafios

1 Quantos múltiplos de 3, compostos de três algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 7?

2 (Unirio-RJ) Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que podem ser compradas de zero a 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes esta compra pode ser feita?

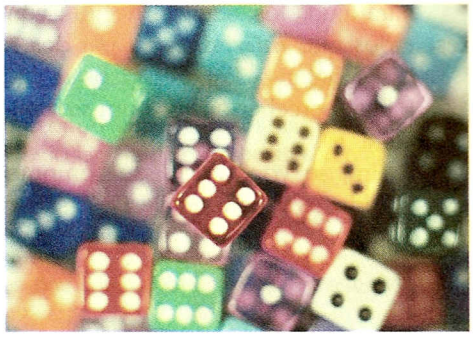


Paul Anderson/Stock Photos



23 PROBABILIDADE

1 ○ Introdução


Getty Images

Considere os seguintes problemas:

- Fazendo a aposta mínima na Mega Sena, qual é a chance de acertar as seis dezenas?
- Se um aluno "chutar" cinco testes (cada um com quatro alternativas) em um exame vestibular, qual é a probabilidade de acertar pelo menos dois?
- Lançando dois dados simultaneamente, qual é a probabilidade de saírem números iguais?

Passaremos a estudar a teoria das probabilidades, que nos ajudará a resolver problemas como esses e muitos outros.

2 ○ Experimento aleatório

Quando lançamos um dado, não é possível saber que resultado irá ocorrer: esse experimento pode apresentar 6 possibilidades distintas.

Da mesma maneira, quando escolhemos ao acaso uma carta de baralho, não é possível saber de que valor e naipe será a carta escolhida.

Experimentos como esses recebem o nome de *experimentos aleatórios*, pois, repetidos em condições idênticas, apresentam diferentes resultados. Tal variabilidade deve-se ao acaso.

3 ○ Espaço amostral

Consideremos um experimento aleatório. O conjunto de todos os possíveis resultados desse experimento é chamado *espaço amostral* e é indicado por Ω (letra grega que se lê "ômega").

Indicaremos o número de elementos de um espaço amostral por $n(\Omega)$.

Exemplo 1

Lançamos uma moeda honesta e observamos a face voltada para cima.

Temos:

$$\Omega = \{K, C\},$$

em que K: cara e C: coroa; $n(\Omega) = 2$.

Chamaremos cada um dos dois resultados possíveis de *ponto amostral*.

Exemplo 2

Ao lançarmos um dado perfeito, a face voltada para cima pode mostrar um número qualquer de 1 a 6. Assim:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};\ n(\Omega) = 6$$

Cada um dos elementos de Ω é um ponto amostral.

4 ○ Evento

Dois irmãos resolveram rifar uma bicicleta que tinham em casa. A rifa constava de 40 cupons, numerados de 1 a 40.

O resultado do sorteio da rifa é um experimento aleatório cujo espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 39, 40\}$.

Para ajudá-los, seu pai decidiu comprar todos os *múltiplos de 6* disponíveis. O conjunto dos resultados que *interessam* ao pai dos rapazes é $P = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$.

Esse conjunto P expressa os resultados *favoráveis* ao palpite do pai.

É fácil perceber que P é um *subconjunto* de Ω. Vamos denominá-lo *evento* de Ω (representado pela letra E).

Assim, se você decidisse comprar apenas os números com dois algarismos iguais, estaria construindo *outro evento* de Ω, a saber: $E = \{11, 22, 33\}$.

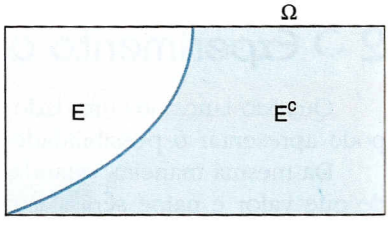
Observações

1ª) Quando $E = \Omega$, o evento é dito *evento certo*.

2ª) Quando $E = \varnothing$, o evento recebe o nome de *evento impossível*.

Evento complementar

Consideremos um evento E relativo a um espaço amostral Ω. Chamamos *evento complementar de E* — indicado por E^c — ao evento que ocorre quando E não ocorre. Observe o diagrama ao lado.



Notemos que $E \cap E^c = \varnothing$ e $E \cup E^c = \Omega$.

Exemplo 3

Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retira-se, ao acaso, uma bola dessa urna. Se E é o evento "ocorre múltiplo de 3", vamos determinar E^c:

Temos:

$$\Omega = \{1, 2, 3, ..., 10\} \text{ e } E = \{3, 6, 9\}$$

Assim, $E^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ e representa o evento "não ocorre múltiplo de 3".

Notemos que $E \cup E^c = \Omega$.

Exercícios

1 Numa caixa há bombons de chocolate, cereja, café, laranja e menta. Um homem escolhe, aleatoriamente, um bombom. Qual é o espaço amostral desse experimento?

2 Um dado é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Descreva os seguintes eventos:

a) Ocorre número maior que 4.
b) Ocorre número par.
c) Não ocorre o número 5.

3 Uma moeda é lançada duas vezes, simultaneamente. Em relação à seqüência de faces obtidas, qual é o evento "ocorrem faces diferentes"?

4 Um casal quer sortear dois destinos, para passar a lua-de-mel. Se a agência de turismo ofereceu Fortaleza (FOR), São Luís (SL), Manaus (MAN) e Recife (REC), construa o espaço amostral que representa os resultados possíveis desse sorteio.

5 Em uma urna há 60 bolas numeradas de 1 a 60. Uma delas é extraída ao acaso. Construa os seguintes eventos:

a) A: ocorre um divisor de 30.
b) B: ocorre um quadrado perfeito.

6 Um dado é lançado duas vezes sucessivamente e é observada a seqüência de números obtidos.

a) Determine Ω. Para isso, você deve construir uma tabela com 6 linhas e 6 colunas, em que serão marcadas as possibilidades para o primeiro e para o segundo lançamento, respectivamente.
b) Construa os eventos:
- E_1: ocorrem faces com números iguais.
- E_2: a soma dos números obtidos é igual a 9.

7 Em relação ao exercício anterior, se E é o evento "a diferença dos pontos obtidos, em qualquer ordem, é menor ou igual a 3", determine E^c.

5 Probabilidades em espaços amostrais eqüiprováveis

Consideremos um espaço amostral Ω, formado por k pontos amostrais:

$$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$$

Vamos associar a cada um desses pontos amostrais um número real, $p\{a_i\}$, ou simplesmente p_i, chamado *probabilidade do evento* $\{a_i\}$ (ou probabilidade de ocorrência do ponto amostral a_i), tal que:

I. $0 \leq p_i \leq 1$

II. $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, isto é, $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$

Consideraremos, na maior parte dos exercícios, os *espaços amostrais eqüiprováveis*, isto é, aqueles cujos pontos amostrais têm a *mesma* probabilidade de ocorrer.

Assim, denotando por p a probabilidade de ocorrência de cada um dos pontos amostrais de Ω, temos, em (II):

$$\underbrace{p + p + ... + p}_{k \text{ vezes}} = 1 \Rightarrow k \cdot p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{k}$$

(Por exemplo, ao lançarmos um dado, a probabilidade de ocorrência de cada face é $\frac{1}{6}$.)

A probabilidade de ocorrência de um evento E, formado por r pontos amostrais $E = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, com $r \leq k$, é dada por:

$$p(E) = p_1 + p_2 + \ldots + p_r \Rightarrow p(E) = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k}}_{r \text{ vezes}}$$

$$p(E) = \frac{r}{k} = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Como $E \subset \Omega$, temos que $n(E) \leq n(\Omega)$. Dessa forma:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \text{ é tal que } 0 \leq p(E) \leq 1$$

Essa definição de probabilidade é *intuitiva*, isto é, a probabilidade de ocorrer determinado evento é dada pela *razão entre o número de casos favoráveis* (ou número de casos que nos interessam) e o *número de casos possíveis* (ou número total de casos).

Assim:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de casos "favoráveis"}}{\text{número de casos "possíveis"}}$$

Exemplo 4

De um baralho comum de 52 cartas (13 cartas de cada naipe), uma é selecionada ao acaso. Qual é a probabilidade de observarmos:

a) o sete de copas? b) o número sete? c) um número diferente de 7?

Nesse experimento, $n(\Omega) = 52$.

a) O evento de interesse é $A = \{7^{\heartsuit}\}$; assim, $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{52}$.

b) Há quatro casos *favoráveis*: $B = \{7^{\heartsuit}, 7^{\diamondsuit}, 7^{\clubsuit}, 7^{\spadesuit}\}$.

Daí, $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

c) Basta considerar o evento *complementar* do evento B, isto é, B^c = {cartas do baralho que *não* contêm o número 7}; $n(B^c) = 52 - 4 = 48$.

Daí, $p(B^c) = \frac{n(B^c)}{n(\Omega)} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$.

Note sempre que:

$$p(E) + p(E^c) = 1$$

Exemplo 5

Em um programa de prêmios da TV, são colocadas oito fichas sobre uma mesa, das quais três contêm prêmios. O participante deve escolher duas fichas ao acaso e virá-las simultaneamente.

Qual é a probabilidade de que haja prêmios nas duas fichas?

- O número de resultados possíveis desse experimento corresponde a todas as possíveis maneiras de o participante selecionar, sem importar a ordem, duas das oito fichas disponíveis. Isso pode ser feito de $C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$ maneiras; $n(\Omega) = 28$.
- O evento E de interesse é aquele em que as duas fichas escolhidas contêm prêmios. O número de maneiras de escolher duas entre as três fichas *premiadas* é: $n(E) = C_{3,2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$.

Assim, a probabilidade pedida é: $p(E) = \frac{3}{28} = 0{,}107 \cong 10{,}7\%$.

Exemplo 6

Uma moeda é viciada de tal modo que, com ela, obter cara (K) é 3 vezes mais provável que obter coroa (C). Qual é a probabilidade de se conseguir cara em um único lançamento dessa moeda?

Nesse experimento, o espaço amostral *não* é eqüiprovável, pois $p(K) \neq p(C)$.

Entretanto, vale sempre: $p(K) + p(C) = 1$ (ou 100%). Como por hipótese $p(K) = 3 \cdot p(C)$, segue que $3p(C) + p(C) = 1 \Rightarrow P(C) = \frac{1}{4}$ e, portanto, $p(K) = \frac{3}{4}$.

Exercícios

8 Um dado perfeito é lançado. Qual é a probabilidade de que o número obtido seja múltiplo de 3?

9 Todo ano, uma igreja promove um bazar beneficente para seus freqüentadores. Se a escolha do mês é aleatória, qual é a probabilidade de que esse bazar seja realizado em:

a) fevereiro?
b) agosto?
c) no primeiro trimestre?
d) no segundo semestre?

10 Um professor quer sortear um CD entre seus alunos. Na sua turma, há 40 alunos e o número de rapazes excede o de moças em 12. Qual é a probabilidade de que o CD seja sorteado para:

a) uma moça?
b) um rapaz?

11 Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Qual é a probabilidade de observarmos:

a) duas caras e uma coroa?
b) pelo menos duas caras?

Sugestão: Construa um diagrama de árvore.

12 Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Qual a probabilidade de:

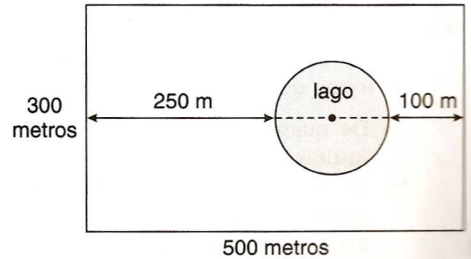
a) o primeiro número obtido ser maior que o segundo?
b) a soma dos pontos obtidos ser menor ou igual a 4?
c) o produto dos números obtidos ser par?
d) não obtermos, em nenhum lançamento, os números 1 e 6?

13 (UF-RJ) Para testar a eficácia de uma campanha de anúncio do lançamento de um novo sabão S, uma agência de propaganda realizou uma pesquisa com 2000 pessoas. Por uma falha da equipe, a agência omitiu os dados dos campos x, y, z e w no seu relatório sobre a pesquisa, conforme mostra a tabela a seguir.

Número de pessoas que	Adquiriram S	Não adquiriram S	Total
Viram o anúncio	x	y	1 500
Não viram o anúncio	200	z	500
Total	600	w	2 000

a) Indique os valores dos campos x, y, z e w.
b) Suponha que uma dessas 2000 pessoas entrevistadas seja escolhida ao acaso e que todas as pessoas tenham a mesma probabilidade de serem escolhidas.
Determine a probabilidade de que esta pessoa tenha visto o anúncio da campanha e adquirido o sabão S.

14 Um pára-quedista programou seu pouso em uma fazenda retangular que possui um lago em seu interior, conforme indicado ao lado. Se as condições climáticas não favorecerem o pára-quedista, o local de pouso pode se tornar aleatório. Qual é, nesse caso, a probabilidade de o pára-quedista pousar em terra? Adote $\pi \cong 3$.



15 (Unaerp-SP) Em certa região metropolitana, 52% da população tem mais de 25 anos. Sabe-se ainda que 30% das pessoas com mais de 25 anos têm menos de 35 anos. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa dessa região, qual a probabilidade de que seja alguém com 35 anos ou mais?

16 (UF-RN) Para acessar o sistema de computadores da empresa, cada funcionário digita sua senha pessoal, formada por *4 letras distintas* do nosso alfabeto (que possui 23 letras), numa ordem preestabelecida. Certa vez, um funcionário esqueceu a respectiva senha, lembrando apenas que ela começava com X e terminava com F.
Qual é a probabilidade de ele ter acertado a senha ao acaso, numa única tentativa?

17 Três dados são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de não ocorrerem três números iguais?

18 Considere a equação linear, na variável x:

$$(a - 2) \cdot x = 4$$

Se o coeficiente a for escolhido ao acaso entre os elementos de $\{0, 1, ..., 9\}$, qual é a probabilidade de que essa equação venha a ter:

a) uma única solução? b) nenhuma solução? c) uma solução inteira?

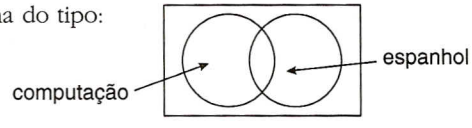
19 Os 64 funcionários de uma empresa responderam um questionário sobre os dois cursos opcionais oferecidos por ela. Os resultados foram os seguintes:

- 43 funcionários freqüentam o cursos de computação.
- 31 funcionários freqüentam o cursos de espanhol.
- 19 funcionários freqüentam ambos os cursos.

Escolhendo ao acaso um funcionário da empresa, qual é a probabilidade de que ele:

a) não freqüente nenhum dos cursos? b) freqüente exatamente um dos cursos?

Sugestão: Faça um diagrama do tipo:

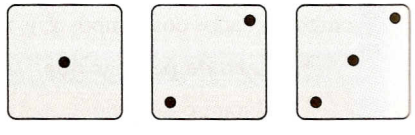


20 De um baralho de 52 cartas, 4 são extraídas simultaneamente. Qual é a probabilidade da ocorrência de:

a) duas cartas de ouros e duas de paus? b) uma carta de cada naipe?

21 (UF-RS) Dentre um grupo formado por dois homens e quatro mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. Qual é a probabilidade de que sejam escolhidos um homem e duas mulheres?

22 (Unirio-RJ) Joga-se um dado três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade de surgirem os resultados ao lado, em qualquer ordem?

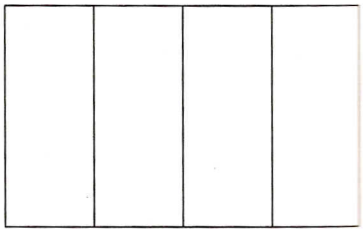


23 (UF-CE) Oito pessoas, sendo 5 homens e 3 mulheres, serão organizadas em uma fila. Qual é a probabilidade de as pessoas do mesmo sexo ficarem juntas?

24 Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 formamos números com três algarismos. Um desses números é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de que ele:

a) seja formado por algarismos distintos? b) seja par?

25 (UF-GO) A figura ao lado representa uma bandeira com 4 listras. Dispondo-se de 4 cores distintas, deseja-se pintar todas as listras, de forma que listras vizinhas tenham cores diferentes.



a) De quantas maneiras distintas a bandeira pode ser pintada? Justifique.
b) Escolhendo-se aleatoriamente uma das formas possíveis de pintar a bandeira, qual é a probabilidade de que a forma escolhida seja uma que contenha as 4 cores?

26 Unindo aleatoriamente dois vértices quaisquer de um pentágono, qual é a probabilidade de que o segmento determinado seja uma diagonal?

27 (UFF-RJ) Os cavalos X, Y e Z disputam uma prova ao final da qual não poderá ocorrer empate. Sabe-se que a probabilidade de X vencer é igual ao dobro da probabilidade de Y vencer. Da mesma forma, a probabilidade de Y vencer é igual ao dobro da probabilidade de Z vencer.
Calcule a probabilidade de:

a) X vencer; b) Y vencer; c) Z vencer.

28 (Unesp-SP) Numa cidade com 30 000 domicílios, 10 000 domicílios recebem regularmente o jornal da loja de eletrodomésticos X, 8 000 recebem regularmente o jornal do supermercado Y e metade do número de domicílios não recebe nenhum dos dois jornais.
Determine:

a) o número de domicílios que recebem os dois jornais;
b) a probabilidade de um domicílio da cidade, escolhido ao acaso, receber o jornal da loja de eletrodomésticos X e não receber o jornal do supermercado Y.

29 Um dado é viciado de tal modo que, ao ser lançado, é duas vezes mais provável ocorrer face par que ocorrer face ímpar. Todas as faces pares têm a mesma chance de ocorrer, o mesmo acontecendo com as faces ímpares. Lançando esse dado uma vez, qual é a probabilidade de ocorrer:

a) face igual a 3? b) face par?

30 Uma urna contém x bolas brancas, x^2 bolas vermelhas e 2 bolas pretas. Uma bola é escolhida ao acaso e sabe-se que a probabilidade de ela ser branca é maior que 20%.
Quantas bolas brancas essa urna pode conter?

31 (UF-RN) Um jogo consiste em um prisma triangular reto com uma lâmpada em cada vértice e um quadro de interruptores para acender essas lâmpadas. Sabendo que quaisquer três lâmpadas podem ser acesas por um único interruptor e cada interruptor acende precisamente três lâmpadas, calcule:

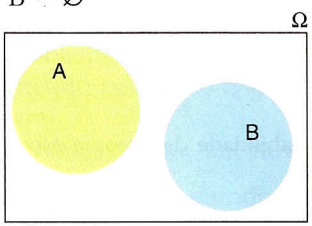
a) quantos interruptores existem nesse quadro;
b) a probabilidade de, ao se escolher um interruptor aleatoriamente, este acender três lâmpadas numa mesma face.

6 ○ Probabilidade da união de dois eventos

Sejam A e B eventos de um mesmo espaço amostral Ω. Vamos encontrar uma expressão para a probabilidade de ocorrer o evento A *ou* o evento B, isto é, a probabilidade da ocorrência do evento $A \cup B$.

Consideremos dois casos:

▶ **1º** $A \cap B = \varnothing$



Temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Como $n(\Omega) \neq 0$, podemos escrever:

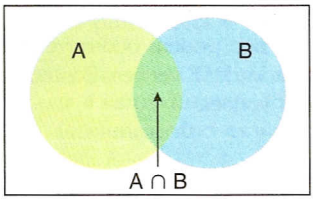
$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

Da definição de probabilidade apresentada, segue que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Nesse caso, A e B são chamados *eventos mutuamente exclusivos*.

▶ 2º $A \cap B \neq \varnothing$



Da teoria dos conjuntos, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

De modo análogo ao 1º caso, segue que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

O evento $A \cap B$ representa a ocorrência *simultânea* dos eventos *A* e *B*.

Exemplo 7

Dois dados são lançados simultaneamente.

a) Qual é a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a 9 ou números iguais?
Sejam os eventos:

A: soma vale 9; A = {(3, 6); (4, 5); (5, 4); (6, 3)}

B: os números são iguais; B = {(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)}

$A \cap B = \varnothing \rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

b) Qual é a probabilidade de se obter soma dos pontos igual a 8 ou números iguais?
Temos os eventos:

A: soma vale 8; A = {(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2)}

B: os números são iguais; B = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

$A \cap B = \{(4, 4)\}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{5}{18}$

Exercícios

32 Um dado é lançado. Qual é a probabilidade de observarmos:

a) um múltiplo de 2 ou um múltiplo de 3?

b) um número par ou um divisor de 5?

33 No cadastro de um cursinho pré-vestibular estão registrados 600 alunos assim distribuídos:

- 380 rapazes;
- 105 moças que já concluíram o ensino médio;
- 200 rapazes que estão cursando o ensino médio.

Um nome do cadastro é selecionado ao acaso. Qual é a probabilidade de o nome escolhido ser de:

a) uma moça?

b) um rapaz que já concluiu o ensino médio?

c) um rapaz ou de alguém que está cursando o ensino médio?

34 Numa urna há 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma delas é extraída ao acaso. Qual é a probabilidade de que o número indicado seja:

a) múltiplo de 2 ou de 3?

b) múltiplo de 5 ou de 7?

35 A probabilidade de chover 5 ou mais vezes ao mês em uma praia de Pernambuco é de 33%. A probabilidade de chover 5 ou menos vezes ao mês, nessa mesma praia, é de 81%. Qual é a probabilidade de chover exatamente 5 vezes ao mês?

7 ○ Probabilidade condicional

Na saída de um Fla-Flu, no Maracanã, foram ouvidos, para fins de pesquisa de opinião, 80 torcedores assim distribuídos:

Ricardo Beliel/Abril Imagens

	Homens	Mulheres	Total
Flamengo	27	14	41
Fluminense	23	16	39
Total	50	30	80

Escolhemos, entre os entrevistados, uma pessoa ao acaso. Constatando que a pessoa escolhida é homem, qual é a probabilidade de que ele seja torcedor do Flamengo?

Como a pessoa escolhida é homem, o número de casos possíveis desse experimento é 50.

Dos 50 homens entrevistados, 27 são flamenguistas; logo a probabilidade pedida é $p = \frac{27}{50}$.

Esse número expressa a probabilidade de a pessoa escolhida ser torcedora do Flamengo, *sabendo-se que* é homem. Vamos denominar tal número de *probabilidade condicional* e indicá-lo por:

$$p(\text{Flamengo} \mid \text{homem})$$

(lê-se: "dado que" ou "sabendo-se que")

Muitos problemas desse tipo podem ser assim resolvidos: reduzimos o espaço amostral a partir de uma informação parcial do resultado do experimento e calculamos a probabilidade nesse novo espaço amostral.

Apresentaremos, agora, um novo processo.

Retomando o exemplo introdutório, tomemos $p = \frac{27}{50}$ e dividamos numerador e denominador por $n(\Omega) = 80$ (espaço amostral original). Temos:

$$p = \frac{\frac{27}{80}}{\frac{50}{80}}$$

$\frac{27}{80}$ ← probabilidade de ser escolhido homem *e* torcedor do Flamengo

$\frac{50}{80}$ ← probabilidade de ser escolhido um homem

Assim:

$$p(\text{Flamengo} \mid \text{homem}) = \frac{p(\text{Flamengo } e \text{ homem})}{p(\text{homem})}$$

Isso sugere que, de modo geral, a probabilidade de ocorrer um evento A sabendo que já ocorreu o evento B é dada por:

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Notemos que as probabilidades do lado direito dessa expressão são *sempre* calculadas no espaço amostral original.

Exemplo 8

Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Escolhe-se uma delas ao acaso e vê-se que o número nela marcado é maior que 8. Qual é a probabilidade de esse número ser múltiplo de 5?

Há dois modos de resolver esse problema.

▶ **1º** *Reduzindo o espaço amostral*

Com a informação conhecida, o número de casos possíveis passa a ser 12, a saber: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20. Dentre eles, o número de casos favoráveis é 3, a saber: 10, 15 e 20.

A probabilidade pedida é, então:

$$p = p(\text{múltiplo de } 5 \mid \text{maior que } 8) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

▶ **2º** *Utilizando a fórmula*

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{1}{4}$$

(A: múltiplo de 5; B: maior que 8)

Exercícios

36 Um dado é lançado e se observa que o número obtido é par. Qual é a probabilidade de ele ser maior que 3?

37 Escolhe-se, ao acaso, um número do conjunto $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$.

a) Sabendo-se que o número escolhido é quadrado perfeito, qual é a probabilidade de ele ser par?

b) Sabendo-se que o número escolhido é múltiplo de 6, qual é a probabilidade de ele ser múltiplo de 10? E de 3?

38 Dois dados são lançados simultaneamente.

a) Qual é a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja 10, sabendo-se que os números obtidos são distintos?

b) Qual é a probabilidade de que se obtenham números distintos, sabendo-se que a soma dos pontos é 10?

39 Num prédio residencial há 2 blocos: A e B. No bloco A, há 80 apartamentos, dos quais 15% estão em atraso com o condomínio. No bloco B, há 50 apartamentos, 10% dos quais com taxas atrasadas. As fichas de todos os moradores estão reunidas, e uma delas é escolhida ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de que a ficha escolhida seja do bloco A e esteja quite com o condomínio?

b) Sabe-se que a ficha escolhida é de um condômino em atraso. Qual é a probabilidade de que ele seja do bloco B?

40 (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas verificou-se que 20% são fraudulentas.
Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.

a) Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta?

b) Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ela ter sido suspeita?

8 ○ Probabilidade de dois eventos simultâneos (ou sucessivos)

Da fórmula $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, encontrada para probabilidade condicional, segue que:

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

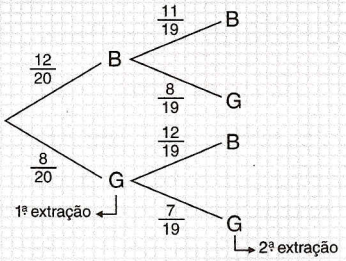
Isso significa que, para se avaliar a probabilidade de ocorrerem 2 eventos simultâneos (ou sucessivos), que é $p(A \cap B)$, basta *multiplicar* a probabilidade de ocorrer um deles ($p(B)$) pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu ($p(A|B)$).

A utilização dessa fórmula fica clara nos exemplos seguintes.

Exemplo 9

Numa caixa estão guardados 20 livros, sendo 12 de Biologia e 8 de Geografia. Dois deles são retirados sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de terem sido escolhidos 2 livros de Biologia?

Vamos construir um diagrama de árvore para esse experimento e associar probabilidades a cada um de seus galhos. Observe que as probabilidades referentes à 2ª extração são condicionais.



Estamos interessados em calcular:

$$p(B \cap B) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95}$$

$\frac{12}{20}$: probabilidade de o 1º livro ser de Biologia

$\frac{11}{19}$: probabilidade de o 2º livro ser de Biologia, dado que o 1º também é

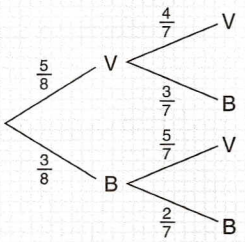
Qual será, então, a probabilidade de escolhermos livros de assuntos diferentes?
Há 2 casos que nos interessam. Assim:

$$p = p(B \cap G) \overset{\text{ou}}{+} p(G \cap B) \Rightarrow p = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = 2 \cdot \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{48}{95}$$

Exemplo 10

Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 brancas. Duas delas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de terem saído 2 bolas brancas?

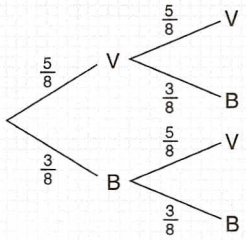
Temos:



Estamos interessados em:

$$p(B \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

Vamos resolver o mesmo exercício, supondo que as extrações sejam feitas com reposição.



Observe que o fato de sair branca na 1ª extração *não* muda a probabilidade de sair branca na 2ª extração, uma vez que a bola é reposta após a 1ª retirada. Nesse caso, dizemos que há *independência entre os eventos*.

A probabilidade pedida é:

$$p = p(B \cap B) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

Conclusão

De modo geral, quando $p(A|B) = p(A)$ — isto é, o fato de ter ocorrido o evento B não altera a probabilidade de ocorrer o evento A —, dizemos que A e B são *eventos independentes* e o teorema da multiplicação se reduz a:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Exercícios

41 Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de:

a) ocorrer cara e número 1?

b) ocorrer coroa e número primo?

42 Uma urna contém 10 etiquetas identificadas pelas letras A, B, C, ..., I, J. Duas delas são retiradas ao acaso, sucessivamente. Qual é a probabilidade de saírem 2 vogais, se a extração é feita:

a) com reposição?

b) sem reposição?

43 Uma urna (I) contém 3 bolas vermelhas, 4 brancas e 3 pretas. Outra urna (II) contém 2 bolas vermelhas, 5 brancas e 2 pretas. Uma das urnas é escolhida ao acaso, e dela é extraída uma bola.

a) Qual é a probabilidade de ocorrer urna I e bola branca?

b) Qual é a probabilidade de ocorrer bola vermelha?

44 Na prateleira de um supermercado há 20 latas de achocolatado, das quais 4 estão além do prazo de validade. Uma mulher passa e apanha uma delas ao acaso; logo em seguida, um rapaz apanha outra lata ao acaso. Qual é a probabilidade de que:

a) ambos tenham comprado achocolatados com prazo dentro da validade?

b) a mulher tenha comprado o produto com prazo dentro da validade, mas o rapaz não?

45 Num canil há 10 cachorros, 7 de uma raça X e 3 de uma raça Y, cada um dentro de uma "jaula" fechada nas laterais. A probabilidade de um cachorro da raça X latir para um desconhecido é de 80% e, para a raça Y, essa probabilidade é de 60%. Um visitante chega ao canil, pára ao acaso diante de uma "jaula" e vê então o cachorro que está nela. Qual é a probabilidade de esse cão não latir para o visitante?

46 (UF-BA, adaptado) Em uma escola, o 3º ano colegial tem duas turmas: A e B. A tabela mostra a distribuição, por sexo, dos alunos dessas turmas.

Turma	Homens	Mulheres
A	20	35
B	25	20

Com base nesses dados, assinale V ou F nas afirmações seguintes, justificando as falsas:

a) Escolhendo-se, ao acaso, um aluno do 3º ano, a probabilidade de ser homem é igual a 0,45.

b) Escolhendo-se, ao acaso, um aluno do 3º ano B, a probabilidade de ser mulher é igual a 20%.

c) Escolhendo-se, ao acaso, simultaneamente, dois alunos, um de cada turma, a probabilidade de serem os dois do mesmo sexo é igual a $\frac{16}{33}$.

d) Escolhendo-se, ao acaso, um aluno do 3º ano, a probabilidade de ser mulher ou de ser da turma B é igual a 80%.

e) Reunindo-se as mulheres das duas turmas e escolhendo-se uma, ao acaso, a probabilidade de ser da turma A é igual a 35%.

47 Na tradicional *loteria esportiva* há 13 jogos. Em cada jogo aposta-se em um dos times (coluna 1 ou coluna 2) ou em empate (coluna do meio). A aposta mínima é de um duplo, isto é, num único jogo assinalam-se 2 opções, ao preço de R$ 0,50. Há também o palpite triplo: as 3 colunas são assinaladas para um determinado jogo. Apostar em 1 triplo custa R$ 0,75.

a) Qual é a probabilidade de se acertarem os 13 jogos com a aposta mínima?

b) Qual é a probabilidade de se acertarem os 13 jogos apostando 1 triplo?

c) Na aposta máxima, são assinalados 5 duplos e 3 triplos ao preço de R$ 216,00. Qual é a probabilidade de se acertarem os 13 jogos com a aposta máxima? Há proporcionalidade entre os valores apostados e as chances de acerto, considerando-se as apostas mínima e máxima?

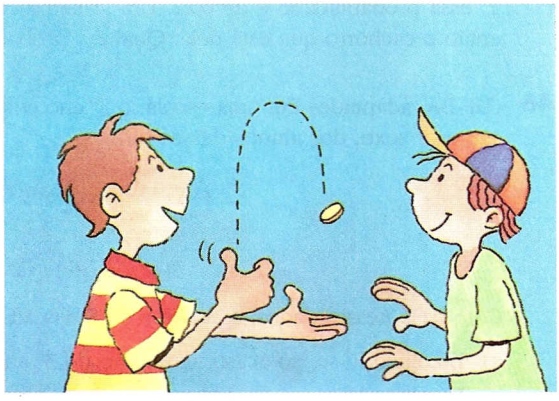
48 (UF-RJ) Fernando e Cláudio foram pescar num lago onde só existem trutas e carpas. Fernando pescou, no total, o triplo da quantidade pescada por Cláudio. Fernando pescou duas vezes mais trutas do que carpas, enquanto Cláudio pescou quantidades iguais de carpas e trutas. Os peixes foram todos jogados num balaio e uma truta foi escolhida ao acaso desse balaio.
Determine a probabilidade de que esta truta tenha sido pescada por Fernando.

49 (Fuvest-SP) Um dado, cujas faces estão numeradas de um a seis, é dito *perfeito* se cada uma das seis faces tem probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer em um lançamento. Considere o experimento que consiste em três lançamentos independentes de um dado perfeito. Calcule a probabilidade de que o produto desses três números seja:

a) par;

b) múltiplo de 10.

9 ○ Experimentos binomiais



Há experimentos aleatórios que apresentam apenas dois possíveis resultados. Por exemplo, do lançamento de uma moeda só pode resultar cara ou coroa; um exame laboratorial para detecção de alguma doença pode resultar positivo ou negativo; se um jovem "chuta" num teste de vestibular, pode acertar ou errar.

Imagine um experimento dessa natureza repetido um certo número (finito) de vezes, em condições idênticas, levando-se em conta que essas repetições constituam eventos independentes: está caracterizado um *experimento binomial*.

Vamos mostrar, por meio de exemplos, como se calculam probabilidades nesses tipos de experimento.

Exemplo 11

Uma moeda é lançada 5 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos 3 caras (K) e 2 coroas (C)? Trata-se de um experimento binomial.

- Para fixar idéias, comecemos analisando a probabilidade de ocorrerem tais faces em uma determinada ordem, por exemplo, KKKCC. Como os lançamentos são independentes, segue, pelo Teorema da Multiplicação, que essa probabilidade é:

$$p(K \cap K \cap K \cap C \cap C) = p(K) \cdot p(K) \cdot p(K) \cdot p(C) \cdot p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32} \quad (*)$$

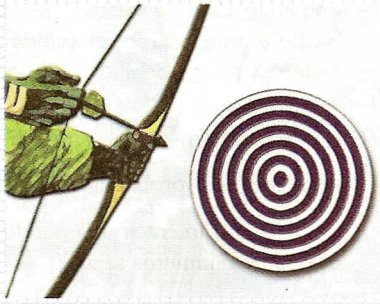
- Essas faces, porém, podem ser obtidas em outra ordem, por exemplo, (K, C, C, K, K) ou (C, K, K, C, K), etc. Já vimos que o número de seqüências desse tipo é o número de permutações de 5 elementos, com 3 repetições de K e 2 repetições de C, a saber:

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!\,3!} = C_{5,2} = 10$$

- Por fim, como a probabilidade de ocorrerem tais faces em uma determinada seqüência é dada por (*) e existem 10 diferentes seqüências, a probabilidade pedida é:

$$10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16} = 31{,}25\%$$

Exemplo 12



A probabilidade de um atirador acertar um alvo é de 75%. Fazendo 8 tentativas, qual é a probabilidade de acertar o alvo 5 vezes?

Seja p a probabilidade de acerto em uma tentativa ($p = 0{,}75$) e $1 - p$ a probabilidade de erro em uma tentativa ($1 - p = 0{,}25$).

- Calculamos a probabilidade de haver 5 acertos (C) e depois 3 erros (E) nessa ordem:

$$p(\underbrace{C \cap C \ldots \cap C}_{5 \text{ vezes}} \cap \underbrace{E \cap \ldots E}_{3 \text{ vezes}}) = \underbrace{p(C) \ldots p(C)}_{5 \text{ vezes}} \cdot \underbrace{p(E) \ldots p(E)}_{3 \text{ vezes}} = p^5 \cdot (1 - p)^3 = 0{,}75^5 \cdot 0{,}25^3$$

• O número de seqüências que apresentam 5C e 3E é:

$$P_8^{(5,3)} = \frac{8!}{5!\ 3!} = C_{8,5}$$

A probabilidade pedida é dada por:

$$C_{8,5} \cdot p^5 \cdot (1 - p)^3 = 56 \cdot 0{,}75^5 \cdot 0{,}25^3 \cong 0{,}207 = 20{,}7\%$$

Exercícios

50 Uma moeda "honesta" é lançada 7 vezes. Qual é a probabilidade de ocorrerem 2 caras e 5 coroas?

51 A incidência de uma doença numa população é de 30%. Se 8 pessoas submetem-se a um teste para detecção da doença, qual é a probabilidade de 5 delas apresentarem teste positivo?

52 Um aluno, afobado com o tempo que lhe resta de prova, decide "chutar" os 10 últimos testes de um exame vestibular. Como cada teste apresenta 5 alternativas distintas, a probabilidade de acerto, em cada um, é de 20%.
Qual é, então, a probabilidade de o aluno acertar 4 das 10 questões?

53 Um casal planeja ter 5 filhos. Qual é a probabilidade de nascerem 3 meninos e 2 meninas? E a de nascerem todos meninos?

54 (FGV-SP) Numa grande cidade, a probabilidade de que um carro de certo modelo seja roubado, no período de um ano, é $\frac{1}{20}$. Se considerarmos uma amostra aleatória de 10 destes carros:

a) Qual a probabilidade de que nenhum seja roubado no período de um ano?

b) Qual a probabilidade de que exatamente um carro seja roubado no período de um ano?

Nota: admitir independência entre os eventos associados aos roubos de cada carro.

55 (FGV-SP) Uma moeda é viciada de tal forma que os resultados possíveis, cara e coroa, são tais que a probabilidade de sair cara num lançamento é o triplo da de sair coroa.

a) Lançando-se uma vez a moeda, qual a probabilidade de sair cara?

b) Lançando-se três vezes a moeda, qual a probabilidade de sair exatamente uma cara?

56

(*O Estado de S. Paulo*, 4/9/2001.)

Suponha que Calvin tenha-se submetido a uma prova de 6 questões e, em cada questão, mantenha a performance citada. Se, para receber um conceito *A* é preciso acertar pelo menos 4 questões, qual é a probabilidade de Calvin receber um *A*?

57 (Fuvest-SP) São efetuados lançamentos sucessivos e independentes de uma moeda perfeita (as probabilidades de cara e de coroa são iguais) até que apareça cara pela segunda vez.

a) Qual é a probabilidade de que a segunda cara apareça no oitavo lançamento?

b) Sabendo-se que a segunda cara apareceu no oitavo lançamento, qual é a probabilidade condicional de que a primeira cara tenha aparecido no terceiro?

Testes de vestibulares

1 (Enem-MEC) Num determinado bairro há duas empresas de ônibus, Andabem e Bompasseio, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

Horário dos ônibus	
Andabem	**Bompasseio**
...	...
6h00min	6h10min
6h30min	6h40min
7h00min	7h10min
7h30min	7h40min
...	...

Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho nem preferência por qualquer das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa Andabem é:

a) um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
b) um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
c) metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
d) duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.
e) três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa Bompasseio.

2 (UF-PB) A probabilidade de se escolher, no conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 21\}$, um número que seja divisor de 12 e de 16 é:

a) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{4}{7}$

b) $\frac{4}{21}$ d) $\frac{1}{21}$

3 (UMC-SP) A tabela a seguir fornece, por sexo e área escolhida, o número de inscritos em um vestibular para ingresso no curso superior.

	Área		
Sexo	**Biomédicas**	**Exatas**	**Humanas**
Masculino	2500	1500	1500
Feminino	1500	1000	2000

Escolhido, ao acaso, um dos inscritos e representada por p_1 a probabilidade de o escolhido ser do sexo masculino e ter optado por Exatas e por p_2 a probabilidade de o escolhido ser do sexo feminino sabendo que optou por Biomédicas, pode-se concluir que:

a) $p_1 = 0{,}6$ e $p_2 = 0{,}375$
b) $p_1 = 0{,}6$ e $p_2 = 0{,}15$
c) $p_1 = 0{,}15$ e $p_2 = 0{,}15$
d) $p_1 = 0{,}15$ e $p_2 = 0{,}375$
e) $p_1 = 0{,}375$ e $p_2 = 0{,}15$

4 (Mackenzie-SP) Considere todos os números de 4 algarismos distintos que podem ser formados utilizando-se 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Escolhido ao acaso um desses números, a probabilidade de ele conter o algarismo 3 e não conter o algarismo 5 é:

a) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{8}{15}$ e) $\frac{5}{12}$

b) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{4}{15}$

5 (Unirio-RJ) O dispositivo que aciona a abertura do cofre de uma joalheria apresenta um teclado com nove teclas, sendo cinco algarismos (0, 1, 2, 3, 4) e quatro letras (x, y, z, w). O segredo do cofre é uma seqüência de três algarismos seguidos de duas letras. Qual a probabilidade de uma pessoa, numa única tentativa, ao acaso, abrir o cofre?

a) $\frac{1}{7200}$ c) $\frac{1}{1500}$ e) $\frac{1}{200}$

b) $\frac{1}{2000}$ d) $\frac{1}{720}$

6 (UF-RN) Uma caixa contém 20 bolas brancas e 15 bolas vermelhas. Retira-se uma amostra de 10 bolas, simultaneamente.
A probabilidade de que *todas* as bolas retiradas sejam vermelhas é:

a) $\frac{15}{C_{35}^{10}}$ b) $\frac{C_{20}^{10}}{C_{35}^{10}}$ c) $\frac{20}{C_{35}^{10}}$ d) $\frac{C_{15}^{10}}{C_{35}^{10}}$

7 (Ucsal-BA) Uma escola de línguas tem somente alunos de inglês e espanhol, nenhum deles estudando as duas línguas. Do total de alunos, 20% estudam espanhol, 65% são do sexo feminino e 30% são do sexo masculino e estudam inglês. Se escolhermos ao acaso um aluno dessa escola, a probabilidade de ele ser do sexo feminino e estudar inglês é:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{10}$ e) $\frac{1}{20}$

b) $\frac{7}{20}$ d) $\frac{3}{20}$

8 (UE-RJ) "Protéticos e dentistas dizem que a procura por dentes postiços não aumentou. Até declinou um pouquinho. No Brasil, segundo a Associação Brasileira de Odontologia (ABO), há 1,4 milhão de pessoas sem nenhum dente na boca, e 80% delas já usam dentadura. Assunto encerrado."

(Adaptado de *Veja*, outubro/1997.)

Considere que a população brasileira seja de 160 milhões de habitantes. Escolhendo ao acaso um desses habitantes, a probabilidade de que ele não possua nenhum dente na boca e use dentadura, de acordo com a ABO, é de:

a) 0,28% c) 0,70%

b) 0,56% d) 0,80%

9 (Faap-SP) Suponha que você tenha 40% de chance de receber uma oferta de emprego da firma de sua primeira escolha, 40% de chance de receber uma oferta da firma de sua segunda escolha e 16% de chance de receber uma oferta de ambas as firmas. Qual é a probabilidade de receber uma oferta de qualquer uma das firmas?

a) 0,96 c) 0,64 e) 0,16

b) 0,80 d) 0,32

10 (PUC-RJ) As cartas de um baralho são amontoadas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de a carta de cima ser de copas e a de baixo também? O baralho é formado por 52 cartas de 4 naipes diferentes (13 de cada naipe).

a) $\frac{1}{17}$ b) $\frac{1}{25}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{35}$ e) $\frac{1}{45}$

11 (UFF-RJ) Em uma bandeja há dez pastéis, dos quais três são de carne, três de queijo e quatro de camarão. Se Fabiana retirar, aleatoriamente e sem reposição, dois pastéis dessa bandeja, a probabilidade de os dois pastéis retirados serem de camarão é:

a) $\frac{3}{25}$ c) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{4}{25}$ d) $\frac{2}{5}$

12 (FEI-SP) Para desligar-se um sistema de segurança, devem ser acionados simultaneamente 3 determinados botões de um painel que possui 5 botões. Qual a probabilidade de desligar-se o sistema, escolhendo-se aleatoriamente os 3 botões?

a) $\frac{1}{24}$ c) $\frac{1}{10}$ e) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{8}$

13 (U. F. São Carlos-SP) Gustavo e sua irmã Caroline viajaram de férias para cidades distintas. Os pais recomendam que ambos telefonem quando chegarem ao destino. A experiência em férias anteriores mostra que nem sempre Gustavo e Caroline cumprem esse desejo dos pais. A probabilidade de Gustavo telefonar é 0,6 e a probabilidade de Caroline telefonar é 0,8. A probabilidade de pelo menos um dos filhos contactar os pais é:

a) 0,20 c) 0,64 e) 0,92

b) 0,48 d) 0,86

14 (Covest-PE) Um vestibulando arrumou numa prateleira, de forma aleatória, seus 5 livros de Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Combinatória). Qual a probabilidade de os livros de Aritmética e Combinatória não estarem juntos?

a) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{2}{3}$

Enunciado para as questões 15 e 16.

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas uma dentre as letras *T*, *V* e *E*. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

15 (Enem-MEC) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:

a) 0 c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

16 (Enem-MEC) A probabilidade de o participante não ganhar nenhum prêmio é igual a:

a) 0 c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

17 (PUC-MG) Em uma urna há 10 fichas idênticas, numeradas de 1 a 10. Retiram-se 2 fichas ao acaso (sem reposição). A probabilidade de que a soma dos dois números seja igual a 10 é:

a) $\frac{1}{100}$ c) $\frac{3}{65}$ e) $\frac{4}{45}$

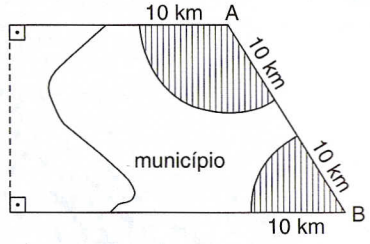
b) $\frac{9}{100}$ d) $\frac{1}{50}$

18 (UF-RS) Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que elas sejam do mesmo par é de:

a) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{5}$

19 (Enem-MEC) Um município de 628 km² é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas *A* e *B* alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.
Essa probabilidade é de, aproximadamente:

a) 20% c) 30% e) 40%

b) 25% d) 35%

20 (Mackenzie-SP) A probabilidade de um casal ter um filho do sexo masculino é $\frac{1}{4}$. Então, supondo que o casal venha a ter três filhos, a probabilidade de serem exatamente dois do mesmo sexo é:

a) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{9}{16}$

b) $\frac{1}{16}$ d) $\frac{1}{8}$

21 (Puccamp-SP) Em uma escola, 10 alunos (6 rapazes e 4 garotas) apresentam-se para compor a diretoria do Grêmio Estudantil, que deverá ter os seguintes membros: 1 presidente, 1 vice-presidente e 2 secretários. Os nomes dos candidatos são colocados em uma urna, da qual serão sorteados os membros que comporão a diretoria. A probabilidade de que na equipe sorteada o presidente ou o vice-presidente sejam do sexo masculino é:

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{27}{30}$

b) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{13}{15}$

22 (UF-PE) Um casal planeja ter *4 filhos*. Supondo igual a chance de um filho nascer do sexo masculino ou do sexo feminino, qual a probabilidade de o casal vir a ter, no mínimo, *dois* filhos do sexo masculino?

a) 0,6871 c) 0,6873 e) 0,6875

b) 0,6872 d) 0,6874

23 (Fuvest-SP) Um arquivo de escritório possui 4 gavetas, chamadas *a*, *b*, *c*, *d*. Em cada gaveta cabem no máximo 5 pastas. Uma secretária guardou, ao acaso, 18 pastas nesse arquivo. Qual é a probabilidade de haver exatamente 4 pastas na gaveta *a*?

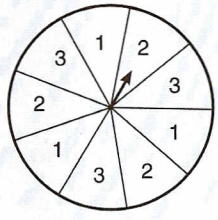
a) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{3}{20}$ e) $\frac{1}{30}$

b) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{20}$

24 (U. F. Uberlândia-MG) Um conhecido jogo, presente em muitas festas populares, é a roleta da sorte, na qual gira-se o ponteiro e anota-se o número que este aponta ao parar (ver figura). Após duas rodadas, qual a probabilidade de que a soma dos dois números obtidos seja igual a 5?
Obs.: Considere que a área de todos os setores circulares em que os números estão inseridos é a mesma.

a) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{2}{27}$

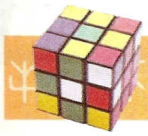
b) $\frac{4}{27}$ d) $\frac{2}{9}$



25 (UF-RS) Cada cartela de uma coleção é formada por seis quadrados coloridos, justapostos como indica a figura ao lado.

Em cada cartela, dois quadrados foram coloridos de azul, dois de verde e dois de rosa. A coleção apresenta todas as possibilidades de distribuição dessas cores nas cartelas nas condições citadas e não existem cartelas com a mesma distribuição de cores. Retirando-se ao acaso uma cartela da coleção, a probabilidade de que somente uma coluna apresente os quadrados de mesma cor é de:

a) 6% b) 36% c) 40% d) 48% e) 90%



Desafios

1

O risco da cidade grande

O estatístico Paulo Guimarães, do instituto de pesquisa GPP, de São Paulo, criou uma nova fórmula para comparar as taxas de violência das principais capitais brasileiras. Ele levantou qual é o risco de uma família de quatro pessoas ter um de seus integrantes assassinado a tiros em treze cidades. Confira os resultados

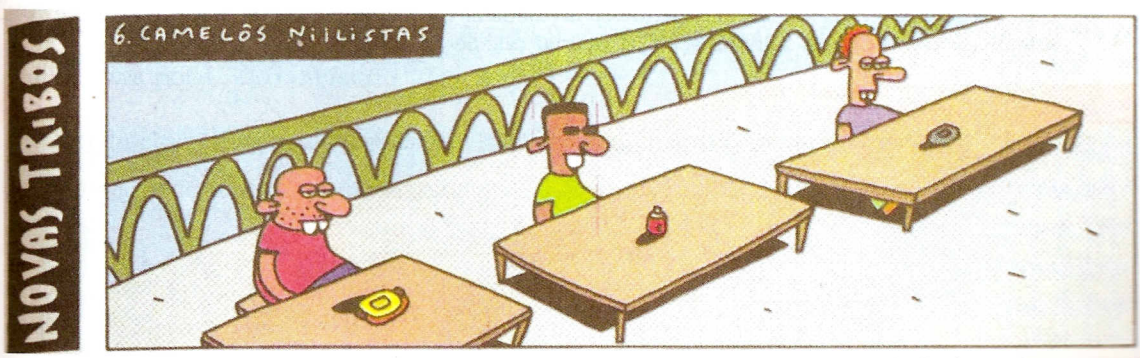
Cidade	Probabilidade de alguém da família ser morto com um tiro	
Recife	1 em	5
Vitória		6
Rio de Janeiro		9
Cuiabá		9
Salvador		11
Campo Grande		12
São Paulo		14
Brasília		14
Porto Alegre		16
Belo Horizonte		20
Curitiba		25
Fortaleza		33
Florianópolis		50

Fonte: *Veja*, 17/10/2001.

a) Duas irmãs, Ana e Maria, casaram-se e tiveram, cada uma, dois filhos. A família de Ana vive em Vitória, e a de Maria em Salvador.
Qual é a probabilidade de um integrante de cada uma das duas famílias ser morto com um tiro? E a probabilidade de ninguém ser morto com um tiro?

b) A família de Abel (esposa e 2 filhos) vive no Recife. Seu irmão Michel vive com a família (esposa e 2 filhos) em uma das capitais relacionadas na tabela, exceto Recife. Sabendo que a probabilidade de exatamente um integrante dessas duas famílias ser morto com um tiro é menor que 24%, em que cidades é possível que a família de Michel more?

2 **OS PESCOÇUDOS** — Caco Galhardo



(*Folha de S.Paulo*, 3/11/2001.)

Uma onda de pessimismo tomou conta desses camelôs, que expõem, cada um, exatamente um produto. As probabilidades de se efetivar uma venda, em um certo dia, são dadas por 3%, 5% e 8%. Admitindo independência nas vendas entre as barracas, calcule:

a) a probabilidade de, em um único dia, não ocorrer venda alguma;

b) a probabilidade de que pelo menos dois camelôs efetuem suas vendas.

3 A Mega Sena é uma das loterias mais populares do Brasil. Pode-se concorrer escolhendo de 6 a 15 números entre os 60 do volante. O resultado virá quando 6 números forem sorteados entre os 60 primeiros naturais (não nulos).

Há prêmios para quem acertar 4 números (quadra), 5 números (quina) ou 6 números. A aposta mínima (6 números) é de R$ 1,00.

a) De quantos modos distintos pode ocorrer o resultado de um sorteio da Mega Sena?

b) Apostando R$ 1,00, qual é a probabilidade de acertar uma quadra? E uma quina? E as 6 dezenas?

c) Apostando 10 números, qual é a probabilidade de acertar os 6 números sorteados?

d) Qual é a probabilidade de acertar os 6 números sorteados apostando-se 15 números (aposta máxima)?

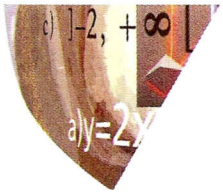
e) Qual é a probabilidade de não acertar nenhum número fazendo-se a aposta máxima?

4 (Fuvest-SP) Um investidor quer aplicar 120 mil reais. Seu corretor lhe oferece um investimento, em duas fases, com as seguintes regras:

- Na 1ª fase do investimento, ocorrerá um dentre os dois eventos seguintes: com probabilidade p, o investidor ganha metade do que investiu; com probabilidade $(1 - p)$, o investidor perde um terço do que investiu.
- Na 2ª fase do investimento, a quantia final da 1ª fase será reinvestida, de forma independente da 1ª fase. Neste novo investimento, ocorrerá um dentre os dois eventos seguintes: com probabilidade $\frac{1}{2}$, o investidor ganha a quarta parte do que foi reinvestido; com probabilidade $\frac{1}{2}$, o investidor perde metade do que foi reinvestido.

a) Se o investidor aplicar seu dinheiro dessa forma, com que valores pode ficar ao término do investimento? Qual é, em função de p, a probabilidade de ficar com cada um desses valores?

b) Uma revista especializada informa que, nesse investimento, a probabilidade de perder dinheiro é 70%. Admitindo como correta a informação da revista, calcule p.



24

BINÔMIO DE NEWTON

1 ○ Introdução

Seja n um número natural. Já conhecemos o desenvolvimento de $(a + b)^n$ para alguns valores de n:

- $n = 0 \Rightarrow (a + b)^0 = 1$
- $n = 1 \Rightarrow (a + b)^1 = a + b$
- $n = 2 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $n = 3 \Rightarrow (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

O desenvolvimento de $(a + b)^n$ para $n > 3$ pode ser obtido com a aplicação dos desenvolvimentos acima e das propriedades das potências. Vejamos:

$$(a + b)^4 = (a + b) \cdot (a + b)^3 = (a + b) \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = (a + b) \cdot (a + b)^4 \text{ etc.;}$$

em geral, $(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b)^{n-1}$.

Essa técnica, porém, pode conduzir a cálculos muito trabalhosos.

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos e algumas ferramentas que nos permitirão, ao final, fazer o desenvolvimento de $(a + b)^n$ com menos trabalho.

2 ○ Coeficientes binomiais

Definição

Dados dois números naturais, n e p, com $n \geq p$, definimos o *coeficiente binomial* ***n*** *sobre* ***p***, e indicamos por $\binom{n}{p}$ o número $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n,\,p}$.

O número n é dito *numerador* e o número p é chamado *denominador* de $\binom{n}{p}$.

Desse modo, temos, por exemplo:

1. $\binom{5}{2} = C_{5,\,2} = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!\,3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot \cancel{3!}} = 10$

2. $\binom{10}{7} = C_{10,\,7} = \dfrac{10!}{7!\,3!} = 120$

Casos particulares

▶ **1º** Quando $p = 0$, temos $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, por exemplo, $\binom{4}{0} = 1$ e $\binom{20}{0} = 1$.

▶ **2º** Quando $p = 1$, temos $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, por exemplo, $\binom{5}{1} = 5$ e $\binom{9}{1} = 9$.

▶ **3º** Quando $p = n$, temos $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, por exemplo, $\binom{6}{6} = 1$ e $\binom{14}{14} = 1$.

Os coeficientes binomiais têm aplicação no estudo do desenvolvimento de $(a + b)^n$, como veremos adiante.

Binomiais complementares

Dizemos que dois coeficientes binomiais de mesmo numerador são *complementares* quando a soma de seus denominadores é igual ao numerador, isto é:

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são complementares se $p + q = n$.

São binomiais complementares, por exemplo, $\binom{8}{2}$ e $\binom{8}{6}$; $\binom{9}{4}$ e $\binom{9}{5}$; $\binom{11}{4}$ e $\binom{11}{7}$.

Propriedade

Dois coeficientes binomiais complementares são iguais.

Para $p + q = n$, tem-se $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$.

A justificativa dessa propriedade é a que segue:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q} = \frac{n!}{(n-q)![n-(n-q)]!} = \frac{n!}{q!\,(n-q)!} = \binom{n}{q}$$

Propriedade

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Leftrightarrow (p = q \text{ ou } p + q = n) \quad ,$$

sendo n, p e q números naturais, tais que $n \geqslant p$ e $n \geqslant q$.

Exemplo 1

Ao resolvermos a equação $\binom{10}{x} = \binom{10}{4}$, chegamos a duas possibilidades:

$x = 4$ ou $x + 4 = 10 \rightarrow x = 6$

Exercícios

1 Calcule:

a) $\binom{4}{2}$ c) $\binom{2}{0}+\binom{3}{3}$ e) $\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\binom{p}{p}$, sendo $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$

b) $\binom{9}{6}$ d) $\dfrac{\binom{6}{3}+\binom{8}{4}}{\binom{5}{2}}$

2 Resolva as seguintes equações:

a) $\binom{13}{x}=\binom{13}{8}$ b) $\binom{21}{x+5}=\binom{21}{-2x+17}$ c) $\binom{11}{x^2}=\binom{11}{2x+3}$

3 (Fuvest-SP) Lembrando que $\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$:

a) calcule $\binom{6}{4}$.

b) simplifique a fração $\dfrac{\binom{12}{4}}{\binom{12}{5}}$.

c) determine os inteiros n e p de modo que $\dfrac{\binom{n}{p}}{1}=\dfrac{\binom{n}{p+1}}{2}=\dfrac{\binom{n}{p+2}}{3}$.

3 Triângulo de Pascal/Tartaglia

Os coeficientes binomiais podem ser dispostos em uma tabela chamada *triângulo de Pascal* ou *de Tartaglia*. Nela, coeficientes de mesmo numerador agrupam-se em uma mesma linha e coeficientes de mesmo denominador agrupam-se em uma mesma coluna.

linha zero $\binom{0}{0}$

linha 1 $\binom{1}{0}\binom{1}{1}$

linha 2 $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

linha 3 $\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$

linha 4 $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$

.....

⋮

linha k $\binom{k}{0}\binom{k}{1}\binom{k}{2}\binom{k}{3}\binom{k}{4}\cdots\binom{k}{k}$

Notemos que o termo *linha k* significa a linha de *numerador k*.

Calculando os valores dos coeficientes, obtemos outra representação para o triângulo:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
.....

Propriedades

▶ **1ª** Toda linha começa e termina por 1.

De fato, o 1º elemento de uma linha qualquer é $\binom{k}{0} = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e o último elemento dessa linha é $\binom{k}{k} = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

▶ **2ª** Em uma mesma linha, os coeficientes binomiais eqüidistantes dos extremos são iguais. Vejamos, por exemplo:

linha 5:

$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\|\quad\ \|\quad\ \|\quad\ \|\quad\ \|\quad\ \|$$
$$1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1$$

(iguais: 10 e 10; iguais: 5 e 5)

linha 6:

$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$
$$\|\quad\ \|\quad\ \|\quad\ \|\quad\ \|\quad\ \|\quad\ \|$$
$$1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1$$

(iguais: 15 e 15; iguais: 6 e 6)

A justificativa dessa propriedade está no fato de que esses coeficientes binomiais são complementares e, portanto, iguais.

▶ **3ª** A partir da linha 2, notamos que cada elemento X (com exceção do primeiro e do último) é igual à soma de dois elementos da linha anterior, a saber: o elemento imediatamente acima de X e o anterior a este. Vejamos:

1
1 + 1
1 → 2 1
1 3 + 3 1
1 4 → 6 4 + 1
1 5 10 10 → 5 1

Essa propriedade é conhecida como *relação de Stifel* e pode ser generalizada por:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1},\ n \geq p$$

Observe que o 1º membro da igualdade representa um elemento genérico (linha n e coluna p) do triângulo; o 2º membro representa a soma dos dois elementos da linha anterior (linha $n - 1$), um da mesma coluna p e o outro da coluna anterior $p - 1$.

Exemplo 2

Para calcular $\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$, podemos usar a relação de Stifel:

$$\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5} = \frac{11!}{5!\,6!} = 462$$

▶ **4ª** A soma dos elementos da linha de numerador k é igual a 2^k.
Temos:

						Soma dos elementos da linha:	
linha zero:	1				→	1	$= 2^0$
linha 1:	1	1			→	1 + 1	$= 2^1$
linha 2:	1	2	1		→	1 + 2 + 1	$= 2^2$
linha 3:	1	3	3	1	→	1 + 3 + 3 + 1	$= 2^3$
.....							
linha k:	$\binom{k}{0}$	$\binom{k}{1}$	.....	$\binom{k}{k}$	→	$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \ldots + \binom{k}{k}$	$= 2^k$

A demonstração de que

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \ldots + \binom{k}{k} = 2^k$$

pode ser feita utilizando-se o desenvolvimento do binômio de Newton (exercício 20, página 402).

Exercícios

4 Aplicando a relação de Stifel, calcule:

a) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$

b) $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{9}{5}$

c) $\dfrac{\binom{100}{37} + \binom{100}{38} + \binom{101}{39}}{\binom{102}{63}}$

5 Sabendo que $\binom{x}{y} = a$ e $\binom{x}{y+1} = b$, qual é o valor de $\binom{x+1}{y+1}$?

6 A soma dos elementos da linha p do triângulo de Pascal vale 256. Determine:

a) o valor de p;

b) o elemento central dessa linha.

7 (Unirio-RJ) Calcule o valor de $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n}$, sendo n ímpar; justifique sua resposta.

4 ○ Somatório

Um símbolo importante em Álgebra é o símbolo de *somatório*, indicado pela letra grega maiúscula $\sum$ (lê-se: "sigma"), que representa a soma de certo número de parcelas com alguma característica comum.

Exemplo 3

O símbolo $\sum_{i=1}^{4} i^3$ (lê-se "somatório de i^3 para i variando de 1 a 4") deve ser interpretado da seguinte maneira:

Calculamos o valor numérico da expressão i^3 para i = 1, 2, 3 e 4 e somamos os resultados encontrados. Assim:

$$\sum_{i=1}^{4} i^3 = \underbrace{1^3}_{i=1} + \underbrace{2^3}_{i=2} + \underbrace{3^3}_{i=3} + \underbrace{4^3}_{i=4} = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

Exemplo 4

Vamos calcular $\sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k}$.

Temos:

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} = \underbrace{\binom{5}{0}}_{k=0} + \underbrace{\binom{5}{1}}_{k=1} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{k=2} = 1 + 5 + 10 = 16$$

Exercícios

8 Calcule as seguintes somas:

a) $\sum_{i=1}^{4} (3i + 1)$ b) $\sum_{i=0}^{3} \frac{2}{i+1}$ c) $\sum_{i=0}^{5} i!$ d) $\sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i}$

9 Qual é o valor de $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$?

10 Sabendo que $\sum_{i=1}^{4} (2i + a) = 60$, determine o valor de a.

11 Resolva a equação na variável n: $\sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} = 29$.

12 (Unificado-RJ) Qual é o valor de n na igualdade: $\sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} = 254$?

13 (Mackenzie-SP) Calcule $\sum_{n=1}^{20} \binom{n}{n-1}$.

5 ○ Desenvolvimento de $(a + b)^n$

Observemos os desenvolvimentos de $(a + b)^n$ para alguns valores de n, apresentados no início do capítulo:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow$ 3 termos, os expoentes de a decrescem de 2 até zero e os expoentes de b aumentam desde zero até 2;
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \rightarrow$ 4 termos, os expoentes de a decrescem de 3 até zero e os expoentes de b aumentam desde zero até 3;
- $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \rightarrow$ 5 termos, os expoentes de a decrescem de 4 até zero e os expoentes de b aumentam desde zero até 4.

Essas observações sugerem que, para a parte literal do desenvolvimento de $(a + b)^n$, $n \in \mathbb{N}$, temos:

I. $\underbrace{a^n b^0}_{1º\text{ termo}}$; $\underbrace{a^{n-1}b^1}_{2º\text{ termo}}$; $\underbrace{a^{n-2}b^2}_{3º\text{ termo}}$; .....; $\underbrace{a^1 b^{n-1}}_{n\text{-ésimo termo}}$; $\underbrace{a^0 b^n}_{(n+1)\text{-ésimo termo}}$

II. os coeficientes que aparecem nos desenvolvimentos anteriores correspondem, ordenadamente, às linhas do triângulo de Pascal:

- $(a + b)^1 = 1a + 1b$ — linha 1: 1 1
- $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$ — linha 2: 1 2 1
- $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ — linha 3: 1 3 3 1

Dessa maneira, para determinar os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$, basta considerar a linha n (linha de numerador n) do triângulo de Pascal.

$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{coeficiente do 1º termo}}$ $\underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{coeficiente do 2º termo}}$ ..... $\underbrace{\binom{n}{n-1}}_{\text{coeficiente do n-ésimo termo}}$ $\underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{coeficiente do (n + 1)-ésimo termo}}$

Teorema de Newton

Com os coeficientes obtidos em II e a parte literal obtida em I, podemos enunciar:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n ,$$

em que a e b são reais e n é natural.

Utilizando o símbolo de somatório, podemos escrever:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemplo 5

Vamos desenvolver $(a^2 + 3)^4$ usando o teorema anterior.

Temos:

$$(a^2 + 3)^4 = \binom{4}{0} \cdot (a^2)^4 \cdot 3^0 + \binom{4}{1} \cdot (a^2)^3 \cdot 3^1 + \binom{4}{2} \cdot (a^2)^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3} (a^2)^1 \cdot 3^3 + \binom{4}{4} (a^2)^0 \cdot 3^4,$$

isto é,

$$(a^2 + 3)^4 = a^8 + 12a^6 + 54a^4 + 108a^2 + 81$$

Observação

O teorema binomial continua válido se quisermos obter o desenvolvimento de $(a - b)^n$. Basta notar que:

$$(a - b)^n = [a + (-b)]^n$$

$$[a + (-b)]^n = \binom{n}{0} a^n \cdot (-b)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot (-b)^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot (-b)^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 \cdot (-b)^n$$

Cada um dos termos acima contém potências do tipo:

$$(-b)^k = \begin{cases} b^k, \text{ se } k \text{ é par} \\ -b^k, \text{ se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Assim, os sinais dos termos do desenvolvimento de $(a - b)^n$ se alternam, a partir do 1º termo, que é positivo.

Exemplo 6

Vamos desenvolver $(2x - 3)^5$.
Temos:

$$(2x-3)^5 = \binom{5}{0}\cdot(2x)^5 - \binom{5}{1}\cdot(2x)^4\cdot 3^1 + \binom{5}{2}\cdot(2x)^3\cdot 3^2 - \binom{5}{3}\cdot(2x)^2\cdot 3^3 + \binom{5}{4}\cdot(2x)^1\cdot 3^4 - \binom{5}{5}\cdot 3^5,$$

ou seja,

$$(2x - 3)^5 = 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243$$

Exemplo 7

Qual é o valor de $\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{6-i}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i}$?

Desenvolvendo o somatório temos:

$$\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{6-i}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i} = \underbrace{\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{0}}_{i=0} + \underbrace{\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1}}_{i=1} + \ldots + \underbrace{\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{6}}_{i=6},$$

que é exatamente o desenvolvimento de $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^6 = 1^6 = 1$.

Exercícios

14 Utilizando o teorema de Newton, desenvolva:

a) $(1 + x^2)^3$ b) $(x - 3y)^5$ c) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$ d) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$

15 Supondo $x > 0$, desenvolva:

a) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ b) $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^5$

16 Qual é o valor de $A = 0{,}3^5 + 5\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}7 + 10\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^2 + 10\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^3 + 5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^4$?

17 Calcule:

a) $\sum_{n=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot 2^{5-n}\cdot 3^n$ b) $\sum_{n=1}^{7}\binom{7}{n}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{7-n}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n$

18 Calcule:

a) $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}3^i$ b) $\sum_{i=1}^{8}\binom{8}{i}2^i$ c) $\sum_{i=0}^{7}\binom{7}{i}(-1)^i\cdot 3^{7-i}\cdot 2^i$

19 (Mackenzie-SP) Se $\binom{5}{0}(x-2)^5 + \binom{5}{1}(x-2)^4 + \binom{5}{2}(x-2)^3 + \ldots + \binom{5}{5} = (7x - 13)^5$, então calcule $(x - 2)^6$.

20 Mostre que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.
Sugestão: desenvolver $(1 + 1)^n$.

6 ○ Termo geral do binômio

Muitas vezes estamos interessados em conhecer apenas um termo específico do desenvolvimento de $(a + b)^n$, sem precisar escrever todos os seus termos. Para isso, é necessário encontrarmos uma expressão que possa representar qualquer termo do desenvolvimento de $(a + b)^n$ e, a partir dela, determinarmos o termo procurado.

Já vimos que:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

O termo $\binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ é chamado *termo geral* do binômio, pois, atribuindo valores para k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), obtemos todos os termos do desenvolvimento.

Observações

1ª) Na expressão do termo geral, o expoente de a é sempre dado pela diferença entre o numerador e o denominador do coeficiente binomial e o expoente de b é igual ao denominador desse coeficiente.

2ª) Na expressão do termo geral, o 1º termo do desenvolvimento é obtido fazendo-se $k = 0$; o 2º termo é obtido fazendo-se $k = 1$; e assim por diante.

Assim, se quisermos determinar o p-ésimo termo, basta fazer $k = p - 1$.

Exemplo 8

Se quisermos saber o termo em x^4 no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}$, basta usarmos seu termo geral, que é:

$$\binom{16}{k} \cdot x^{16-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = \binom{16}{k} \cdot \frac{x^{16-k}}{x^{\frac{k}{2}}} = \binom{16}{k} \cdot x^{16 - \frac{3k}{2}}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, 16$$

$x^{16 - \frac{3k}{2}} = x^4$

Assim: $16 - \frac{3k}{2} = 4 \Rightarrow k = 8$.

Assim, o termo de x^4 no desenvolvimento dado é:

$$\binom{16}{8} x^4 = \frac{16!}{8!\,8!} x^4 = 12\,870x^4$$

Exemplo 9

Vamos verificar se há termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x^2} - x^3\right)^{10}$.

O termo geral é:

$$\binom{10}{k} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^{10-k} \cdot (-x^3)^k = \binom{10}{k} \cdot (-1)^k \cdot \frac{2^{10-k}}{x^{20-2k}} \cdot x^{3k} = \binom{10}{k} \cdot (-1)^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{5k-20},$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ (*)

O termo independente de x é obtido atribuindo-se *zero* ao seu expoente.

Vejamos: $5k - 20 = 0 \rightarrow k = 4$, que pertence a (*).

Assim, concluímos que o 5º termo é independente de x e seu valor é:

$$\binom{10}{4} \cdot (-1)^4 \cdot 2^{10-4} = \binom{10}{4} \cdot 2^6 = 13\,440$$

Exercícios

21 No desenvolvimento de $\left(\frac{x^2}{3} + x\right)^{12}$, determine o coeficiente de:

a) x^{12} b) x^{18}

22 No desenvolvimento de $(x^2 - 1)^{10}$, determine:

a) o terceiro termo; b) o termo central.

23 No desenvolvimento de $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$, determine:

a) o termo independente de x; b) o termo que contém x^{13}.

24 (Covest-PE) Calcule o coeficiente do termo independente de x em $\left(2x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^5$.

25 O quarto termo no desenvolvimento de $(x + ky^2)^{12}$, segundo potências decrescentes de x, é $1760\,x^9y^6$. Qual é o valor de k?

26 (UF-CE) No desenvolvimento de $\left(ax - \frac{1}{2x}\right)^4$, $x \neq 0$, o termo independente de x é $\frac{27}{2}$. Calcule o valor de a^2.

27 (Unifor-CE) Sejam A e B, respectivamente, o quarto e o quinto termos do desenvolvimento do binômio $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^n$ segundo as potências decrescentes de x. Se $\frac{A}{B} = x^2$, então determine o valor de n.

28 No desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{px^2}\right)^{12}$, o coeficiente do termo em x^{-14} vale $\frac{165}{2}$. Qual é o valor de p^8?

Testes de vestibulares

1 (UF-SE) A soma $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$ é igual a:

a) $\binom{6}{5}$ d) $\binom{8}{4}$

b) $\binom{7}{6}$ e) $\binom{8}{5}$

c) $\binom{8}{7}$

2 (Ucsal-BA) Se um número natural n é tal que $\binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{11}{7} = \binom{12}{n^2 - 2}$, então n é:

a) igual a 6 ou –6.
b) um número par.
c) um número quadrado perfeito.
d) um número maior que 10.
e) divisor de 15.

3 (U. F. Santa Maria-RS)

Se $x = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \ldots + \binom{6}{6}$ e $\binom{y}{1} + \binom{y}{2} + \ldots + \binom{y}{y} = 255$, então $\frac{x}{y}$ vale:

a) 5 c) 8 e) 9
b) 6 d) 7

4 (UF-CE) Se $\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} 3^p = 256$ então o valor de m é:

a) 2 c) 6 e) 10
b) 4 d) 8

5 (PUC-RJ) O coeficiente de a^{13} no binômio $(a + 2)^{15}$ é:

a) 105 c) 360 e) 480
b) 210 d) 420

6 (PUC-PR) O valor da expressão $103^4 - 4 \cdot 103^3 \cdot 3 + 6 \cdot 103^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 103 \cdot 3^3 + 3^4$ é igual a:

a) 10^{14} c) 10^{10} e) 10^6
b) 10^{12} d) 10^8

7 (UE-PI) O coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $\left(3x + \frac{1}{3}\right)^5$ é:

a) 15 b) 18 c) 27 d) 30

8 (PUC-RJ) O coeficiente de x na expansão de $\left[x + \frac{1}{x}\right]^7$ é:

a) 0 b) 7 c) 28 d) 35 e) 49

9 (PUC-MG) No desenvolvimento de $(x + 1)^{10}$, o termo de grau três tem coeficiente:

a) 80 c) 100 e) 135
b) 95 d) 120

10 (Unifor-CE) No desenvolvimento do binômio $\left(x^4 + \frac{2}{x}\right)^8$, segundo as potências decrescentes de x, o quarto termo é:

a) $448x^{17}$ c) $448x^{20}$ e) $448x^{23}$
b) $56x^{17}$ d) $56x^{20}$

11 (Furg-RS) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x^2} + x\right)^6$ é:

a) 4 c) 30 e) inexistente
b) 15 d) 60

12 (UF-AL) O 4º termo do desenvolvimento do binômio $(2x^2 + kx)^8$, segundo as potências decrescentes de x, é igual a $28x^{13}$. Nessas condições, k é um número:

a) negativo. d) racional e não inteiro.
b) divisível por 3. e) múltiplo de 6.
c) irracional.

13 (Cefet-PR) Se o termo médio do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + a^2\right)^6$ é $20 \cdot 2^{-9}$, o valor de a será:

a) $\sqrt[3]{2}$ c) $\frac{1}{2}$ e) 2
b) $\frac{1}{4}$ d) $\sqrt{3}$

14 (ITA-SP) Dadas as afirmações:

I. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$, para $n \in \mathbb{N}$

II. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

III. Existem mais possibilidades de escolher 44 números diferentes entre os números inteiros de 1 a 50 do que escolher 6 números diferentes entre os inteiros de 1 a 50.

Conclui-se que:

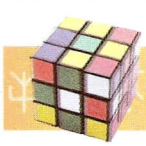
a) todas são verdadeiras.
b) apenas (I) e (II) são verdadeiras.
c) apenas (I) é verdadeira.
d) apenas (II) é verdadeira.
e) apenas (II) e (III) são verdadeiras.

15 (PUC-RS) Se o terceiro termo do desenvolvimento de $(a + b)^n$ é $21 \cdot a^5 \cdot b^2$, então o sexto termo é:

a) $35 \cdot a^4 \cdot b^3$ d) $7 \cdot a \cdot b^6$
b) $21 \cdot a^3 \cdot b^4$ e) $7 \cdot a^2 \cdot b^5$
c) $21 \cdot a^2 \cdot b^5$

16 (Mackenzie-SP) Conhecido o desenvolvimento de $(1 + x)^n$, vê-se que $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 8\binom{n}{3} + \ldots + 2^n\binom{n}{n}$ é:

a) 2^n c) 4^n e) 64 n
b) 3^n d) 32 n



Desafios

1 (Unicap-PE) Quantos elementos possui um conjunto que tem um total de 2048 subconjuntos?

2 Usando o teorema binomial, mostre que $(2{,}03)^8$ é maior que 286.

3 (ITA-SP) Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{R}_+^*$ com $m \geqslant 10$ e $x \in \mathbb{R}_+^*$. Seja D o desenvolvimento do binômio $(a + b)^m$, ordenado segundo as potências crescentes de b. Quando $a = x^n$ e $b = x^{-n^2}$, o sexto termo de D fica independente de x. Quando $a = x$ e $b = x^{-\frac{1}{n}}$, o oitavo termo de D se torna independente de x. Determine o valor de m.

19 MATRIZES

EXERCÍCIOS

1 A: 2 × 4; B: 2 × 2; C: 3 × 1; D: 4 × 2

2 a) $A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$ c) $C = (1 \quad 2 \quad 3)$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 9 & 0 & 11 \\ 13 & 14 & 0 \end{pmatrix}$; diagonal principal: 0, 0 e 0; diagonal secundária: 7, 0 e 13

4 a) *X* e *Y*: 15 km
X e *Z*: 27 km
Y e *Z*: 46 km
b) a própria matriz *D*.

5 a) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ c) $C^t = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

6 x = –2 e y = 2 **7** R$ 7,00

8 a) Cláudio (15 chopes) b) 2

9 a = –2; b = 5; c = 3; d = –1

10 p = 1 e q = –1 **11** a = 1 e k = –1

12 p = 2; q = 3; r = 1; s = 1 **13** x = 1 e y = –1

14 a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

15 a) $s_{ij} = 1 + 4i - j$ e $d_{ij} = -1 + 2i - 3j$
b) $s_{21} = 8$ e $d_{43} = -2$; $s_{21} + d_{43} = 6$
c) não, pois a matriz *S* só possui três colunas.

16 a) $X = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

17 $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

18 verdadeiro

19 a) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 2 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 14 & 19 \\ 2 & 3 \\ 65 & 17 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

20 (6 –8 14)

21 a) $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ c) $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix}$

22 10

23 $X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

24 a) $X = \frac{1}{2}(3C - B)$
b) $X = (B - 2A)^t$
c) $X = A + (4B + 4C)^t$

25 a) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 10 & -18 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -11 \\ -11 & 42 & 86 \\ 0 & 6 & 17 \\ -13 & 54 & 114 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 35 & -7 \\ -21 & -21 \end{bmatrix}$ e) não existe o produto

c) $\begin{pmatrix} 8 \\ -18 \\ 24 \end{pmatrix}$

26 a) $\begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 14 & 9 & 1 \\ -7 & 0 & -14 \\ \frac{7}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & -\frac{5}{2} \\ 23 & 11 \end{bmatrix}$ e) [–42 –23 –15]

c) não existe

27 a) x = 1 e y = 1
b) x = 2 e y = 4

28 94

29 a) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 34 & 22 \\ 27 & -7 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C = \begin{pmatrix} -14 & -6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

c) $(AB) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 63 & 27 \\ -45 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ e $B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Nos itens *a* e *b*, vale a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e subtração. No item *c*, vale a propriedade associativa da multiplicação. Com relação ao item *d*, em geral, não vale a propriedade comutativa da multiplicação de matrizes.

30 a) F; 2800 g
b) F; é 33,3% menor (4000 g × 6000 g)
c) V

31 a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 17 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -36 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

32 a) $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 13 & 25 \end{pmatrix}$

33 a) $\begin{pmatrix} 80 & 60 \\ x & 75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1920 \\ 15x + 900 \end{pmatrix}$

b) 68

34 $x = \frac{3}{2}$ e $y = -\frac{3}{4}$

35 $w = x$ e $z = -2y \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x \end{pmatrix}$;

exemplos: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, etc.

36 a) $\frac{3\pi}{2}$ b) sim; $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$.

37 $S = \{(-3, 3)\}$

38 a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) não existe

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

39 a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{5}{16} \\ -\frac{5}{4} & \frac{29}{16} \end{pmatrix}$

40 $x = -1$

41 a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

42 $X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

43 a) $X = A \cdot B^{-1}$ c) $X = A \cdot B^{-1}$
b) $X = B^{-1} \cdot (A - C)$

44 $T^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \text{sen } \theta \end{pmatrix}$ **45** a) $x = \pm 1$ e $y = 0$

TESTES DE VESTIBULARES

1	a	**5**	d	**9**	a	**13**	a
2	e	**6**	a	**10**	d	**14**	a
3	d	**7**	d	**11**	e	**15**	b
4	c	**8**	b	**12**	b	**16**	a

20 DETERMINANTES

EXERCÍCIOS

1 a) –3 c) 2 e) 36
b) 7 d) –13

2 a) $S = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$ c) $S = \{3\}$
b) $S = \{6, -1\}$

3 a) 20 b) –25 c) –144

4 $x = 13$ **5** $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$

6 $\frac{3}{2}$ **7** zero

8 a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ e (7) **9** –76
b) –1 ou 2

10 a) –208 b) 3 c) 84

11 $S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ **12** 2 **13** –50

TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**5**	e	**9**	a	**13**	b
2	c	**6**	d	**10**	c	**14**	a
3	c	**7**	e	**11**	a		
4	b	**8**	d	**12**	a		

21 SISTEMAS LINEARES

EXERCÍCIOS

1 a) sim b) não c) não d) sim

2 a) não b) sim c) sim d) não

3 a) 1 b) (1, 2, 0), (1, 8, 3), por exemplo.

4 (0, 0), (3, 4), (–6, –8), por exemplo.

5 16, 17, 18, 19 ou 20

6 sim **7** sim

8 a) SPI c) SI
b) SPD d) SPD

9 a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

10 *a*, *c*

11 a) SPD; $S = \left\{\left(\frac{5}{4}, 1, -2\right)\right\}$

b) SPI; $S = \left\{\left(\frac{3 - 2\alpha}{2}, \alpha, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

c) SPD; $S = \{(-8, 4, 1, 2)\}$

d) SPI; $S = \left\{\left(\frac{5 + 3c}{2}, \frac{1 - c}{2}, c\right), c \in \mathbb{R}\right\}$

12 a) 2

b) $S = \left\{\left(\frac{3 - y - 2t}{2}, y, t, t\right)$, sendo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}\right\}$, $\left(\frac{1}{2}, 0, 1, 1\right)$; (2, –1, 0, 0); ...

13 a) (x, 2550 – 2x, x + 400); *x* é o menor salário.
b) (750, 1050, 1150) ou (800, 950, 1200)

14 a) $S = \left\{\left(\frac{19}{13}, \frac{3}{13}\right)\right\}$ c) $S = \varnothing$

b) $S = \{(4 + y, y), y \in \mathbb{R}\}$

15 5 **16** 70%

17 José: 17,5 alqueires e João: 12,5 alqueires.

18 a) $S = \{(1, 0, 2)\}$
b) $S = \{(1, 2, 5)\}$
c) $S = \left\{\left(\frac{1}{5} + \frac{3\alpha}{5}, \frac{\alpha}{5} - \frac{1}{10}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\}$
d) $S = \left\{\left(z + \frac{1}{5}, z - \frac{1}{5}, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$
e) $S = \varnothing$

19 15

20 Carro: R$ 4,00; ônibus: R$ 6,00; caminhão: R$ 7,00.

21 8,9 F **22** 61

23 $S = \left\{\left(\frac{2 + 2\alpha}{3}, \frac{5\alpha - 4}{3}, \alpha\right), a \in \mathbb{R}\right\}$

24 R$ 1900,00

25 a) $S = \{(1, 2)\}$
b) $S = \{(1 - 2z, 1 - z, z), z \in \mathbb{R}\}$
c) $S = \varnothing$

26 a) SPD; $S = \{(0, 0)\}$
b) SPI; $S = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$
c) SPD; $S = \{(0, 0, 0)\}$
d) SPI; $S = \left\{\left(-\frac{y}{2}, y, 0\right), y \in \mathbb{R}\right\}$

27 $m = 1$; $S = \left\{\left(-\frac{y}{2}, y\right), y \in \mathbb{R}\right\}$

28 a) 1 e –2 b) $S = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

29 $m \neq 4$

30 a) $S = \{(-5, 4)\}$
b) $S = \{(2, -5, 3)\}$
c) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)\right\}$

31 $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

32 $D \neq 0 \rightarrow$ SPD; $S = \{(-1, 2, 3, 1)\}$ **33** 20 g

34 a) $\begin{cases} x + y + z = 0{,}5 \\ 5x + 20y + 16z = 5{,}75 \\ y = \frac{1}{3} \cdot (x + z) \end{cases}$

em que *x*, *y* e *z* são as quantidades, em kg, de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará.

35 a) $D = 1$, $\forall\theta$
b) $\{(\cos(\theta - \beta), \text{sen}(\theta - \beta)\}$

36 a) $\begin{cases} m \neq 6 \rightarrow \text{SPD} \\ m = 6 \rightarrow \text{SPI} \end{cases}$
b) $\begin{cases} m \neq -2 \rightarrow \text{SPD} \\ m = -2 \rightarrow \text{SPI} \end{cases}$
c) $\begin{cases} m \neq 3 \rightarrow \text{SPD} \\ m = 3 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$
d) $\begin{cases} m \neq 0 \text{ e } m \neq 2 \rightarrow \text{SPD} \\ m = 0 \text{ ou } m = 2 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$

37 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\det A = 6 - 3c$

b) $c \neq 2$

38 $m = -1$ **39** $a = 2$

40 a) V; note que $D = 4(1 - a)(1 + a)$.
b) V; note que, quando $a = -1$, temos SI e, quando $a = 1$, SPI.
c) F; $S = \left\{\left(\frac{3 + z}{4}, \frac{1 + 3z}{4}, z\right)\right\}$
d) V; $m = \frac{1}{2}$
e) V

41 a) 1 e 3

b) Para o autovalor 1, temos que $X = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$, $\forall x$, e para o autovalor 3, temos que $X = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, $\forall y$.

42 a) $\begin{cases} a \neq 8 \rightarrow \text{SPD} \\ a = 8 \text{ e } b = 20 \rightarrow \text{SPI} \\ a = 8 \text{ e } b \neq 20 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$
b) $\begin{cases} a \neq -4 \rightarrow \text{SPD} \\ a = -4 \text{ e } b = -2 \rightarrow \text{SPI} \\ a = -4 \text{ e } b \neq -2 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$

43 $a = 3$ e $b = 4$

44 a) $\begin{cases} k = 12 \rightarrow \text{SPD} \\ k \neq 12 \rightarrow \text{SI} \end{cases}$ b) $S = \left\{\left(\frac{29}{5}, -\frac{2}{5}\right)\right\}$

45 $\alpha = -4$

TESTES DE VESTIBULARES

1 b **2** a **3** e **4** a **5** c **6** e **7** e **8** e **9** e **10** a **11** a **12** c **13** a) F c) F b) V d) F **14** a **15** b **16** e **17** b **18** c **19** b **20** b **21** b

22 ANÁLISE COMBINATÓRIA

EXERCÍCIOS

1 40 **2** 4096 **3** 243

4 a) 456 976 c) 87 880
b) 358 800 d) 11 040

5 a) 6 561 c) 336
b) 2 916 d) 1 344

6 952

7

Saias	Pares de sapatos
6	7
7	6
21	2
2	21
14	3
3	14

8 900; 648

9 126

10 5 000

11 252

12 1 923 **13** 41

14 a) 60 b) 6 **15** 1 800

16 a) 243 b) 48 c) 112

17 a) 120 c) $\frac{1}{72}$ e) 48 g) 114
b) 30 d) 3 f) $\frac{99}{10}$ h) 16

18 a) n c) n + 3
b) $\frac{1}{n-5}$ d) $\frac{n}{n+1}$

19 $\frac{1}{n+1}$

20 a) S = {2} c) S = {4}
b) S = $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ d) S = {4}

21 a) 20 b) 720 c) n!

22 42 **23** 24

24 a) 336 b) 42 c) 294

25 a) 2 730 b) 52 c) 468

26 a) S = {6} b) S = {4}

27 10 000 nomes

28 a) 26^5 b) $26^5 - A_{26,5}$

29 120 **30** a) 90 b) 17

31 a) 720 b) 20 c) $n^2 - n$ d) 30

32 a) S = {5} b) S = {8}

33 a) 5 040 c) 1 440 e) 720
b) 720 d) 1 440 f) 2 520

34 a) 6 b) 48

35 672 **36** 70 dias

37 72 **38** 51 840

39 1 152 **40** 72

41 63º lugar **42** 36

43 a) 56 b) 120 c) $\frac{n^2 - n}{2}$

44 35 **45** 495

46 a) $C_{52,4}$ b) $C_{51,3}$ c) 6 768

47 a) 15 b) 90

48 a) 120 b) 56

49 a) 28 b) 45

50 180 **51** 15 120

52 a) 96 b) 90

53 a) $C_{60,6} = 50\,063\,860$
b) $C_{30,4} \cdot C_{30,2} = 11\,921\,175$
c) 49 470 085

54 20 **55** 42

56 a) 9,5 anos, aproximadamente b) 10

57 28

58 a) S = {4} b) S = {5} c) S = {9}

59 a) 60 b) 81

60 a) 106 b) 11

61 a) 12 c) 60 e) 420
b) 120 d) 151 200 f) 6

62 10 **63** 120

64 a) 3 360 c) 60
b) 1 260 d) 360

65 a) 10

b) $P_n^{(n_1,n_2)} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = C_{n,\,n_1}$

TESTES DE VESTIBULARES

1 b **2** a **3** e **4** e **5** e **6** c **7** a **8** a **9** e **10** c **11** e **12** d **13** a **14** c **15** a **16** a **17** d **18** e **19** d **20** e **21** e **22** b **23** c **24** d **25** a **26** e

23 PROBABILIDADE

EXERCÍCIOS

1 Ω = {chocolate, cereja, café, laranja, menta}

2 a) A = {5, 6}
b) B = {2, 4, 6}
c) C = {1, 2, 3, 4, 6}

3 {(K, C), (C, K)}, em que K → cara e C → coroa

4 Ω = {{FOR, SL}, {FOR, MAN}, {FOR, REC}, {SL, MAN}, {SL, REC}, {MAN, REC}}

5 a) A = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
b) B = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}

6 a) Ω = {(1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), ..., (6, 1), ..., (6, 6)}
b) E_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}
E_2 = {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}

7 E^c = {(1, 5), (1, 6), (2, 6), (5, 1), (6, 1), (6, 2)}

8 $\frac{1}{3}$ **9** a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

10 a) 35% b) 65%

11 a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$

12 a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{9}$

13 a) x = 400, y = 1 100, z = 300, w = 1 400
b) 20%

14 88,75% **15** 36,4%

16 $\frac{1}{420}$ **17** $\frac{35}{36}$

18 a) 90% b) 10% c) 50%

19 a) $\frac{9}{64}$ b) $\frac{9}{16}$

20 a) 2,25% b) 10,5%

21 60% **22** $\frac{1}{36}$ **23** $\frac{1}{28}$

24 a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{1}{2}$

25 a) 108 b) $\frac{2}{9}$

26 50%

27 a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{7}$

28 a) 3 000 b) $\frac{7}{30}$

29 a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{3}$

30 1, 2 ou 3 **31** a) 20 b) 70%

32 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$

33 a) $\frac{11}{30}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{33}{40}$

34 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$

35 14% **36** $\frac{2}{3}$

37 a) 50% b) $\frac{3}{16}$; 100%

38 a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{2}{3}$

39 a) $\frac{34}{65}$ b) $\frac{5}{17}$

40 a) 2% b) 52,6%

41 a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{4}$

42 a) 9% b) $\frac{1}{15}$

43 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{47}{180}$

44 a) $\frac{12}{19}$ b) $\frac{16}{95}$ **45** 26%

46 a) V c) V e) F; é $\frac{7}{11}$.
b) F; é 44,4%. d) V

47 a) 0,000125%
b) 0,000188%
c) 0,054%; sim, pois tanto o valor apostado como as chances de acerto são 432 vezes maiores.

48 80%

49 a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{36}$

50 16,4% **51** 4,67%

52 8,8% **53** $\frac{5}{16}$; $\frac{1}{32}$

54 a) 59,8% b) 31,5%

55 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{64}$ **56** 83,04%

57 a) $\frac{7}{256}$ b) $\frac{1}{7}$

TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**6**	d	**11**	c	**16**	b	**21**	d
2	c	**7**	a	**12**	c	**17**	e	**22**	e
3	d	**8**	c	**13**	e	**18**	b	**23**	a
4	d	**9**	c	**14**	a	**19**	b	**24**	d
5	b	**10**	a	**15**	a	**20**	e	**25**	c

24 BINÔMIO DE NEWTON

EXERCÍCIOS

1 a) 6 c) 2 e) p + 2
b) 84 d) 9

2 a) S = {8, 5} c) S = {–1, 2, 3}
b) S = {1, 4}

3 a) 15 b) $\frac{5}{8}$ c) n = 14 e p = 4

4 a) 70 b) 252 c) 1

5 a + b

6 a) p = 8 b) 70

7 0; observe que há um número par de parcelas e use a propriedade dos binomiais complementares.

8 a) 34 b) $\frac{25}{6}$ c) 154 d) $2^4 = 16$

9 $\frac{10}{11}$ **10** a = 10

11 S = {7} **12** n = 8

13 210

14 a) $1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6$
b) $x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5$
c) $x^4 - 4x^2 + 6 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$
d) $x^{12} + 6x^9 + 15x^6 + 20x^3 + 15 + \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x^6}$

15 a) $x^2 + 4x + 6 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}$
b) $\frac{1}{x^{10}} - \frac{5}{x^7} + \frac{10}{x^4} - \frac{10}{x} + 5x^2 - x^5$

16 0,832

17 a) 3125
b) $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^7 \cong 0{,}79$

18 a) 2^{20} b) 6560 c) 1

19 0

21 a) 1 b) $\frac{308}{243}$

22 a) $45x^{16}$ b) $-252x^{10}$

23 a) não existe
b) $-165x^{13}$

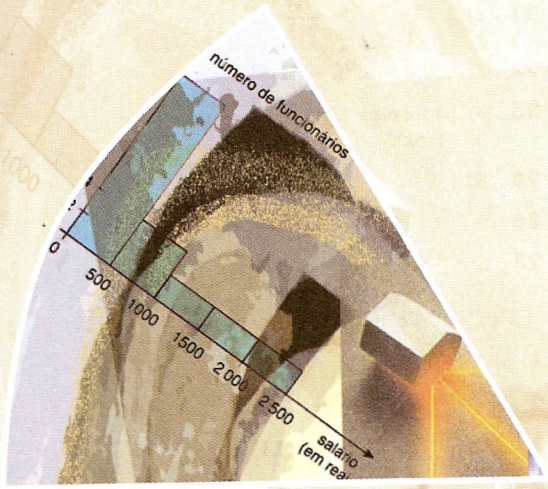
24 80 **25** 2

26 9 **27** n = 11

28 6

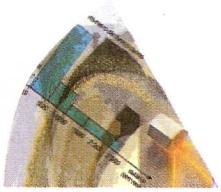
TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**5**	d	**9**	d	**13**	b
2	e	**6**	d	**10**	a	**14**	b
3	c	**7**	d	**11**	d	**15**	c
4	b	**8**	d	**12**	d	**16**	b



• ESTATÍSTICA •

Parte 5



ESTATÍSTICA 25

1 ○ Introdução

Toda pesquisa ou trabalho científico, nas mais variadas áreas, como sociologia, saúde, psicologia, etc., consta, de modo bem geral, das seguintes etapas:

- *coleta* de dados, a partir de uma *amostra* escolhida da população;
- *análise* descritiva com *resumo* e *interpretação* dos dados coletados;
- escolha de um possível modelo explicativo para o comportamento do objeto em estudo, a fim de se fazer, numa etapa posterior, a análise confirmatória dos dados, conhecida como *inferência*.

A ciência que se dedica a esse trabalho é a *Estatística*. Muitos trabalhos estatísticos são amplamente divulgados nos meios de comunicação e, muitas vezes, têm uma relação bem próxima com o nosso cotidiano.

Sobre as etapas acima descritas, podemos dizer que a primeira cabe às técnicas de *Amostragem*, a segunda é reservada à *Estatística Descritiva* e a terceira é objeto de estudo da *inferência Estatística*.

Estudaremos, neste livro, apenas alguns aspectos fundamentais relacionados à *Estatística Descritiva*.

2 ○ Variável

A fim de ter um perfil de seu "público" nos finais de semana, o proprietário de um cinema contratou dois pesquisadores para coletar dados referentes à sua clientela.

Os pesquisadores escolheram seis objetos de estudo: sexo, idade, nível de escolaridade, estado civil, renda familiar mensal e meio de transporte utilizado para chegar ao cinema.

Num final de semana, foram entrevistados vinte freqüentadores desse cinema. Os resultados estão apresentados na tabela seguinte.

Agência Estado

Sexo	Idade	Nível de escolaridade*	Estado civil	Transporte	Renda familiar mensal (em salários mínimos)
masculino	28	M	casado	carro	11,8
masculino	38	M	casado	carro	13,9
feminino	24	S	solteira	carro	12,4
masculino	43	M	casado	carro	19,5
feminino	32	S	separada	ônibus	12,1
feminino	19	M	solteira	a pé	5,0
masculino	22	S	solteiro	ônibus	8,9
masculino	25	M	solteiro	ônibus	13,3
masculino	41	S	casado	a pé	14,7
feminino	40	F	solteira	carro	16,6
feminino	35	S	solteira	carro	9,3
masculino	29	F	casado	carro	11,6
masculino	31	F	separado	carro	10,2
feminino	36	S	solteira	carro	16,0
feminino	48	M	casada	carro	18,8
feminino	23	M	casada	a pé	15,4
masculino	27	S	solteiro	a pé	10,7
masculino	26	S	solteiro	ônibus	8,2
masculino	29	S	separado	ônibus	12,5
masculino	30	F	casado	carro	7,6

* F: ensino fundamental completo; M: ensino médio completo; S: ensino superior completo.

Cada um desses diferentes objetos estudados — os quais permitirão fazer a análise desejada — é denominado *variável*.

Algumas variáveis, como sexo, nível de escolaridade, estado civil e transporte utilizado para chegar ao cinema, apresentam como resultado uma *qualidade, atributo* ou *preferência* da pessoa entrevistada. Variáveis dessa natureza recebem o nome de *variáveis qualitativas*. Se considerarmos, por exemplo, a variável meio de transporte utilizado, diremos que carro, ônibus e "a pé" correspondem às *realizações* dessa variável.

Outras variáveis, como idade e renda mensal, apresentam como resposta um *número*, resultante, nesse exemplo, de *mensuração*. Variáveis assim definidas são chamadas *variáveis quantitativas*. Estudando a variável idade, por exemplo, dizemos que 28, 38, 24, ... são os *valores assumidos* por essa variável.

Cabe ressaltar, por fim, que se os pesquisadores tivessem perguntado: "Quantas vezes por semana você costuma ir ao cinema?", teríamos como objeto de estudo uma variável quantitativa, cujos valores assumidos são resultantes de *contagem*.

Exercícios

1 A direção de um parque contratou uma equipe de pesquisadores para coletar algumas informações sobre seus freqüentadores. Os cem entrevistados responderam às seguintes questões: sexo, idade, número de vezes por semana que vão ao parque, período de visita (manhã, tarde, começo da noite), tempo de permanência e quantia gasta nas dependências do parque. Cada um desses objetos de estudo corresponde a uma variável. Classifique as variáveis quanto ao tipo.

2 Num certo cursinho pré-vestibular, as inscrições foram abertas. Ao inscreverem-se, os estudantes responderam a um questionário do qual constavam, entre outras, as seguintes perguntas:

1. Qual é a área de carreira universitária pretendida?
2. Você cursou o ensino médio em escola particular, municipal ou estadual?
3. Qual é a renda mensal familiar?
4. Quantos irmãos você tem?
5. Qual é a sua disciplina favorita?
6. Quantas vezes você já fez cursinho?
7. Você é usuário da Internet?
8. Qual é, aproximadamente, a distância de sua casa ao cursinho?

Cada uma das questões anteriores define uma variável.

a) Quantas questões definem variáveis qualitativas?
b) Quais questões definem uma variável quantitativa resultante de contagem?

3 ○ Tabelas de freqüência

Os dados brutos apresentados no exemplo do cinema fornecem informações mais resumidas e significativas quando organizados em *tabelas de freqüência*.

Acompanhe os passos necessários à construção dessas tabelas:

- *1º passo:* Para cada variável em estudo, contamos o número de vezes que ocorre cada uma de suas realizações ou valores. O número obtido é chamado *freqüência absoluta* e é indicado por n_i (cada realização de uma variável apresenta um valor para n_i — por esse motivo é que se coloca o índice i).
- *2º passo:* Como é preciso levar em consideração o número total de observações colhidas, definimos a *freqüência relativa* (indica-se por f_i) como a razão entre a freqüência absoluta (n_i) e o número total de observações (n), isto é:

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

- *3º passo:* Como $n_i \leq n$, segue que $0 \leq f_i \leq 1$. Por esse motivo é comum expressarmos f_i em porcentagem.

Exemplo 1

Para a variável estado civil, construímos a seguinte tabela de freqüência:

Estado civil	Freqüência absoluta (n_i)	Freqüência relativa (f_i)	Porcentagem
solteiro	9	$\frac{9}{20} = 0{,}45$	45%
casado	8	$\frac{8}{20} = 0{,}40$	40%
separado	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$	15%
Total	20	1,00	100%

A construção das tabelas de freqüência para as demais variáveis do exemplo anterior é análoga. Muitas vezes, porém, pode ocorrer que os valores assumidos por uma variável quantitativa variem em determinado intervalo real, não havendo, praticamente, repetição de valores. Por exemplo, os valores da renda mensal da tabela da página 414 variam desde 5,0 salários até 19,5 salários, isto é, os valores pertencem ao intervalo [5; 20[. Nesse caso, construímos uma tabela de freqüência em que os dados estão *agrupados* em *classes* (ou *intervalos*) de valores.

Exemplo 2

Utilizando 5 classes de intervalo, todas com o mesmo comprimento, é possível reunir os dados referentes à renda mensal (em salários mínimos) na tabela seguinte:

Classes de valores	Freqüência absoluta (n_i)	Freqüência relativa $\left(\frac{n_i}{n}\right)$	Porcentagem
$5 \vdash 8$	2	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	10%
$8 \vdash 11$	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$	25%
$11 \vdash 14$	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	35%
$14 \vdash 17$	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2$	20%
$17 \vdash 20$	2	$\frac{2}{20} = 0{,}1$	10%
Total	20	1,00	100%

Assim, analisando os dados colhidos por essa amostra, podemos notar que:

- a maioria das famílias dos freqüentadores (35%) desse cinema ganha, por mês, entre 11 e 14 salários mínimos.
- 35% (10% + 25%) das famílias dos freqüentadores recebem até 11 salários mínimos.
- 30% (20% + 10%) das famílias dos freqüentadores recebem pelo menos 14 salários mínimos.

Observações

1ª) A notação $a \vdash b$ refere-se ao intervalo real $[a, b[$, que inclui a, mas não inclui b.

2ª) A *amplitude* da classe $a \vdash b$ é dada pela diferença $b - a$. No exemplo 2, você viu que a amplitude de cada uma das classes é igual a 3.

3ª) Não há regras fixas para a construção das classes da tabela anterior, a partir dos dados brutos. Dependendo da natureza dos dados, podemos ter um número maior ou menor de classes. Procuraremos, na medida do possível, construir classes de *mesma amplitude* e evitaremos, apenas, considerar classes de amplitude muito grande ou muito pequena, a fim de que não haja comprometimento na análise.

Exercícios

Os exercícios 3 a 5 referem-se ao exemplo do cinema, apresentado no item 2.

3 Construa uma tabela de freqüência para a variável sexo.

4 Construa uma tabela de freqüência para a variável nível de escolaridade.

5 Construa uma tabela de freqüência para a variável idade, agrupando os dados em classes de amplitude igual a:

a) 6 b) 10

6 A tabela abaixo refere-se a uma pesquisa realizada com 180 alunos de uma escola, a respeito da carreira universitária pretendida:

Área	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem
Exatas	45	a	b
Biológicas	c	0,35	d
Humanas	e	f	g

Quais os valores de a, b, c, d, e, f e g?

7 Os gastos totais (em reais) em petiscos e bebidas consumidos por vinte famílias em um domingo de sol no piscinão de Ramos, na cidade do Rio de Janeiro, estão abaixo relacionados:

8,80 — 12,40 — 11,00 — 12,00 — 14,80 — 9,60 — 7,60 — 13,40 — 10,20 — 16,00
13,50 — 12,00 — 15,50 — 10,00 — 9,20 — 7,40 — 8,20 — 10,30 — 11,40 — 9,20

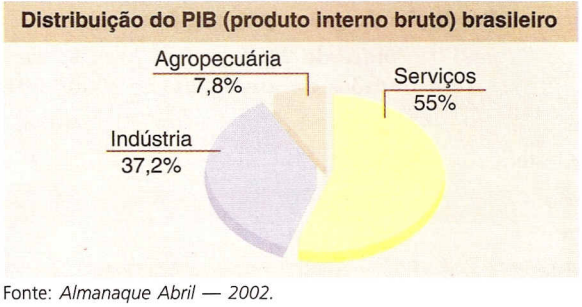
a) Agrupe os dados em classes de amplitude igual a 2 e construa uma tabela de freqüência.
b) Qual é a porcentagem das famílias que consumiram até 11 reais?
c) Qual é a porcentagem das famílias que consumiram entre 9 e 15 reais?

4 Representação gráfica

Os gráficos constituem um poderoso instrumento de análise e interpretação de um conjunto de dados. Eles aparecem nos mais variados veículos de comunicação. Pesquisas de opinião pública, pesquisas eleitorais, economia, agricultura, saúde são apenas alguns exemplos de assuntos em que as representações gráficas assumem um papel fundamental para explicar o comportamento do objeto de estudo. Os mais importantes recursos fornecidos pelos gráficos são a *facilidade* e a *rapidez* na absorção e interpretação dos resultados, por parte do leitor.

Estudaremos, neste volume, quatro tipos de representação gráfica: o gráfico de setores (ou "pizza"), o gráfico de barras (verticais ou horizontais), o histograma e o gráfico de linhas (poligonal).

Gráfico de setores



Fonte: *Almanaque Abril — 2002.*

Para representar graficamente a distribuição do PIB nacional, dividimos um círculo em três partes (setores circulares) cujos ângulos são proporcionais às freqüências correspondentes. Temos, então:

- *Serviços* $\begin{cases} 100\% \text{ —— } 360^\circ \\ 55\% \text{ —— } x \end{cases} \Rightarrow x = 198^\circ$
- *Indústria* $\begin{cases} 100\% \text{ —— } 360^\circ \\ 37{,}2\% \text{ —— } y \end{cases} \Rightarrow y \cong 134^\circ$
- *Agropecuária*: basta fazer $360^\circ - 198^\circ - 134^\circ = 28^\circ$.

Com o auxílio de um transferidor, constrói-se o gráfico acima.

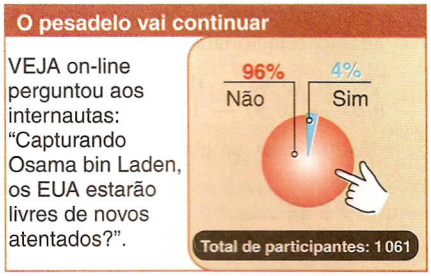
Exercícios

8 A tabela seguinte informa a intenção de duzentos funcionários de uma empresa quanto à utilização do 13º salário.

Intenção	Freqüência absoluta
poupança	60
pagar dívidas	90
compras	40
viagens	10

Faça um gráfico de setores correspondente.

9



Fonte: *Veja*, 28/11/2001.

a) Quais as medidas dos ângulos apresentados no gráfico ao lado?

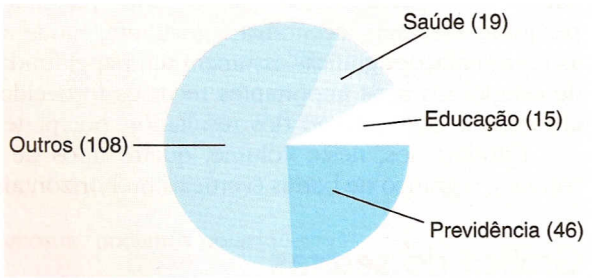
b) Quantos internautas responderam "sim"?

10 (Unesp-SP) O gráfico, publicado pela revista *Veja* de 28/7/99, mostra como são divididos os 188 bilhões de reais do orçamento da União entre os setores de saúde, educação, previdência e outros.

Se os 46 bilhões de reais gastos com a previdência fossem totalmente repassados aos demais setores, de modo que 50% fossem destinados à saúde, 40% à educação e os 10% aos outros, determine o aumento que o setor de saúde teria:

a) em reais;

b) em porcentagem, em relação à sua dotação inicial, aproximadamente.



11

Produção de grãos por regiões

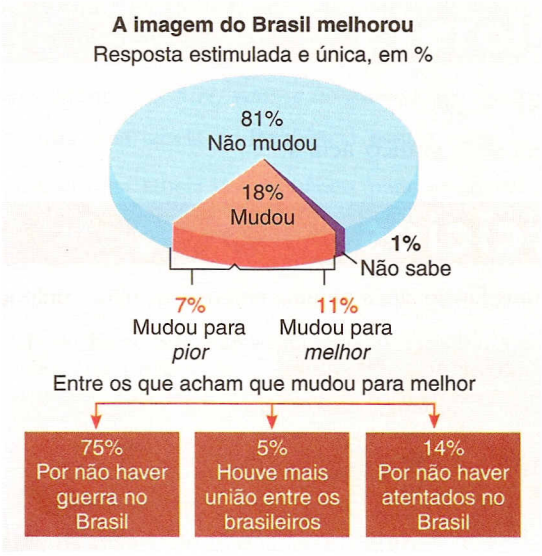
Regiões	Safra de 2001 (em milhões de toneladas)	Variação — 2000/2001 (em %)
Sul	49,512	38,33%
Centro-Oeste	28,274	9,38%
Sudeste	12,476	7,08%
Norte	2,124	–3,76%
Nordeste	6,027	–22,23%

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 21/10/2001.

a) Faça um gráfico de setores para representar a participação de cada região na safra de 2001.

b) Quantos milhões de toneladas foram produzidos, em 2000, nas regiões Sul e Nordeste, respectivamente?

12



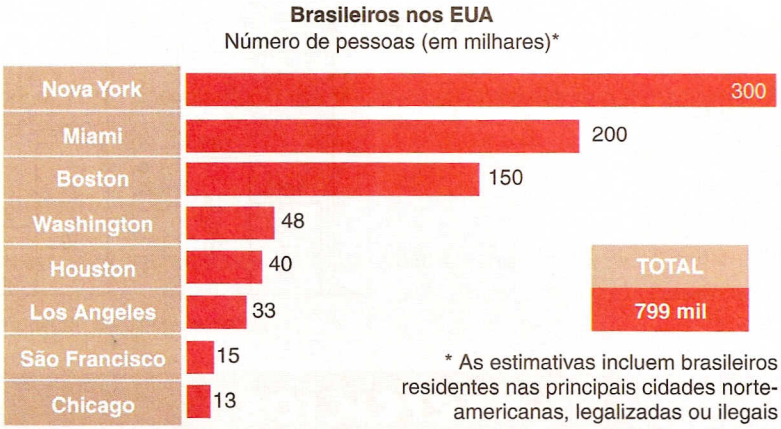
Observando os resultados de uma pesquisa realizada dois meses após os atentados terroristas nos EUA, em 2001, responda:

a) Qual é o ângulo correspondente ao setor que contém a resposta "não mudou"?

b) Se x pessoas foram entrevistadas, qual é, em função de x, o número de pessoas que afirmaram que a imagem do Brasil mudou para melhor por não haver guerra aqui?

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 24/11/2001.

Gráfico de barras

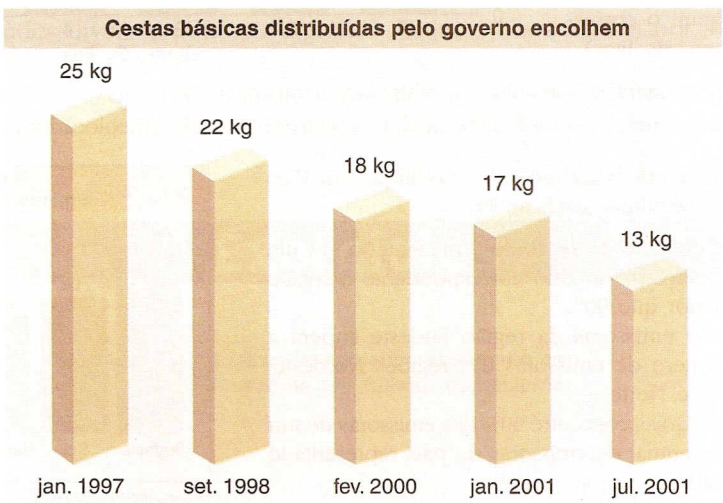


Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 13/9/2001.

O gráfico acima relaciona as principais cidades americanas onde vivem brasileiros.

Ao lado do nome de cada cidade está representado um segmento de reta cujo comprimento é *proporcional* ao número de brasileiros que ali residem. Note que cada centímetro equivale a quase 40 mil brasileiros.

Este gráfico recebe o nome de *gráfico de barras horizontais*.



Fonte: *Folha de S.Paulo*, 2/9/2001.

Nesse gráfico está representado o decréscimo do "peso" da cesta básica distribuída pelo governo aos flagelados da seca.

Observe que a cada ano corresponde uma coluna cujo comprimento é proporcional ao "peso" da cesta. Temos, nesse caso, um exemplo de *gráfico de barras verticais*.

Histograma

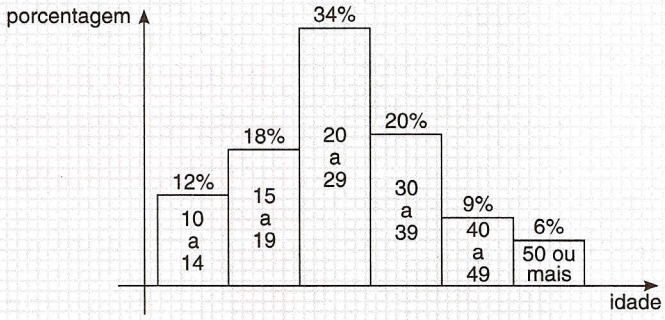
O histograma é uma representação gráfica muito semelhante ao gráfico de barras verticais. Ele é, em geral, usado para representar os valores assumidos por uma variável *quantitativa* quando estes estão agrupados em classes de intervalos.

Exemplo 3

Usuários da Internet por faixa etária (em %)*

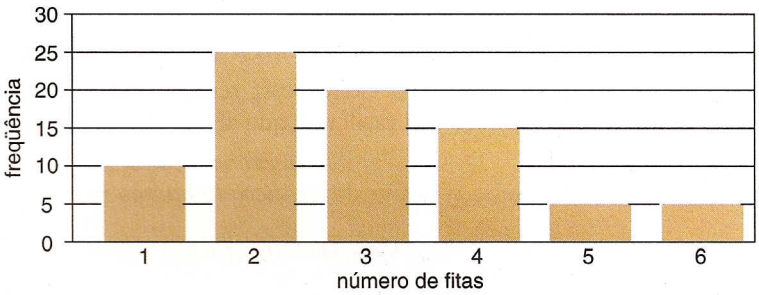
Idade	%
10 ⊢ 14	12
15 ⊢ 19	18
20 ⊢ 29	34
30 ⊢ 39	20
40 ⊢ 49	9
50 ou mais	6

* Pelo menos uma vez por semana
Fonte: *Almanaque Abril — 2002.*



Exercícios

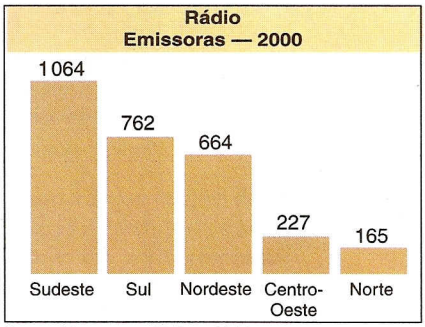
13 (FGV-SP) No gráfico ao lado está representado, no eixo das abscissas, o número de fitas de vídeo alugadas por semana numa videolocadora, e no eixo das ordenadas a correspondente freqüência (isto é, a quantidade de pessoas que alugaram o correspondente número de fitas).



a) Qual a porcentagem de pessoas que alugaram 4 ou mais fitas?
b) Se cada fita é alugada por R$ 4,00, qual a receita semanal da videolocadora?

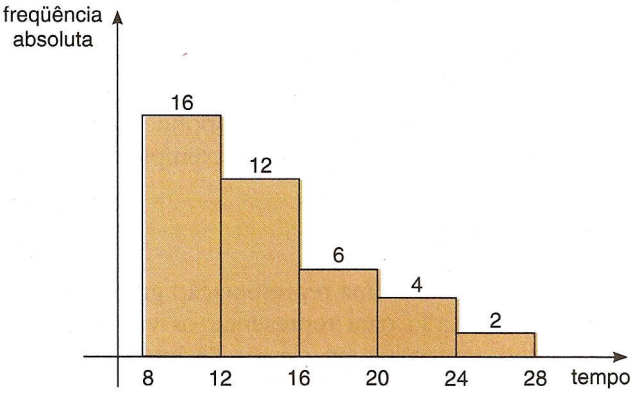
14 Analisando o gráfico de barras ao lado, classifique em *V* ou *F* cada sentença seguinte, justificando:

a) Se esse conjunto de dados fosse representado em um gráfico de setores, o ângulo correspondente à região Sul seria menor que 90°.
b) O número de emissoras da região Sudeste supera a soma do número de emissoras das regiões Nordeste, Centro-Oeste e Norte.
c) Supondo que Goiás concentre 60% das emissoras *de sua região*, o percentual de emissoras do país representado por este Estado é menor que 5%.



Fonte: *Almanaque Abril — 2001.*

15 O histograma ao lado representa o tempo de espera (em minutos) na fila de um banco, em uma certa manhã, no centro de Belo Horizonte.
Que porcentagem do total de pessoas esperou até 20 minutos na fila?



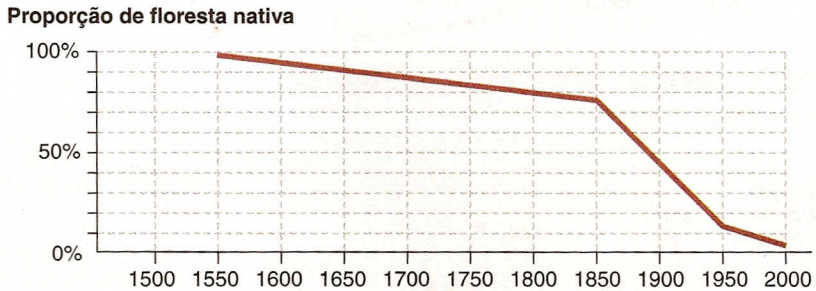
16 Os preços (em reais) de um mesmo produto foram pesquisados em vinte supermercados e estão representados a seguir:

0,82 — 0,96 — 1,21 — 0,92 — 0,96 — 1,05 — 1,20 — 1,10 — 0,85 — 1,02
0,88 — 0,94 — 0,94 — 0,82 — 0,88 — 1,00 — 1,06 — 0,91 — 0,99 — 0,95

A partir do menor preço encontrado, construa classes de intervalo com comprimento igual a 0,1 e faça o histograma correspondente.

Gráfico de linhas (poligonal)

O gráfico ilustra o desmatamento da Mata Atlântica no Brasil, de 1550 a 2000.



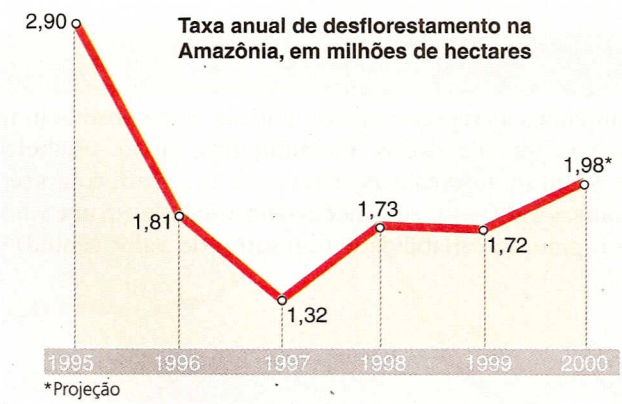
Fonte: *Almanaque Abril — 2002.*

Observe que a cada data está associado o respectivo percentual de mata nativa existente, e assim ficam associados diversos pontos no gráfico. Unindo esses pontos por segmentos de reta, obtemos o chamado *gráfico de linhas* ou *curva poligonal.*

Esse tipo de gráfico — que já foi estudado em funções — é especialmente útil quando se quer representar uma variável cujos valores diminuem ou aumentam no decorrer do *tempo* de maneira contínua.

Exercícios

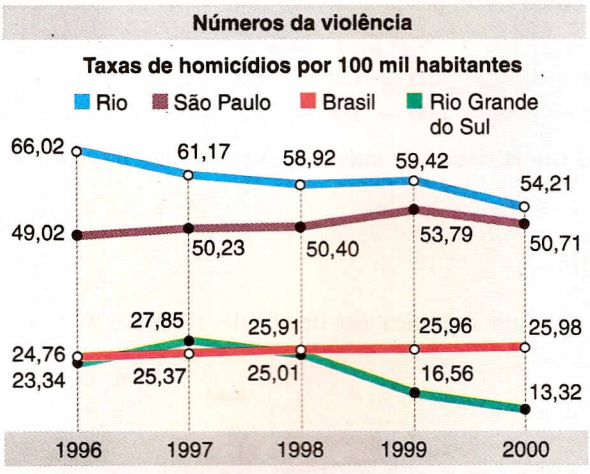
17



Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 17/1/2002.

a) Em que períodos aumentou o desmatamento na Amazônia?
b) Qual foi o acréscimo percentual da área desmatada de 1999 a 2000?
c) Lembrando que 1 hectare equivale a 10^4 m^2, a quantos círculos de raio 1 m equivale a área desmatada em 2000?

18



Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 17/8/2001.

Assinale *V* ou *F* nas afirmativas seguintes, justificando as falsas:

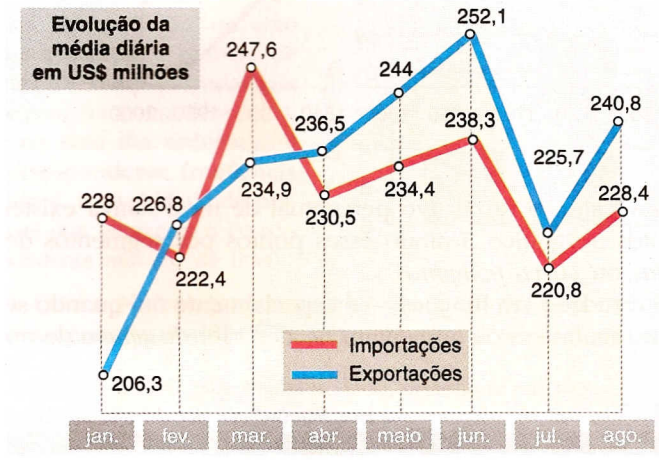
a) No período considerado, a taxa de homicídios no Rio sempre superou a taxa de São Paulo.

b) Em nenhum ano a taxa gaúcha superou a taxa nacional.

c) A taxa no Rio sempre decresceu no período considerado.

d) De 1999 a 2000, as taxas de homicídios diminuíram nos três estados.

19



Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 21/8/2001.

Observando o gráfico ao lado, responda:

a) Em que meses houve superávit da balança comercial, isto é, as exportações superaram as importações?

b) Faça um gráfico de linhas para representar a evolução do superávit médio diário.

c) Que valor *mensal* aproximado corresponde às exportações de abril?

5 Medidas de centralidade

No item anterior estudamos as representações gráficas, que constituem um importante recurso na interpretação de um conjunto de dados. Procuraremos, agora, estabelecer para esses dados *medidas (números)* que sejam representativas, isto é, que resumam como se distribuem os valores de uma variável quantitativa. Para isso, será necessário estabelecer um valor *médio* ou *central* e outro valor que indique o grau de variabilidade (em torno do valor central) dos dados da variável em estudo.

Média aritmética

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os valores de n observações de determinada variável X. Definimos a *média aritmética* — indicada por $\bar{x}$ — como o quociente entre a soma de todos os valores observados e o número total de observações:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exemplo 4

Os gastos diários (em reais) de 15 turistas em Porto Seguro estão indicados a seguir.

$$65 \text{ — } 80 \text{ — } 45 \text{ — } 40 \text{ — } 65 \text{ — } 80 \text{ — } 85 \text{ — } 90$$
$$75 \text{ — } 75 \text{ — } 70 \text{ — } 75 \text{ — } 75 \text{ — } 90 \text{ — } 65$$

Temos:

$$\bar{x} = \frac{65 + 80 + 45 + \ldots + 90 + 65}{15} = \frac{1075}{15} \cong 71{,}70$$

Assim, o gasto diário *médio* desse grupo de turistas é de R$ 71,70.

O significado é: "se todos os turistas gastassem a *mesma* quantia diária, esse valor deveria ser de R$ 71,70 a fim de que fosse gerada a receita total de R$ 1075,00.

Exemplo 5

Em um dia de pesca nos rios do Pantanal, uma equipe de pescadores anotou a quantidade de peixes capturada de cada espécie e o preço pelo qual eram vendidos a um supermercado em Campo Grande:

Tipo de peixe	Quilo de peixe pescado	Preço por quilo
peixe *A*	18	R$ 3,00
peixe *B*	10	R$ 5,00
peixe *C*	6	R$ 9,00

Vamos determinar o preço *médio* do quilograma do peixe vendido pelos pescadores ao supermercado.

Considerando que a variável em estudo é o *preço do quilo do peixe* e fazendo a leitura da tabela, concluímos que foram pescados 18 kg de peixe ao valor unitário de R$ 3,00, 10 kg de peixe ao valor unitário de R$ 5,00 e 6 kg de peixe ao valor de R$ 9,00.

O preço médio por quilograma ($\bar{p}$) é dado por:

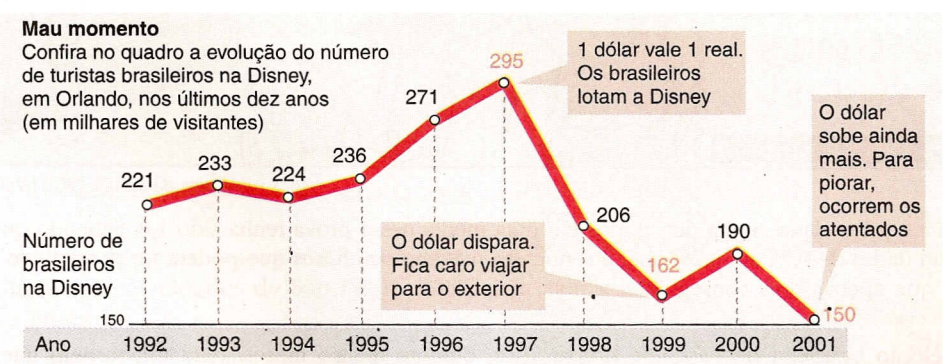
$$\bar{p} = \frac{\overbrace{3{,}00 + 3{,}00 + \ldots + 3{,}00}^{18 \text{ vezes}} + \overbrace{5{,}00 + 5{,}00 + \ldots + 5{,}00}^{10 \text{ vezes}} + \overbrace{9{,}00 + 9{,}00 + \ldots + 9{,}00}^{6 \text{ vezes}}}{18 + 10 + 6}$$

$$\bar{p} = \frac{18 \times 3 + 10 \times 5 + 6 \times 9}{34} = \frac{158}{34} \cong 4{,}65 \text{ reais.}$$

Dizemos, nesse caso, que se trata de uma *média aritmética ponderada*, em que o "fator de ponderação" foi a quantidade de peixes capturada de cada espécie.

Exercícios

20

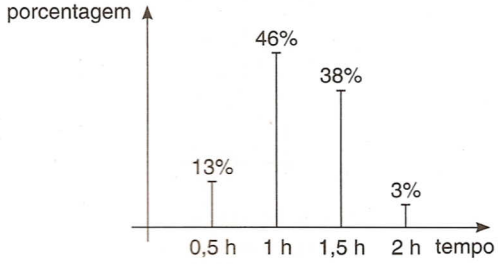


Fonte: *Veja*, 28/11/2001.

a) Calcule o número médio de brasileiros que viajaram à Disney nesses dez anos.

b) Qual foi a média de turistas nos três últimos anos?

21 O gráfico abaixo informa o tempo de permanência de um grupo de turistas em um museu. Qual é o tempo *médio* de visita?



22 A tabela seguinte mostra o número de conduções (ônibus, metrô, etc.) utilizado por um grupo de x alunos para chegar ao cursinho:

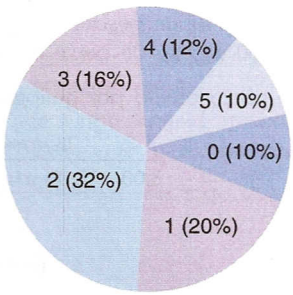
Número de conduções	0	1	2	3
Freqüência absoluta	3	7	4	1

a) Qual é o valor de x?
b) Qual é o número *médio* de conduções tomadas?

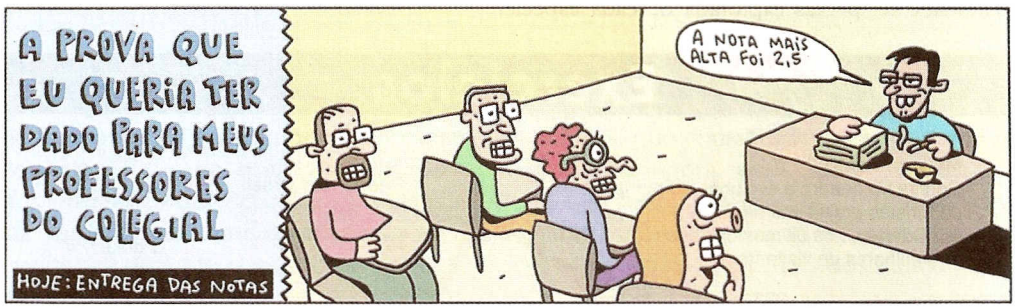
23 (UFF-RJ) Cada um dos 60 alunos da turma A obteve, na avaliação de um trabalho, nota 5 ou nota 10. A média aritmética dessas notas foi 6. Determine quantos alunos obtiveram nota 5 e quantos obtiveram nota 10.

24 (Unicamp-SP) O gráfico ao lado, em forma de pizza, representa as notas obtidas em uma questão pelos 32 000 candidatos presentes à primeira fase de uma prova de vestibular. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses candidatos tiveram nota 2 nessa questão.
Pergunta-se:

a) Quantos candidatos tiveram nota 3?
b) É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi menor ou igual a 2? Justifique sua resposta.



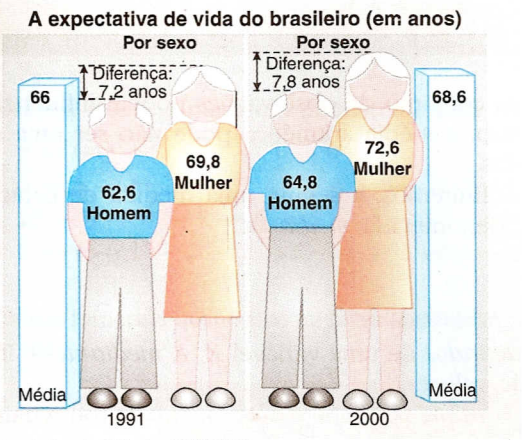
25 **OS PESCOÇUDOS** — Caco Galhardo



(*Folha de S.Paulo*, 10/11/2001.)

Admita que a classe tenha dez alunos e a nota média nessa prova tenha sido 1,8. Sabendo que as notas foram dadas de 0,25 em 0,25, qual é o número máximo de alunos que podem ter conseguido 2,25, uma vez que apenas dois conseguiram a nota mais alta?

26 A seleção brasileira de basquete preparou-se, durante quatro meses, para um torneio internacional, contando com 10 atletas com média de altura de 1,94 m. Na véspera do embarque, um atleta de 2,06 m contundiu-se e o técnico decidiu substituí-lo, convocando, às pressas, um ala de 1,90 m. Determine a média de altura da seleção que embarcou para o torneio.

27 

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 4/12/2001.

a) Que cálculo foi feito para se chegar às médias nacionais de expectativa de vida em 1991 e em 2000?

b) Qual era a porcentagem de homens e a de mulheres na população nas duas datas consideradas?

c) Qual o acréscimo percentual da participação feminina na população de 1991 a 2000?

28 O proprietário de um hotel solicitou à gerência que lhe enviasse um levantamento sobre a ocupação dos quartos em um feriado prolongado. Esse levantamento foi enviado por fax. Entretanto, por erro de comunicação, dois valores saíram apagados, conforme indicado ao lado.

Se durante o feriado havia, *em média*, 2,5 pessoas por quarto, e além disso 72,5% dos quartos tinham ocupação de até 3 pessoas, determine os valores que não aparecem no fax.

Número de pessoas por quarto	Freqüência absoluta
1	55
2	apagado
3	30
4	40
5	apagado

Mediana e moda

Introdução

A tabela do lado, extraída do *Almanaque Abril* de 2002, mostra a população das 26 capitais brasileiras (sem levar em conta a região metropolitana de cada uma), excluindo o Distrito Federal.

Capitais	População 2001
São Paulo (SP)	10 405 867
Rio de Janeiro (RJ)	5 851 914
Salvador (BA)	2 440 828
Belo Horizonte (MG)	2 232 747
Fortaleza (CE)	2 138 234
Curitiba (PR)	1 586 848
Recife (PE)	1 421 993
Manaus (AM)	1 403 796
Porto Alegre (RS)	1 360 033
Belém (PA)	1 279 861
Goiânia (GO)	1 090 737
São Luís (MA)	868 047
Maceió (AL)	796 842
Teresina (PI)	714 583
Natal (RN)	709 536
Campo Grande (MS)	662 534
João Pessoa (PB)	595 429
Cuiabá (MT)	483 044
Aracaju (SE)	461 083
Florianópolis (SC)	341 781
Porto Velho (RO)	334 585
Vitória (ES)	291 941
Macapá (AP)	282 745
Rio Branco (AC)	252 885
Boa Vista (RR)	200 383
Palmas (TO)	137 045
Total	**38 345 321**

▶ **1º** Vamos calcular a população *média* das capitais brasileiras. Indicando-a por $\overline{p}$, temos:

$$\overline{p}_1 = \frac{38\,345\,321}{26} \cong 1\,474\,820$$

Observe que apenas 6 das 26 capitais têm população que ultrapassa esse valor médio. Além disso, a população de São Paulo é 7 vezes maior que essa média.

▶ **2º** Vamos calcular a média nacional, eliminando a cidade de São Paulo:

$$\overline{p}_2 = \frac{38\,345\,321 - 10\,405\,867}{25} \cong 1\,117\,578$$

▶ **3º** Calculemos, agora, a nova média nacional, eliminando as cidades de São Paulo e Rio de Janeiro.

$$\overline{p}_3 = \frac{38\,345\,321 - 10\,405\,867 - 5\,851\,914}{24} \cong$$

$$\cong 920\,314$$

Observe que, nesse último caso, ao desprezarmos as cidades com populações muito elevadas (SP e RJ), obtivemos para a população média um valor que reflete uma distribuição mais homogênea das populações de outras capitais.

De modo geral, dados discrepantes em um conjunto de observações podem influenciar bastante no cálculo da média aritmética. Nesse caso, a média aritmética pode não ser uma medida central *muito* apropriada para análise dos dados.

Para contornar questões dessa natureza, definiremos, a seguir, uma medida de centralidade mais "resistente" às observações discrepantes, denominada *mediana*.

Mediana

Sejam $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ os n valores *ordenados* de uma variável X. A *mediana* — indicada por Me — é o valor central desse conjunto de valores.

Notemos que a mediana é o valor tal que o *número de observações menores* (ou iguais) *a ela* é *igual ao número de observações maiores* (ou iguais) *a ela*.

Exemplo 6

O número de dias de viagem de férias de onze funcionários de uma empresa está relacionado a seguir:

$$8 — 7 — 12 — 9 — 6 — 11 — 5 — 7 — 8 — 9 — 15$$

Qual é o número mediano de dias de viagem?

- Ordenamos esses valores:

$$5 — 6 — 7 — 7 — 8 — 8 — 9 — 9 — 11 — 12 — 15 \ (*)$$

- Como o número de dados é ímpar (n = 11), a mediana é igual à 6ª observação de (*): $M_e = 8$.

Exemplo 7

Na introdução sobre população de capitais brasileiras, como o número de cidades é n = 26 (par), definimos $M_e = \frac{x_{13} + x_{14}}{2}$, isto é, a mediana é a média aritmética entre as populações da 13ª e da 14ª capitais (quando elas estão ordenadas). Assim:

$$M_e = \frac{\text{pop. Maceió} + \text{pop. Teresina}}{2} = \frac{796\,842 + 714\,583}{2} \cong 755\,713 \text{ habitantes}$$

Observe que o valor encontrado para a mediana é próximo ao valor encontrado para a média, quando forem eliminadas as cidades de São Paulo e Rio de Janeiro.

Moda

Moda de um conjunto de valores — indicada por Mo — é a realização (ocorrência) mais freqüente entre os valores observados.

Exemplo 8

Vamos encontrar a moda de cada um dos seguintes conjuntos de valores:

a) 5 — 8 — 11 — 8 — 3 — 4 — 8

A moda é Mo = 8, pois há três observações iguais a 8.

b) 2 — 3 — 9 — 3 — 4 — 2 — 6

Há duas modas: 2 e 3. Dizemos que se trata de uma distribuição *bimodal*.

c) 1 — 3 — 4 — 6 — 9 — 11 — 2

Nesse caso, todos os valores "aparecem" com a mesma freqüência unitária. Assim, não há moda nessa distribuição.

Exercícios

29 Calcule a média, a moda e a mediana de cada um dos seguintes conjuntos de valores:

a) 0 — (–1) — 1 — 2 — 1 — 0

b) 6 — 5 — 5 — 4 — 7 — 9 — 8 — 5 — 5 — 4 — 3 — 11 — 7

c) 10 — 9 — 8 — 7 — 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1 — 0 — (–1) — (–2) — (–3)

d) 1 — 1 — 1 — 2 — 2 —2 — 2 — 3 — 3 — 3 — 3 — 3 — 4 — 4 — 4 — 4 — 4 — 4 — 5

30 A tabela fornece a quantidade de faltas registradas pelos funcionários de uma pequena empresa, durante um mês:

Número de faltas	0	1	2	3	4
Freqüência absoluta	30	18	7	3	2

a) Quantos funcionários tem essa empresa?

b) Determine os valores das medidas centrais associadas ao número de faltas.

c) Faça um gráfico de barras para representar a situação descrita.

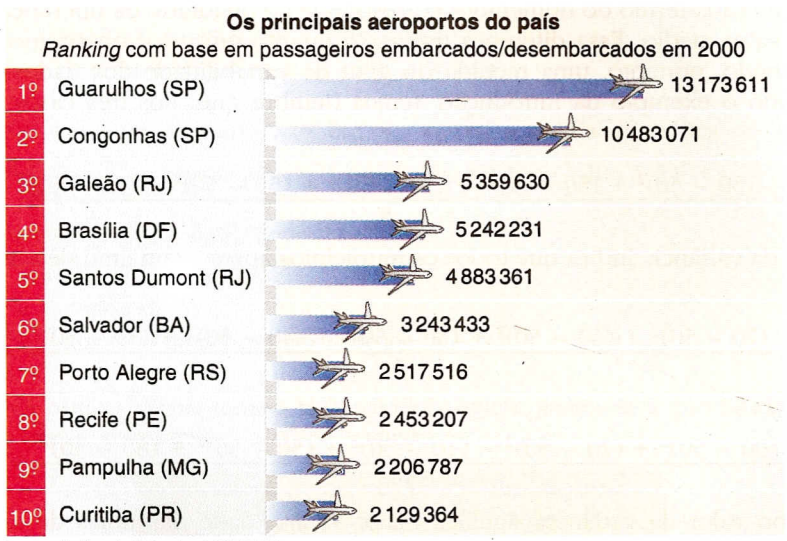
31 Os dados *ordenados* abaixo referem-se ao número de desistências mensais de reservas solicitadas a uma companhia aérea:

$$48 — 52 — 58 — 63 — 68 — x — 76 — 82 — y — 96 — 98 — 102$$

a) Sabendo que a mediana desses valores é 73 e que a média é 75, quais os valores de x e de y?

b) Supondo que em cada um dos cinco meses seguintes o número de desistências variou entre 50 e 60, qual será o valor da mediana desses 17 meses?

32



Fonte: *Folha de S.Paulo*, 16/9/2001.

a) Considerando apenas esses aeroportos, qual é a porcentagem de passageiros embarcados/desembarcados na região Sudeste?

b) Calcule a média e a mediana do número de passageiros transportados considerando os dados acima. Refaça o cálculo, sem considerar os aeroportos de São Paulo.

c) Suponha que, no aeroporto de Congonhas, 70% dos vôos sejam realizados durante a semana. Estime a ordem de grandeza do número *diário* de passageiros que circulavam em Congonhas numa segunda-feira de 2000.

6 ○ Medidas de dispersão

Introdução

Um pequeno país é dividido em três regiões, *X*, *Y* e *Z*, cada uma com cinco municípios (de mesma população). A tabela seguinte informa o grau de satisfação (notas de 0 a 100) da população de cada município em relação à respectiva administração municipal.

Região X	50	50	50	50	50
Região Y	70	60	30	40	50
Região Z	90	20	10	50	80

Calculando as *médias aritméticas* dos índices de satisfação, encontramos, para cada região, a nota 50. Restringindo nossa análise a apenas esse valor, concluiríamos que as regiões apresentam índices médios equivalentes. Isso, porém, não é suficiente para análise, pois esse valor não traz informações em relação à homogeneidade ou heterogeneidade dos municípios de uma mesma região. Daí a necessidade de se definir uma medida que revele o *grau de variabilidade* dos índices de satisfação em uma mesma região.

Variância

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os valores assumidos por uma variável *X* e $\overline{x}$ a média aritmética desses valores. Chamamos *variância de X* — indicamos por Var(X) ou σ^2 (σ é a letra minúscula grega chamada sigma) — ao número real positivo:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Notemos que cada termo do numerador corresponde ao quadrado da diferença entre um valor observado e o valor médio. Essa diferença traduz "o quanto um valor observado se distancia do valor médio", sendo, portanto, uma medida do grau de variabilidade dos dados em estudo.

Considerando o exemplo da introdução, temos (lembre que, nos três casos, $\overline{x} = 50$):

- Região *X*

$$\sigma^2 = \frac{(50 - 50)^2 + (50 - 50)^2 + (50 - 50)^2 + (50 - 50)^2 + (50 - 50)^2}{5} = 0$$

O valor *nulo* da variância indica que todos os municípios apresentam grau de satisfação idêntico.

- Região *Y*

$$\sigma^2 = \frac{(70 - 50)^2 + (60 - 50)^2 + (30 - 50)^2 + (40 - 50)^2 + (50 - 50)^2}{5} = 200$$

- Região *Z*

$$\sigma^2 = \frac{(90 - 50)^2 + (20 - 50)^2 + (10 - 50)^2 + (50 - 50)^2 + (80 - 50)^2}{5} = 1\,000$$

O aumento no valor da variância significa maior variabilidade das notas de satisfação da população de municípios de uma mesma região. Observe que, na região *Z*, as notas estão mais "distantes" do valor médio (50) em comparação com a distribuição das notas da região *Y*.

Observação

A variância é definida como uma soma de quadrados, sendo, portanto, uma medida *quadrática*. Por exemplo, se estivéssemos estudando a altura dos alunos de uma turma, a altura média seria expressa em metros (m), porém a variância seria expressa em metros ao quadrado (m^2), o que geraria uma incompatibilidade em relação às unidades. Para uniformizá-las, definiremos o desvio padrão.

Desvio padrão

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os valores assumidos por uma variável X. Chamamos *desvio padrão de* X — indicamos por DP(X) ou σ — a raiz quadrada da variância de X:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Exemplo 9

Vamos calcular o desvio padrão das notas de cada uma das regiões do problema anterior:

- Região X: $\sigma^2 = 0 \Rightarrow \sigma = 0$
- Região Y: $\sigma^2 = 200 \Rightarrow \sigma = \sqrt{200} \cong 14{,}1$
- Região Z: $\sigma^2 = 1000 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1000} \cong 31{,}6$

Exercícios

33 Para cada um dos conjuntos de valores seguintes, forneça o desvio padrão:

a) 2 — 1 — 5 — 3 — 2

b) 70 — 65 — 60 — 60 — 65 — 68 — 72 — 60

c) 2 — 2 — 2 — 2 — 3 — 3 — 3 — 3 — 3 — 3 — 3

34 (Unicamp-SP) Para um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ a média aritmética de X é definida por $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ e a variância de X é definida por $v = \frac{1}{4}[(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_4 - \bar{x})^2]$.

Dado o conjunto $X = \{2, 5, 8, 9\}$, pede-se:

a) Calcular a média aritmética de X.

b) Calcular a variância de X.

c) Quais elementos de X pertencem ao intervalo $[\bar{x} - \sqrt{v}, \bar{x} + \sqrt{v}]$?

35 Durante as 65 partidas de um torneio nacional de basquete, anotou-se a quantidade de cestas de três pontos convertidas, como mostra a tabela seguinte:

Número de cestas de três pontos	Freqüência absoluta
0	4
1	5
2	20
3	19
4	12
5	5

Determine o desvio padrão do número de cestas de três pontos convertidas.

36 Na tabela seguinte estão representadas as taxas de analfabetismo nos continentes:

Continente	África	América do Norte	América Central	América do Sul	Ásia	Europa	Oceania
Analfabetismo (%)	40,3	1,1	11,7	11,7	24,9	1,3	4,6

Fonte: *Almanaque Abril — 2001.*

a) Calcule a média e o desvio padrão da taxa de analfabetismo referente aos dados dos 7 continentes destacados na tabela.

b) Considerando apenas a América do Norte, a Europa e a Oceania, determine a média da taxa de analfabetismo.

c) Intuitivamente, o desvio padrão nesses continentes (item *b*) é menor ou maior do que o obtido no item *a*? Comprove sua resposta, efetuando o cálculo necessário.

37 (FGV-SP) Dados n valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, seja M sua média aritmética. Chama-se variância desses valores ao número σ^2 dado por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M)^2}{n}$$

A raiz quadrada não negativa da variância chama-se desvio padrão.

a) Se em cada um de 10 meses consecutivos um fundo de investimentos render 1% ao mês, qual o desvio padrão dessas taxas de rendimento?

b) Se em cada um de 6 meses consecutivos o fundo render 1% ao mês e render 3% ao mês em cada um dos quatro meses seguintes, qual o desvio padrão dessas taxas de rendimento?

38 A tabela seguinte informa a participação percentual dos Estados da região Nordeste no PIB (produto interno bruto) nacional:

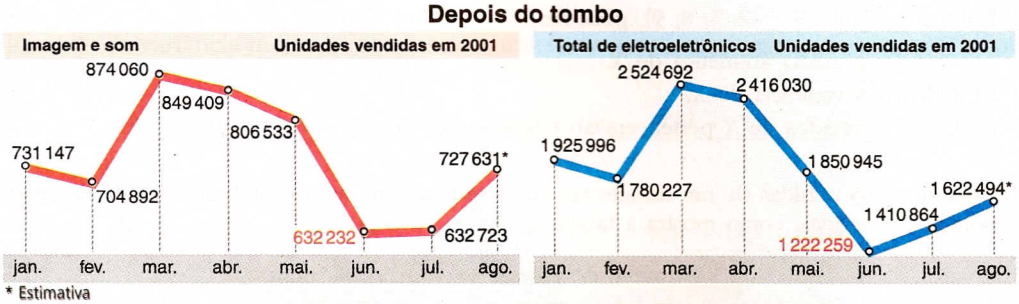
Alagoas	0,9%	Maranhão	1%	Piauí	0,5%
Bahia	4,4%	Paraíba	0,7%	Rio Grande do Norte	0,9%
Ceará	1,8%	Pernambuco	2,3%	Sergipe	0,5%

Fonte: *Almanaque Abril — 2002.*

a) Calcule a média $(\bar{x})$ e o desvio padrão (σ) dos percentuais acima.

b) Quantos estados têm participação pertencente ao intervalo $\left[\bar{x} - \frac{1}{2}\sigma, \bar{x} + \frac{1}{2}\sigma\right]$?

39



Refeita do impacto do racionamento, população voltou às compras e setor respira aliviado

Ainda não é uma sensação de euforia, mas de alívio é. De uns dias para cá, o clima começou a mudar entre os fabricantes de eletroeletrônicos, produtos que demarcam o comportamento do mercado de consumo. Não se pode comemorar ainda como uma arrancada, mas há a convicção de que a queda chegou ao fim. Bateu no fundo do poço. Os números caminham todos na mesma direção, para cima. O "grande susto" aconteceu em junho, quando as famílias, apavoradas com o estardalhaço do racionamento, "desligaram tudo", como diz um executivo do setor.

Quando percebeu que poderia recuperar parte do conforto e mesmo assim manter-se na meta do gasto de energia, o consumidor retomou as compras. Isso aconteceu já em julho.

(*O Estado de S. Paulo*, 6/9/2001.)

a) Considerando os sete meses de venda, faça uma tabela para representar a variação da participação percentual das vendas de aparelhos de imagem e som em relação ao total de eletroeletrônicos vendidos. Como você pode explicar o aumento percentual a partir de maio?

b) Calcule a média dos percentuais encontrados no item anterior.

c) Qual é o desvio padrão desses percentuais?

40 Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os n valores assumidos por uma variável quantitativa. Uma medida de dispersão usual é o *desvio médio*, que é indicado por DM e definido por:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

a) Lembrando que $\bar{x}$ é a média aritmética desses valores, calcule o desvio médio para o seguinte conjunto de valores: {2, 3, 5, 4, 8, 8}.

b) O que aconteceria com o desvio médio se fossem retirados os módulos na definição acima?

Medidas de centralidade e dispersão para dados agrupados

Suponhamos que uma variável quantitativa apresente seus valores agrupados em classes de intervalos. Para calcularmos medidas de centralidade (média, mediana e moda) e medidas de dispersão (variância e desvio padrão), é necessário supor que, em cada classe, os valores se distribuem de forma *simétrica em torno do ponto médio* daquele intervalo. Desse modo, se uma classe contém n valores, assumimos que esses n valores são iguais ao correspondente ponto médio da classe. A partir daí, devemos seguir o mesmo procedimento usado para dados não agrupados.

Exemplo 10

Durante 60 dias, anotou-se o número de cartas entregues, diariamente, em um edifício residencial. Os resultados são mostrados a seguir.

I. *Cálculo da média e do desvio padrão*

Número de cartas entregues por dia	Freqüência absoluta	Porcentagem	Ponto médio do intervalo
20 ⊢ 30	5	8,3%	25
30 ⊢ 40	9	15%	35
40 ⊢ 50	20	33,3%	45
50 ⊢ 60	18	30%	55
60 ⊢ 70	8	13,3%	65

- Considerando os pontos médios de cada intervalo e ponderando-se pelas respectivas porcentagens (ou pelas freqüências absolutas) vem:

$$\bar{x} = \frac{25 \cdot 8{,}3 + 35 \cdot 15 + 45 \cdot 33{,}3 + 55 \cdot 30 + 65 \cdot 13{,}3}{100}$$

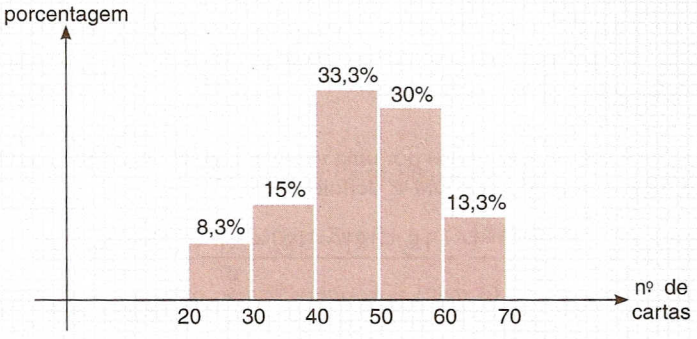
$$\bar{x} \cong 47{,}5 \text{ cartas}$$

- Os cálculos da variância e do desvio padrão obedecem à mesma suposição: todos os valores dentro de uma classe são iguais ao ponto médio da classe. Assim (agora usamos a freqüência absoluta):

$$\sigma^2 = \frac{(25 - 47{,}5)^2 \cdot 5 + (35 - 47{,}5)^2 \cdot 9 + (45 - 47{,}5)^2 \cdot 20 + (55 - 47{,}5)^2 \cdot 18 + (65 - 47{,}5)^2 \cdot 8}{60}$$

$$\sigma^2 = 125{,}42 \Rightarrow \sigma \cong 11{,}2 \text{ cartas}$$

II. *Cálculo da mediana e da moda*

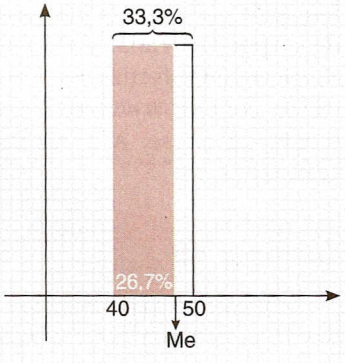


Lembrando que a *mediana* é o valor que deixa 50% das observações à sua esquerda e 50% à sua direita, é fácil perceber que ela se encontra na 3ª classe (de 40 a 50), pois a porcentagem *acumulada* ao final das *três* primeiras classes já ultrapassa 50% (8,3 + 15 + 33,3 = 56,6%). Ao final das *duas* primeiras classes, a porcentagem de observações *acumulada* é de 8,3 + 15 = 23,3%. Isso mostra que do valor 40 até a mediana estão concentradas 50 – 23,3 = 26,7% das observações. Podemos, então, estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{50 - 40}{33{,}3\%} = \frac{Me - 40}{26{,}7\%} \Rightarrow Me \cong 48$$

$\frac{50 - 40}{33{,}3\%}$: porcentagem referente ao intervalo $40 \vdash 50$

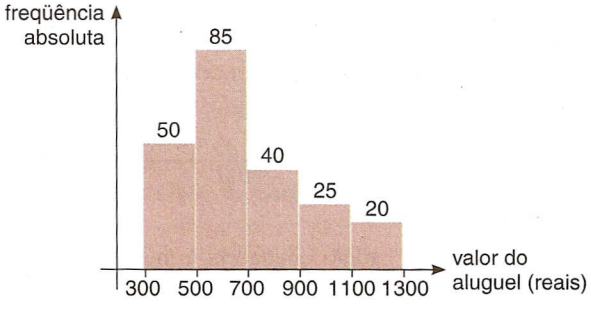
$\frac{Me - 40}{26{,}7\%}$: porcentagem referente ao intervalo $40 \vdash Me$ (retângulo colorido)



Para determinar a *moda*, identificamos inicialmente a classe que reúne a *maior porcentagem* de observações. No exemplo, é a classe de 40 a 50 cartas. A moda é definida como o valor correspondente ao ponto médio dessa classe, isto é, Mo = 45.

Exercícios

41 Uma imobiliária situada no litoral fez um levantamento sobre o valor do aluguel mensal de x apartamentos ocupados durante uma temporada de verão. Os dados estão apresentados no histograma seguinte:



a) Determine x.

b) Qual foi a média mensal de locação na temporada em questão?

c) Qual foi a mediana mensal de locação na temporada em questão?

42 Na tabela estão indicados os percentuais correspondentes à população *urbana* de cada um dos Estados brasileiros, além do Distrito Federal:

Estado	População urbana (%)	Estado	População urbana (%)	Estado	População urbana (%)
AC	66,4	MA	59,5	RJ	96,0
AL	68,0	MT	79,4	RN	73,3
AP	89,0	MS	84,1	RS	81,7
AM	74,8	MG	82,0	RO	64,1
BA	67,1	PA	66,5	RR	76,1
CE	71,5	PB	71,1	SC	78,7
DF	95,7	PR	81,4	SP	93,4
ES	79,5	PE	76,5	SE	71,4
GO	87,9	PI	62,9	TO	74,3

Fonte: *Almanaque Abril — 2002.*

a) Agrupe essas informações em classes de amplitude 8,0, a partir de 59, e construa uma tabela de freqüência.

b) Calcule a média e a mediana utilizando os dados agrupados.

43

Estado	IDH	Estado	IDH	Estado	IDH
AC	0,754	MA	0,547	RJ	0,844
AL	0,538	MT	0,767	RN	0,668
AP	0,786	MS	0,848	RS	0,869
AM	0,775	MG	0,823	RO	0,820
BA	0,655	PA	0,703	RR	0,818
CE	0,590	PB	0,557	SC	0,863
DF	0,869	PR	0,847	SP	0,868
ES	0,836	PE	0,615	SE	0,731
GO	0,786	PI	0,534	TO	0,587

IDH: Representa o índice de desenvolvimento humano, que considera os seguintes quesitos: expectativa de vida, grau de escolaridade e renda *per capita* da população. A escala varia de 0 a 1. Quanto mais próximo de 1, melhor é a qualidade de vida da população. (*Almanaque Abril — 2002.*)

a) Agrupe os Estados brasileiros em classes de amplitude 0,1 e faça um histograma representativo.

b) Calcule a média e o desvio padrão do IDH utilizando os dados agrupados.

c) A Organização das Nações Unidas (ONU) sugere a seguinte tabela para IDH:

Elevado: 0,801 a 0,935

Médio: 0,507 a 0,798

Baixo: 0,252 a 0,484

Que porcentagem de Estados brasileiros tem IDH elevado? Qual deve ser o aumento percentual do IDH no Amazonas a fim de que este seja considerado elevado?

44 Um radar fotográfico, instalado em uma rodovia na qual o limite de velocidade é de 100 km/h, registrou em uma semana x multas por excesso de velocidade, assim distribuídas:

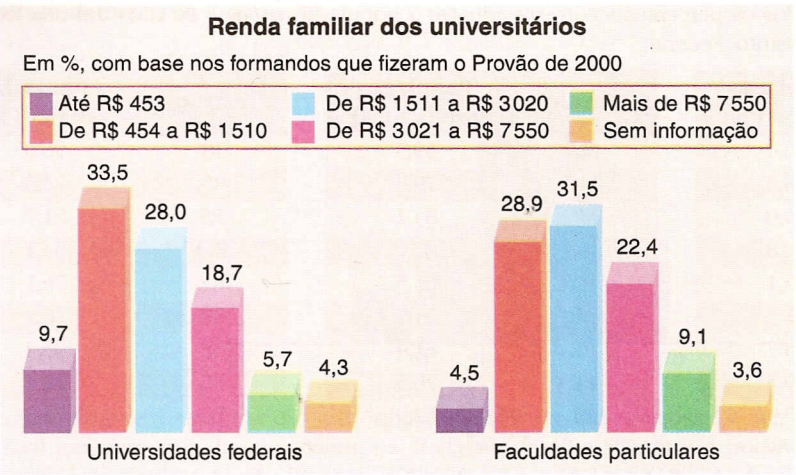
Velocidade em km/h	Número de ocorrências
$101 \vdash 108$	34
$108 \vdash 115$	41
$115 \vdash 122$	35
$122 \vdash 129$	22
$129 \vdash 136$	18

a) Determine o valor de x.

b) Calcule a média, a moda, a mediana e o desvio padrão da velocidade dos veículos multados.

c) Se o valor das multas varia de acordo com a faixa de velocidade ultrapassada, começando por R$ 180,00 e aumentando sempre 20% em relação à faixa anterior, determine o valor médio das multas aplicadas.

45

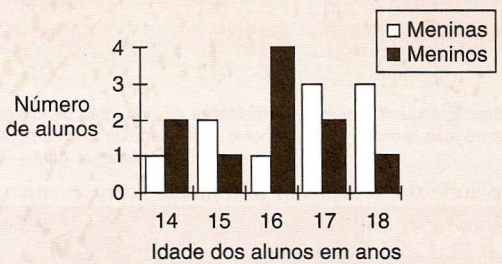


Fonte: *Folha de S.Paulo*, 28/10/2001.

Calcule, em cada caso, a renda média familiar dos universitários. Para isso, admita que na primeira classe a renda varie de R$ 200,00 a R$ 453,00 e na última classe de R$ 7 550,00 a R$ 10 000,00. Despreze o último intervalo ("sem informação"), isto é, faça os cálculos sobre 95,7% e 96,4%, respectivamente.

Testes de vestibulares

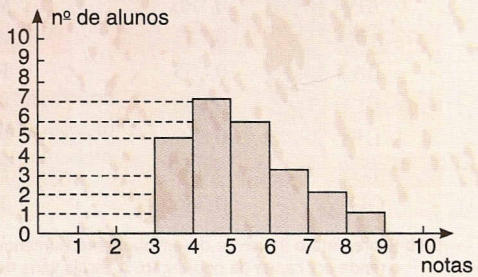
1 (U. F. São Carlos) Num curso de iniciação à informática, a distribuição das idades dos alunos, segundo o sexo, é dada pelo gráfico seguinte.



Com base nos dados do gráfico, pode-se afirmar que:

a) o número de meninas com, no máximo, 16 anos é maior que o número de meninos nesse mesmo intervalo de idade.
b) o número total de alunos é 19.
c) a média de idade das meninas é 15 anos.
d) o número de meninos é igual ao número de meninas.
e) o número de meninos com idade maior que 15 anos é maior que o número de meninas nesse mesmo intervalo de idades.

2 (Unopar-PR) Um professor, para analisar o desempenho de seus alunos, construiu o seguinte gráfico:



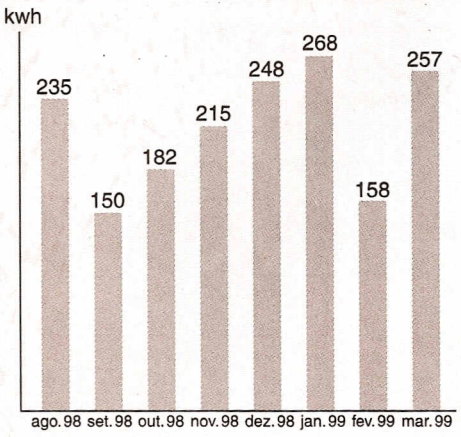
Para construir esse gráfico, o professor agrupou as notas obtidas da seguinte forma: a primeira coluna indica a quantidade de alunos que tiraram notas entre 3 e 4, incluindo os que tiveram nota 3 mas não os que tiveram nota 4; a segunda coluna, por sua vez, indica a quantidade de alunos que tiraram entre 4 e 5, incluindo os que tiraram 4 mas não a nota 5, e assim por diante.
Analisando-se esse gráfico, pode-se concluir que:

a) um dos alunos obteve nota maior que 9.
b) a maior nota da classe foi 7.
c) a nota média da classe está entre 8 e 9.
d) 50% da classe tirou nota menor que 5.
e) ao todo, 8 alunos tiraram nota menor que 5.

3 (UF-MG) Define-se a média aritmética de n números dados como o resultado da divisão por n da soma dos n números dados. Sabe-se que 3,6 é a média aritmética de 2,7; 1,4; 5,2 e x. O número x é igual a:

a) 2,325 b) 3,1 c) 3,6 d) 5,1

4 (UE-RJ) Observe o demonstrativo do consumo de energia elétrica.
Para conhecimento, demonstramos abaixo a evolução do consumo de energia elétrica dos últimos meses.



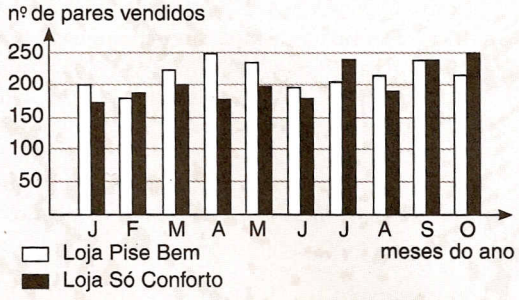
Considere que o consumo médio, de agosto de 1998 a dezembro de 1998, foi igual ao que ocorreu de janeiro de 1999 a abril de 1999. O consumo no mês de abril de 1999, em kWh, foi igual a:

a) 141 b) 151 c) 161 d) 171

5 (UF-RN) Uma prova foi aplicada em duas turmas distintas. Na primeira, com 30 alunos, a média aritmética das notas foi 6,40. Na segunda, com 50 alunos, foi 5,20.
A média aritmética das notas dos 80 alunos foi:

a) 5,65 b) 5,70 c) 5,75 d) 5,80

6 (Puccamp-SP) O gráfico de barras seguinte apresenta as quantidades de pares de sapatos vendidos pelas lojas Pise Bem e Só Conforto durante os meses de janeiro a outubro do ano 2000.



Analisando-se esse gráfico, conclui-se que é verdade que

a) o número de vendas da loja Pise Bem ultrapassou o da loja Só Conforto em metade dos meses considerados.

b) o número de vendas da loja Só Conforto ultrapassou o da loja Pise Bem em 30% dos meses considerados.

c) a loja Pise Bem vendeu mais do que 700 pares de sapatos no primeiro trimestre de 2000.

d) a loja Só Conforto vendeu menos do que 500 pares de sapatos no segundo trimestre de 2000.

e) a loja Pise Bem vendeu 500 pares de sapatos a mais do que a loja Só Conforto nos últimos quatro meses considerados.

7 (U. Tuiuti-PR) Numa população, a razão do número de mulheres para o de homens é de 11 para 10. A idade média das mulheres é 34 e a idade média dos homens é 32. Então a idade da população é aproximadamente:

a) 32,90 c) 33,05 e) n.d.a.
b) 32,95 d) 33,00

8 (FEI-SP) Foram inspecionados dois lotes de peças. A média dos diâmetros das peças do primeiro lote é 4,3 cm. A média dos diâmetros do segundo é 3,5 cm. Juntando-se os dois lotes a média é 4,0 cm. Quantas peças há no total, se o primeiro lote possui 4 peças a mais do que o segundo?

a) 10 c) 14 e) 16
b) 11 d) 15

9 (UFU-MG) Em uma classe de 40 alunos as notas obtidas em um teste formaram a seguinte distribuição:

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de alunos	4	4	8	1	2	7	7	5	1	1

Nesse caso, a nota mediana é:

a) 3 c) 7 e) 5
b) 8 d) 6

10 (UMC-SP) Um grupo de 10 pesquisadores teve dois de seus integrantes substituídos. A soma de suas idades era 112 anos. Com a chegada dos substitutos, a idade média do grupo diminuiu em 5 anos. Sabendo-se que um dos novos pesquisadores tem 30 anos, a idade do outro deve ser:

a) 25 anos c) 30 anos e) 46 anos
b) 32 anos d) 45 anos

11 (Fuvest-SP) Sabe-se que a média aritmética de 5 números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. O maior valor que um desses inteiros pode assumir é:

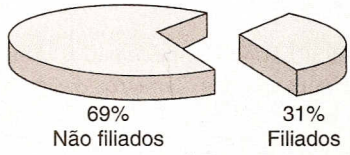
a) 16 b) 20 c) 50 d) 70 e) 100

12 (Fuvest-SP) Considere os seguintes dados, obtidos em 1996 pelo censo do IBGE:

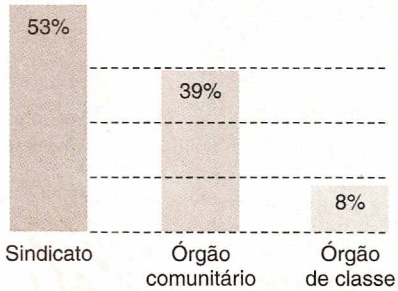
1. A distribuição a população por grupos de idade é

Idade	Número de pessoas
de 4 a 14 anos	37 049 723
de 15 a 17 anos	10 368 618
de 18 a 49 anos	73 644 508
50 anos ou mais	23 110 079

2. As porcentagens de pessoas maiores de 18 anos filiadas ou não a sindicatos, órgãos comunitários, órgãos de classe são:



3. As porcentagens de pessoas maiores de 18 anos filiadas a sindicatos, órgãos comunitários e órgãos de classe são:



A partir dos dados acima, pode-se afirmar que o número de pessoas, maiores de 18 anos, filiadas a órgãos comunitários é, aproximadamente, em milhões:

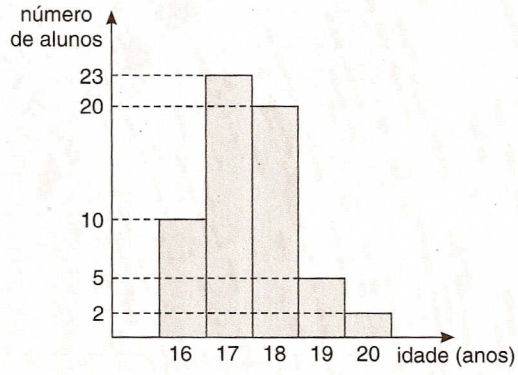
a) 2 c) 12 e) 31
b) 6 d) 21

13 (UF-MG) No início de uma partida de futebol, a altura média dos 11 jogadores de um dos times era 1,72 m. Ainda no primeiro tempo, um desses jogadores, com 1,77 m de altura, foi substituído. Em seu lugar, entrou um outro que media 1,68 m de altura. No segundo tempo, outro jogador do mesmo time, com 1,73 m de altura, foi expulso.

Ao terminar a partida, a altura média dos 10 jogadores desse time era:

a) 1,69 m b) 1,70 m c) 1,71 m d) 1,72 m

14 (Fuvest-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma classe é dada pelo gráfico abaixo.



Qual das alternativas representa melhor a média de idades dos alunos?

a) 16 anos e 10 meses
b) 17 anos e 1 mês
c) 17 anos e 5 meses
d) 18 anos e 6 meses
e) 19 anos e 2 meses

15 (UFF-RJ) Para que a média aritmética das notas de uma turma de 20 alunos aumentasse em 0,1, alterou-se uma dessas notas para 7,5.
Antes da alteração, tal nota era:

a) 5,5 d) 7,6
b) 6,0 e) 8,5
c) 7,4

16 (Fuvest-SP) Uma prova continha cinco questões, cada uma valendo 2 pontos. Em sua correção, foram atribuídas a cada questão apenas as notas 0 ou 2, caso a resposta estivesse, respectivamente, errada ou certa. A soma dos pontos obtidos em cada questão forneceu a nota da prova de cada aluno.
Ao final da correção, produziu-se a seguinte tabela, contendo a porcentagem de acertos em cada questão:

Questão	1	2	3	4	5
% de acerto	30	10	60	80	40

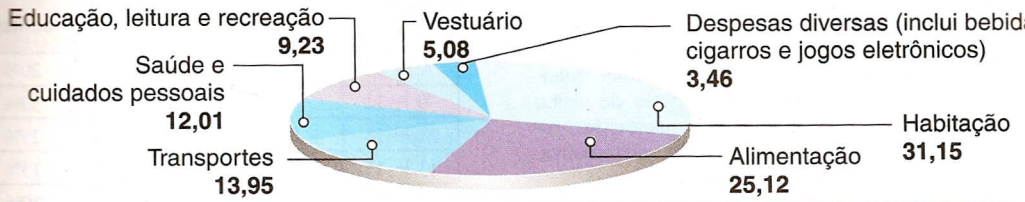
Logo, a média das notas da prova foi:

a) 3,8 c) 4,2 e) 4,6
b) 4,0 d) 4,4

Desafios

1 **Retrato do orçamento familiar**

Itens que mais pesam (%)



Capital	Renda média familiar (em salários mínimos)	Renda *per capita* (em salários mínimos)
Belém	7,52	1,95
Belo Horizonte	10,76	2,69
Brasília	23,83	6,40
Curitiba	12,59	3,57
Florianópolis	12,06	3,34
Fortaleza	9,34	2,24
Goiânia	7,42	1,86
Porto Alegre	12,73	3,88
Recife	9,08	2,26
Salvador	6,06	1,43
Rio de Janeiro*	17,20	5,60
São Paulo*	15,62	4,27

* Para o Rio e São Paulo, os dados são referentes à Pesquisa do Orçamento Familiar de 1997/98.

Fonte: *O Estado de S.Paulo*, 15/3/2001.

a) Considerando que, nos primeiros meses de 2002, o salário mínimo era de R$ 200,00, aproximadamente, analise as afirmações seguintes, classificando-as em *V* ou *F*, justificando:

I. Em Belém, uma família gastava, em média, R$ 468,00 por mês em moradia.

II. No Recife, um indivíduo gastava menos de R$ 65,00 por mês em transportes.

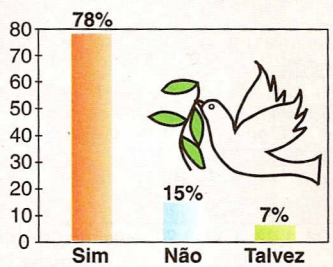
III. Os gastos com saúde de uma família em Fortaleza superavam os gastos com transportes de uma família em Goiânia.

IV. Descontados os gastos com habitação e alimentação, sobravam a uma família paulistana menos de R$ 1 300,00 por mês.

b) Em relação à variável renda média familiar, determine média, mediana e desvio padrão, considerando as 12 capitais pesquisadas.

c) Juntamente com a tabela, o jornal traz um artigo que menciona uma disparidade entre as regiões Sul/Sudeste e Norte/Nordeste. Utilizando a variável renda *per capita*, calcule a média e o desvio padrão correspondente para confirmar tal fato. Comparando os desvios padrões obtidos com o desvio padrão nacional, nota-se uma diminuição considerável. Qual é a razão dessa diferença?

2 **Você acha que o homem é capaz de encontrar o caminho para a paz?**



A esperança e a paz são sentimentos que se casam com as perspectivas para o segundo ano do novo milênio. A crença de que possamos viver em um mundo menos beligerante quase sempre está associada com a fé em um mundo menos materialista.

Essa idéia pôde ser constatada através da pesquisa feita, em Fortaleza, pelo *Diário do Nordeste*. [...]

(*Diário do Nordeste*, 2/1/2002.)

Suponhamos que após um ano tal pesquisa tenha-se repetido com os mesmos entrevistados. Os novos resultados revelaram mudanças entre os que haviam respondido "não": 40% passaram a afirmar que "sim"; $\frac{7}{30}$ deles passaram a "talvez", e o restante permaneceu no "não".

a) Admitindo ainda que quem havia respondido "sim" ou "talvez" não tenha mudado de opinião, construa o novo gráfico de barras que represente o resultado da pesquisa.

b) Qual foi o acréscimo (ou decréscimo) percentual verificado para cada resposta, em comparação com a situação inicial?

Respostas dos exercícios e testes

25 ESTATÍSTICA

EXERCÍCIOS

1 Sexo: qualitativa; idade: quantitativa, resultante de mensuração; número de vezes por semana: quantitativa, resultante de contagem; período de visita: qualitativa; tempo de permanência: quantitativa, resultante de mensuração e quantia gasta: quantitativa, resultante de mensuração.

2 a) 4 (1ª, 2ª, 5ª e 7ª) b) 4ª e 6ª questões

3

Sexo	Freqüência absoluta (n_i)	Freqüência relativa (f_i)	Porcentagem
masculino	12	0,6	60%
feminino	8	0,4	40%
Total	20	1,0	100%

4

Nível de escolaridade	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	%
ensino fundamental completo	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20%
ensino médio completo	7	$\frac{7}{20} = 0,35$	35%
ensino superior completo	9	$\frac{9}{20} = 0,45$	45%

5 a)

Idade	Freqüência absoluta (n_i)	Freqüência relativa (f_i)	Porcentagem
19 ⊢ 25	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20%
25 ⊢ 31	7	$\frac{7}{20} = 0,35$	35%
31 ⊢ 37	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20%
37 ⊢ 43	3	$\frac{3}{20} = 0,15$	15%
43 ⊢ 49	2	$\frac{2}{20} = 0,1$	10%
Total	20	1,00	100%

b)

Idade	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	%
19 ⊢ 29	8	$\frac{8}{20} = 0,4$	40%
29 ⊢ 39	8	$\frac{8}{20} = 0,4$	40%
39 ⊢ 49	4	$\frac{4}{20} = 0,2$	20%

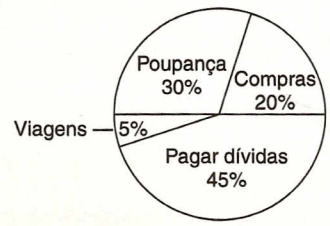
6 a = 0,25; b = 25%; c = 63; d = 35%; e = 72; f = 0,4; g = 40%

7 a)

Gastos (em reais)	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem
7 ⊢ 9	4	0,20	20%
9 ⊢ 11	6	0,30	30%
11 ⊢ 13	5	0,25	25%
13 ⊢ 15	3	0,15	15%
15 ⊢ 17	2	0,10	10%

b) 50% c) 70%

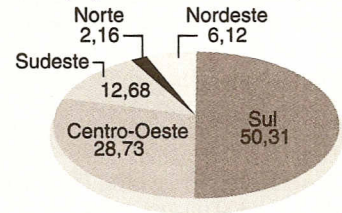
8



9 a) 345,6° e 14,4° b) 42

10 a) 23 bilhões b) 121%

11 a) **Participação na safra de 2001 (em %)**



b) Sul: 35,79; Nordeste: 7,75

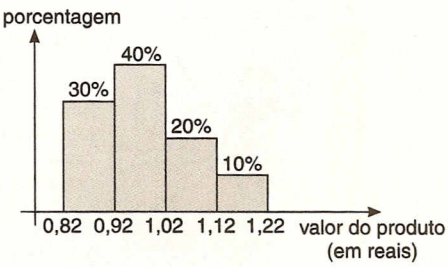
12 a) 291,6° b) 0,0825 x

13 a) 31,25% b) R$ 940,00

14 a) F; seria de aproximadamente 95°
b) V; pois essa soma é 1056
c) V; é 4,72%

15 85%

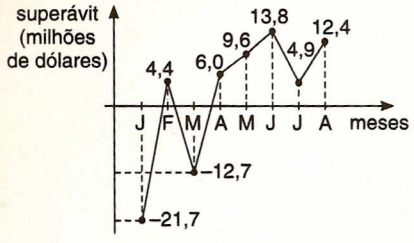
16



17 a) de 1997 a 1998 e de 1999 a 2000.
b) 15,1%
c) aproximadamente 6,3 trilhões

18 a) V
b) F; em 1997 a taxa do Rio Grande do Sul superou a nacional.
c) F; de 1998 a 1999 a taxa cresceu.
d) V

19 a) fevereiro, abril, maio, junho, julho, agosto
b)



c) 7095 milhões de dólares

20 a) 218800 b) 167333

21 aproximadamente 1 h e 9 min

22 a) 15 b) 1,2

23 48 alunos tiraram nota 5 e 12 alunos tiraram nota 10.

24 a) 5120 b) Não, foi 2,3.

25 5 **26** 1,924 m

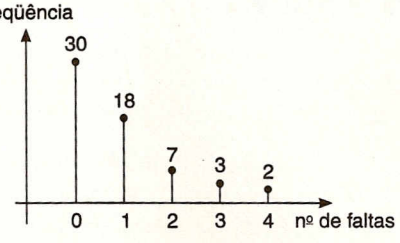
27 a) média aritmética ponderada
b) Em 1991, homens: 52,78%, mulheres: 47,22%
Em 2000, homens: 51,28%, mulheres: 48,72%
c) 3,17%

28

...	...
2	60
...	...
...	...
5	15

29 a) $\bar{x}$ = 0,5; Mo = 0 e 1; Me = 0,5
b) $\bar{x} \cong 6{,}08$; Mo = 5; Me = 5
c) $\bar{x}$ = 3,5; não há moda; Me = 3,5
d) $\bar{x} \cong 2{,}89$; Mo = 4; Me = 3

30 a) 60 b) média: 0,82; mediana: 0,5; moda: 0
c)



31 a) x = 70 e y = 87 b) 63

32 a) 69,8%
b) $\bar{x} \cong 5{,}17$ milhões de passageiros;
Me ≅ 4,064 milhões de passageiros
Sem os aeroportos de SP: $\bar{x} \cong 3{,}5$ milhões de passageiros, Me ≅ 2,88 milhões de passageiros
c) 28000

33 a) 1,36 b) 4,45 c) 0,48

34 a) 6 b) 7,5 c) 5 e 8

35 1,25

36 a) $\bar{x}$ = 13,7% e σ = 13,29% b) $\bar{x}$ = 2,3%
c) Menor, pois esses 3 continentes formam um bloco homogêneo; σ = 1,6%

37 a) 0 b) aproximadamente 0,98%

38 a) $\bar{x} \cong 1{,}44$; σ ≅ 1,19 b) 4

39 a)

Meses	Participação percentual
janeiro	37,9%
fevereiro	39,6%
março	34,6%
abril	35,2%
maio	43,6%
junho	51,7%
julho	44,8%
agosto	44,8%

Com o racionamento de energia, o consumidor reduziu as compras de aparelhos que apresentam maior consumo, como geladeira, *freezer* e condicionador de ar.

b) 41,5% c) 5,4%

40 a) 2 b) Seu valor seria sempre igual a 0.

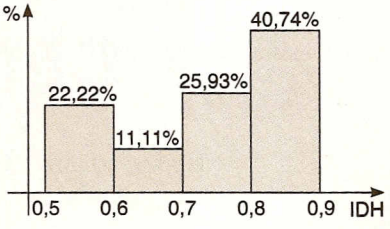
41 a) 220 b) R$ 690,90 c) R$ 641,25

42 a)

Percentuais da população urbana	Freqüência absoluta	Freqüência relativa	Porcentagem	Ponto médio da classe
59 ⊢ 67	5	0,186	18,6%	63
67 ⊢ 75	8	0,296	29,6%	71
75 ⊢ 83	8	0,296	29,6%	79
83 ⊢ 91	3	0,111	11,1%	87
91 ⊢ 99	3	0,111	11,1%	95

b) média: 76,32%; mediana: 75,49%

43 a)



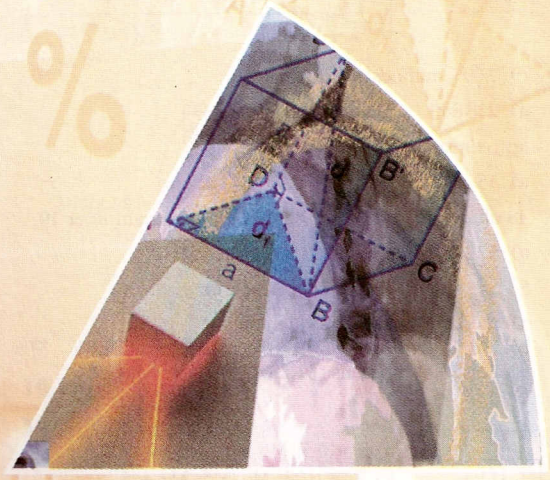
b) $\bar{x}$ = 0,735; σ = 0,117 c) 40,74% e 3,355%

44 a) 150 c) R$ 250,73
b) $\bar{x} \cong 116{,}1$ km/h
Me = 115 km/h
Mo = 111,5 km/h
σ ≅ 9,1 km/h

45 R$ 2595,13 e R$ 3106,43

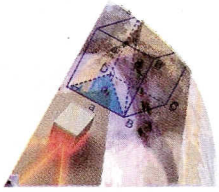
TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**5**	a	**9**	d	**13**	c
2	d	**6**	b	**10**	b	**14**	c
3	d	**7**	c	**11**	d	**15**	a
4	a	**8**	e	**12**	c	**16**	d



• GEOMETRIA •

Parte 6



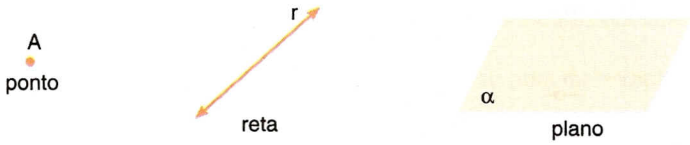
26 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

1 Introdução

Neste capítulo estudaremos os entes geométricos, como pontos, retas, planos, ângulos e outros, *sem* nos preocuparmos com medidas — trataremos apenas de suas *posições*. Para tanto, vamos estabelecer alguns conceitos e propriedades.

2 Noções primitivas e postulados

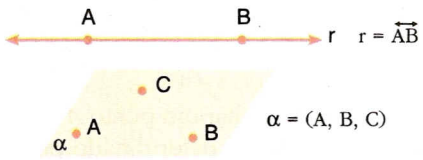
As primeiras noções, na Geometria, chamadas *noções primitivas*, são as de ponto, reta e plano, conhecidas intuitivamente.



As primeiras propriedades na Geometria, apresentadas a seguir, são chamadas *postulados* e relacionam as noções de ponto, reta, plano e espaço.

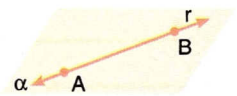
- **1º** *Postulado da existência*
  a) Existe reta, e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
  b) Existe plano, e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

- **2º** *Postulado da determinação*
  a) Dois pontos distintos determinam uma única *reta* que passa por eles.
  b) Três pontos não colineares determinam um único *plano* que passa por eles.

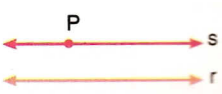


- **3º** *Postulado da inclusão*
  Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela *está contida* no plano.
  Na figura ao lado, temos:

  $(A \neq B, r = \overleftrightarrow{AB}, A \in \alpha, B \in \alpha) \Rightarrow r \subset \alpha$



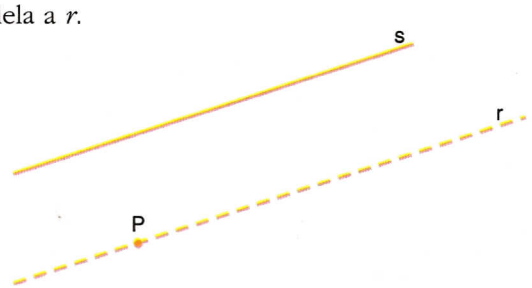
- **4º** *Postulado das paralelas*
  Por um ponto passa uma *única* reta paralela a uma reta dada.
  Na figura ao lado, dada a reta *r*, temos: $P \in s$, $s \parallel r$, *s* é *única*.
  Esse postulado, conhecido também como *postulado de Euclides* (300 a.C.), é a propriedade que caracteriza a Geometria Euclidiana.



3 ○ Determinação de retas e planos

Retas

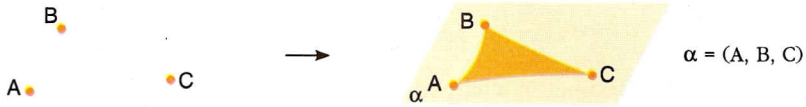
Além da maneira indicada no item *a* do 2º postulado, uma reta pode ser determinada por um ponto e uma direção. Para determinar a reta *r*, basta que tenhamos um ponto P ∈ r e a direção de *r*, dada por uma reta *s*, paralela a *r*.



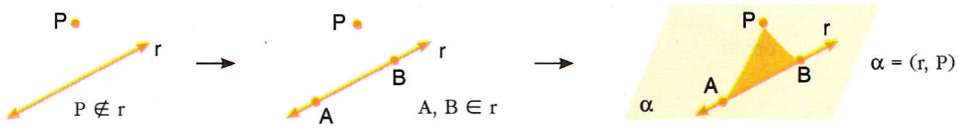
Planos

Um plano pode ser determinado de quatro modos, a saber:

▶ **1º** *Por três pontos não colineares* (item *b* do 2º postulado)

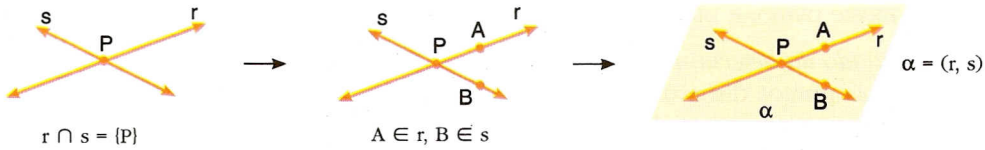


▶ **2º** *Por uma reta e um ponto fora dela*



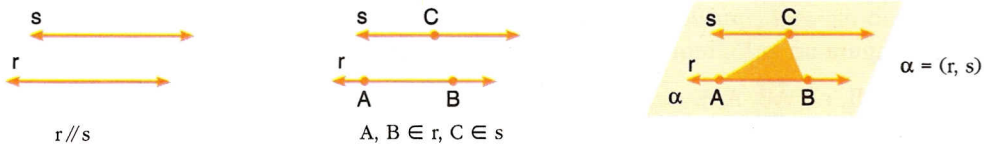
Basta tomar em *r* dois pontos distintos *A* e *B*, e o plano α = (A, B, P) é o plano determinado por *r* e *P*, isto é, α = (r, P).

▶ **3º** *Por duas retas concorrentes*



Basta tomar um ponto *A* em *r* e um ponto *B* em *s*, ambos distintos de *P*, e o plano α = (A, B, P) é o plano determinado por *r* e *s*, isto é, α = (r, s).

▶ **4º** *Por duas retas paralelas distintas*



Basta notar que duas retas distintas paralelas são coplanares; portanto estão num plano. Para perceber que o plano é único, tomamos dois pontos distintos, *A* e *B*, numa das retas e um ponto *C* na outra. Assim, o plano α = (A, B, C) é o plano determinado por *r* e *s*, isto é, α = (r, s).

Exemplo 1

Vamos resolver e comentar um teste para elucidar alguns termos.
Classifique em verdadeira (*V*) ou falsa (*F*) cada uma das sentenças:

a) Três pontos distintos determinam um único plano.
b) Os vértices de um triângulo são coplanares.
c) Se três pontos são coplanares, então eles são colineares.

Respostas e justificativas:

a) Falsa. Os três pontos distintos podem estar numa mesma reta e nesse caso eles não determinam um único plano (fig. 1). Os três pontos precisariam não ser colineares para que ficasse determinado um único plano (fig. 2).

Fig. 1

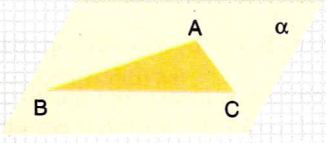


Fig. 2

b) Verdadeira. Os vértices de um triângulo são três pontos não colineares. Eles determinam um plano que contém o triângulo (fig. 2).
c) Falsa. Três pontos podem ser coplanares sem estarem na mesma reta (fig. 2).

Exemplo 2

Vejamos quantos são os planos determinados por três retas, duas a duas concorrentes, todas passando por um mesmo ponto.

Sendo *a*, *b* e *c* as retas, há duas possibilidades: ou as retas estão num mesmo plano α (fig. 1) ou os planos $\alpha = (b, c)$, $\beta = (a, c)$ e $\gamma = (a, b)$ estão determinados (fig. 2).

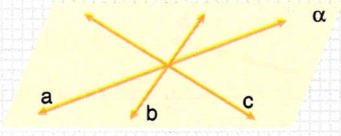


Fig. 1

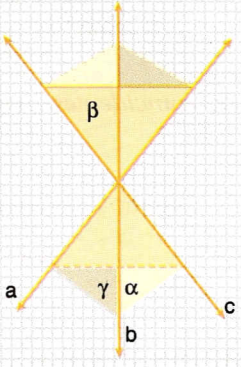


Fig. 2

Logo, as três retas determinam *um* ou *três* planos.

Observação

Para ilustrar ou complementar algumas situações apresentadas, vamos propor alguns teoremas, porém sem as demonstrações, que não fazem parte do objetivo desta obra.

Exercícios

1 Classifique cada sentença como verdadeira ou falsa:

a) Dado um ponto, existe uma única reta passando por ele.
b) Dado um ponto, existe uma reta passando por ele.
c) Dado um ponto, existem infinitas retas que o contêm.
d) Dados dois pontos distintos, existe um plano que os contém.
e) Três pontos não alinhados determinam três retas.
f) Três pontos não alinhados determinam um plano.
g) Três retas determinam um plano.
h) Um ponto e uma reta que não o contém determinam um plano.

2 Quatro pontos, A, B, C e D, não são coplanares. Quantos planos eles determinam? Quais são?

3 É comum encontrarmos mesas com quatro pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam, obrigando a colocação de um calço em uma das pernas. Com base no que você estudou até aqui, explique por que isso acontece.

4 Quantos planos são determinados por três retas distintas, duas a duas concorrentes e que não passam por um mesmo ponto?

5 Quantos são os planos determinados por três retas distintas, duas a duas paralelas?

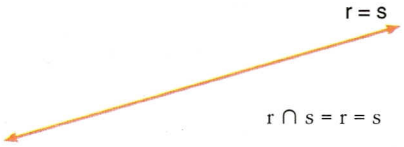
4 Posições relativas

Duas retas

Duas retas do espaço podem guardar entre si as seguintes posições relativas: coincidentes, concorrentes, paralelas e reversas.

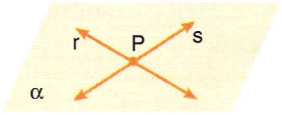
Coincidentes

Duas retas são *coincidentes* quando equivalem a uma única reta.



Concorrentes

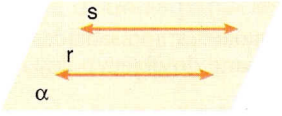
Duas retas são *concorrentes* quando têm *um único* ponto comum.



- $r \cap s = \{P\}$
- $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$
- $\alpha = (r, s)$

Paralelas

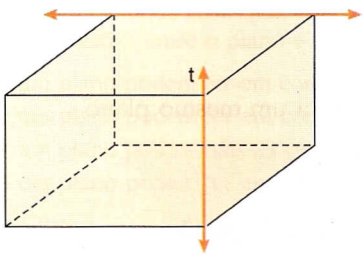
Duas retas distintas são *paralelas* quando são *coplanares* e *não* têm ponto comum.



- $r \cap s = \varnothing$
- $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$
- $\alpha = (r, s)$

Reversas

Duas retas distintas são *reversas* quando *não* existe plano que as contenha.



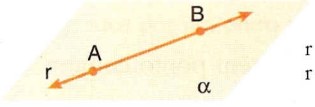
- $r \cap t = \varnothing$
- não existe plano que contenha r e t

Reta e plano

Uma reta e um plano podem ter as seguintes posições relativas:

Reta contida no plano

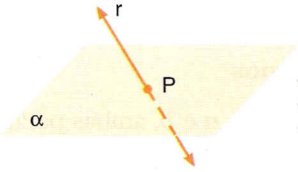
Uma reta está contida num plano quando todos os pontos da reta pertencem ao plano. (Veja o postulado da inclusão.)



$r \subset \alpha$
$r \cap \alpha = r$

Reta e plano concorrentes (ou secantes)

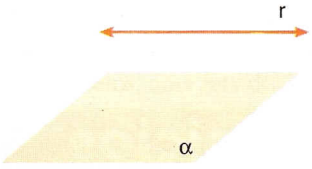
Uma reta e um plano são concorrentes ou secantes quando têm um único ponto comum.



- $r \cap \alpha = \{P\}$
- *P* é o *traço* de *r* em α
- *r* fura α em *P*

Reta e plano paralelos

Uma reta e um plano são paralelos quando não têm pontos em comum.

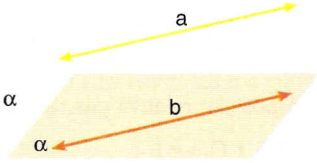


- $r \parallel \alpha$
- $r \cap \alpha = \varnothing$

Teorema importante: paralelismo entre reta e plano

Se uma reta *a* não está num plano α e é paralela a uma reta *b* do plano, então ela é paralela ao plano.

$$\left.\begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ a \parallel b \\ b \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$$



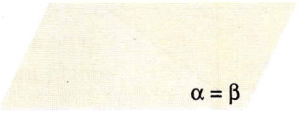
Dois planos

No espaço, dois planos podem ter as seguintes posições relativas:

Coincidentes

Dois planos são *coincidentes* quando equivalem a um mesmo plano.

$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

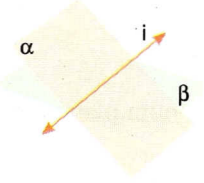


Secantes

Dois planos são *secantes* (ou *concorrentes*) quando são distintos e têm interseção não vazia.

A *interseção* de dois planos secantes é uma reta.

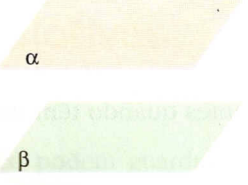
A reta comum a dois planos secantes é a *interseção* deles ou o *traço* de um deles no outro



- α e β secantes
- $\alpha \cap \beta = i$
- *i* é a interseção de α e β

Paralelos

Dois planos são *paralelos* quando não têm ponto comum.

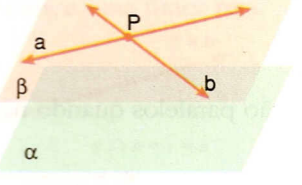


- α e β são paralelos: $\alpha \parallel \beta$
- $\alpha \cap \beta = \varnothing$

Teorema importante: paralelismo entre planos

Se um plano β contém duas retas concorrentes, *a* e *b*, ambas paralelas a outro plano, α, então esses planos são paralelos.

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \beta \\ b \subset \beta \\ a \cap b = \{P\} \\ a \parallel \alpha \\ b \parallel \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$



Exercícios

6 Classifique como verdadeiro ou falso:

a) Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.
b) Duas retas distintas sem pontos comuns são paralelas.
c) Duas retas que determinam um plano são concorrentes ou paralelas.
d) Duas retas reversas podem ter ponto comum.

7 O que se pode afirmar sobre a posição relativa das retas *r* e *s* em cada caso?

a) $r \cap s = \{P\}$ b) $r \cap s = t$ c) $r \cap s = \varnothing$

8 O que se pode afirmar sobre a posição relativa entre a reta r e o plano α em cada caso?

a) $r \cap \alpha = r$ b) $r \cap \alpha = \varnothing$ c) $r \cap \alpha = \{P\}$

9 Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo. A seguir, para cada situação verdadeira, dê a posição relativa entre o plano e a reta em questão.

a) Uma reta e um plano podem ter em comum um único ponto.
b) Uma reta e um plano podem ter em comum exatamente dois pontos.
c) Uma reta e um plano podem não ter pontos em comum.
d) Uma reta e um plano podem ter em comum infinitos pontos.

10 Se uma reta r é paralela a um plano α e s é uma reta de α, quais são as possíveis posições relativas entre r e s?

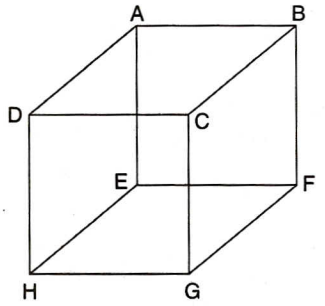
11 Se P é o traço de r em α, que contém s, quais são as possíveis posições relativas entre r e s?

12 Responda se as afirmações abaixo são falsas ou verdadeiras:

a) Dois planos distintos que têm uma reta comum são secantes.
b) Dois planos secantes têm infinitos pontos comuns.
c) Se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
d) Se dois planos distintos são paralelos, qualquer reta de um deles é paralela ao outro.

13 Se dois planos paralelos são interceptados por um outro plano, o que ocorre com as interseções?

14 Considere o cubo da figura.



a) Dê a posição relativa entre:
1. $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{FG}$
2. $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{AE}$
3. $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EH}$
4. $\overleftrightarrow{AG}$ e $\overleftrightarrow{BF}$
5. (A, B, D) e (C, F, G)
6. (A, G, E) e $\overleftrightarrow{DH}$
7. (A, D, H) e (B, C, G)

b) Cite quatro pares de retas reversas.

15 Sendo $\alpha \parallel \beta$ e r concorrente com α, o que ocorre entre r e β?

16 r é uma reta de α e s é uma reta de β. Quais são as possíveis posições relativas entre r e s, sendo $\alpha \parallel \beta$?

17 Classifique como verdadeira ou falsa cada afirmação:

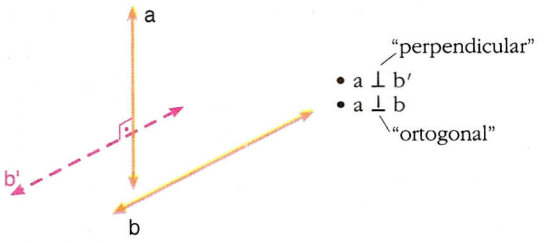
a) Se dois planos são secantes, uma reta de um deles pode ser reversa com uma reta do outro.
b) Se dois planos distintos são paralelos, uma reta de um deles e uma reta do outro podem ser concorrentes.
c) Se dois planos são secantes, uma reta de um deles e uma reta do outro podem ser concorrentes.

5 Perpendicularidade

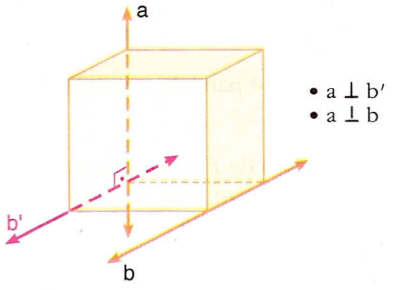
Retas ortogonais

Duas retas são ditas ortogonais quando são reversas e a paralela a uma delas, conduzida por um ponto da outra, é perpendicular a esta.

Notemos que a e b são reversas, e se uma reta b', paralela à reta b e concorrente com a é perpendicular à reta a, então as retas a e b são *ortogonais*.



Para facilitar o entendimento, veja o cubo da figura.

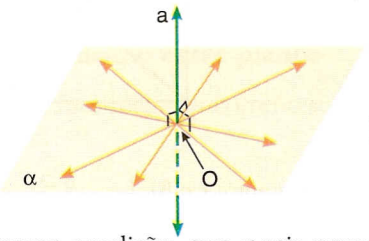


Dizemos que duas retas são ortogonais ou perpendiculares se formam ângulo reto, e vice-versa. Se duas retas a e b formam ângulo reto:

- sendo reversas, são ortogonais;
- sendo coplanares, são perpendiculares.

Reta e plano perpendiculares

Uma reta concorrente com um plano, num ponto O, é perpendicular ao plano quando é perpendicular a todas as retas do plano que passam por O.



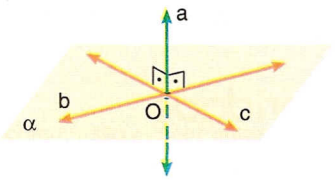
O ponto O é dito "*pé* da perpendicular".

A definição impõe, como condição, que a seja perpendicular a *todas* as retas de α que passam por O. Na prática, porém, há um modo mais simples de assegurar que $a \perp \alpha$.

Teorema

Se uma reta a é perpendicular a duas retas, b e c, concorrentes de um plano α, então ela é perpendicular ao plano.

$$\left.\begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \\ c \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ b \cap c = \{O\} \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$



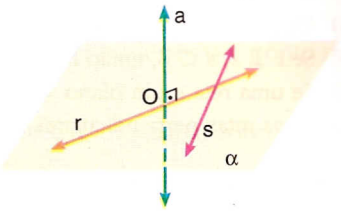
Satisfeitas todas as condições da hipótese:

$$\underbrace{a \perp b,\ a \perp c}_{(a \text{ é perpendicular a duas retas})}, \qquad \underbrace{b \cap c = \{O\}}_{(\text{concorrentes})} \qquad \text{e} \qquad \underbrace{b \subset \alpha,\ c \subset \alpha}_{(\text{de um plano})}$$

podemos garantir que a reta é perpendicular ao plano.

Podemos notar que, se a é perpendicular a um plano α em O, a forma ângulo reto com qualquer reta de α. Sendo r e s duas retas de α, temos:

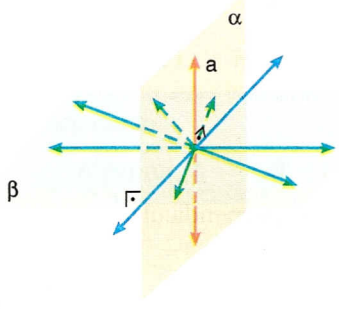
- r passa por $O \Rightarrow a \perp r$
- s não passa por $O \Rightarrow a \perp s$



Se r fura α e r não é perpendicular a α, dizemos que r e α são *oblíquos*.

Planos perpendiculares

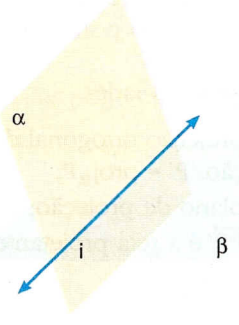
Dois planos são perpendiculares quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro.



$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a \subset \alpha \\ \bullet\ a \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Qualquer plano que contenha a é perpendicular a β.

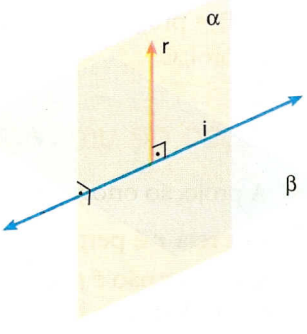
Quando dois planos secantes não são perpendiculares, eles são ditos *oblíquos*.



Teorema importante: perpendicularidade de dois planos

Se dois planos, α e β, são perpendiculares e uma reta r de um deles (α) é perpendicular à interseção i dos planos, então ela é perpendicular ao outro plano (β).

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ i = \alpha \cap \beta \\ r \subset \alpha \\ r \perp i \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \beta$$



Exercícios

18 Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa.

a) Se duas retas formam ângulo reto, elas são perpendiculares ou ortogonais.

b) Se duas retas são ortogonais, toda paralela a uma delas é perpendicular à outra.

c) Se duas retas são ortogonais, toda paralela a uma delas forma ângulo reto com a outra.

19 Verdadeiro ou falso?

a) Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com qualquer reta do plano.

b) Se $r \perp s$, $s \subset \beta$, então $r \perp \beta$.

c) Se uma reta e um plano são perpendiculares, toda perpendicular à reta dada é paralela ao plano.

d) Duas retas perpendiculares a um plano podem ser reversas.

20 Interprete, por meio de uma figura, a sentença:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \cap \beta = i \\ r \subset \alpha \\ s \subset \beta \\ r \,/\!/\, s\end{array}\right\} \Rightarrow r \,/\!/\, i \quad e \quad s \,/\!/\, i$$

A seguir, escreva em linguagem corrente o enunciado da proposição.

21 Comente a seguinte afirmação:

"Se uma reta *r* é perpendicular a uma reta *s* de um plano α, então ela é perpendicular a todas as retas de α e, portanto, é perpendicular a α".

6 Projeções ortogonais sobre um plano

Projeção de um ponto

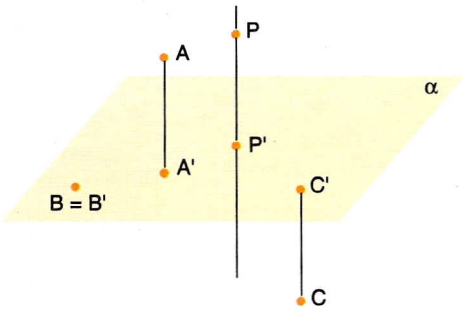
A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto.

Na figura ao lado:

- P′ é a projeção ortogonal de *P* sobre α.
  Indicação: $P' = proj_{\alpha}P$;
- α é o plano de projeção;
- a reta $\overleftrightarrow{PP'}$ é a reta projetante de *P*.

Além disso:

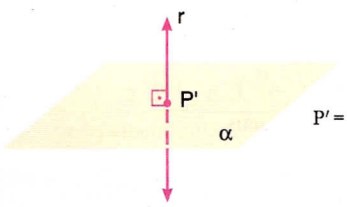
- $A' = proj_{\alpha}A$
- $B' = B = proj_{\alpha}B$
- $C' = proj_{\alpha}C$



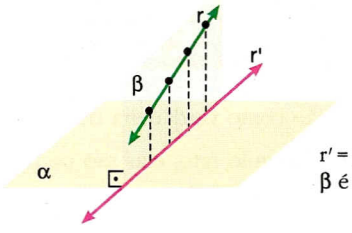
Projeção de uma reta

A projeção ortogonal de uma reta *r* sobre um plano α pode ser um ponto ou uma reta. Vejamos:

- Se a reta *r* é perpendicular ao plano α, sua projeção sobre ele é o traço da reta no plano.
- Se a reta *r* não é perpendicular ao plano α, sua projeção ortogonal sobre α é o traço (interseção) em α, do plano β perpendicular a α, conduzido por *r*.



$P' = proj_{\alpha} r$

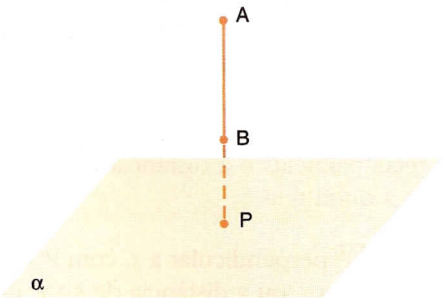


$r' = proj_{\alpha} r$
β é o plano projetante de *r*.

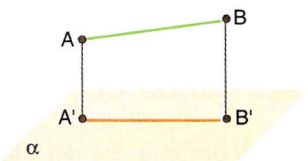
Projeção de um segmento de reta

A projeção ortogonal de um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre um plano α pode ser um ponto ou um segmento. Vejamos:

- Se o segmento de reta $\overline{AB}$ é perpendicular ao plano α, sua projeção ortogonal sobre o plano é um ponto P, que é o traço da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em α.



- Se o segmento de reta $\overline{AB}$ não é perpendicular ao plano α, basta projetar suas extremidades sobre α para obter a projeção do segmento.



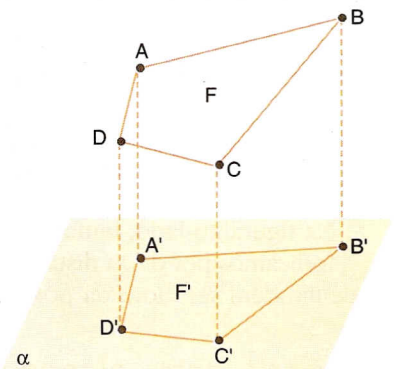
$A' = \text{proj}_{\alpha} A \qquad B' = \text{proj}_{\alpha} B \qquad \overline{A'B'} = \text{proj}_{\alpha} \overline{AB}$

Projeção de uma figura

A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura sobre o plano.

Na figura ao lado temos $F' = \text{proj}_{\alpha} F$.

No caso em que um plano paralelo a α contém a figura a ser projetada, a figura e sua projeção são congruentes.

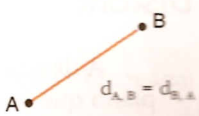


7 Distâncias geométricas

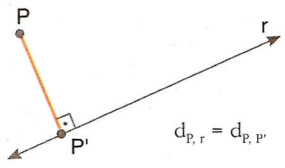
Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos distintos, A e B, é o segmento de reta $\overline{AB}$ ou qualquer segmento congruente a ele.

Se A e B coincidem ($A = B$), a distância entre eles é nula.
A *distância métrica* entre A e B é a *medida do segmento* $\overline{AB}$.
Indicamos por $d_{A,B}$ a distância de A a B, ou a distância de B a A.



Distância de ponto a reta

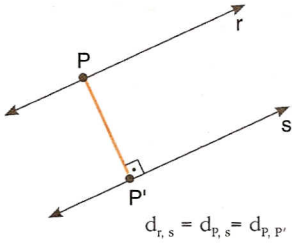


A distância de um ponto a uma reta é a distância deste ponto ao pé da perpendicular à reta conduzida pelo ponto.

Na figura, $\overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular a r, com P' em r.
Indicamos por $d_{P, r}$ a distância de P a r, ou a distância de r a P. Ela pode também ser indicada por $d_{P, P'}$.

Distância entre retas paralelas

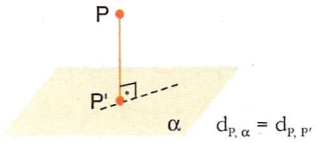
A distância entre duas retas paralelas é a distância de um ponto qualquer de uma delas à outra reta.



Na figura ao lado, temos $P \in r$, $\overleftrightarrow{PP'}$ perpendicular a s, com $P' \in s$.
Indicamos por $d_{r, s}$ a distância de r a s, ou a distância de s a r. Ela pode também ser indicada por $d_{P, s}$ ou $d_{P', r}$ ou $d_{P, P'}$.

Distância de ponto a plano

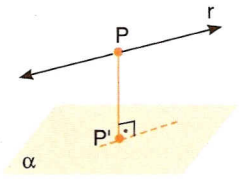
A distância de um ponto a um plano é a distância do ponto à sua projeção ortogonal no plano.



Na figura ao lado, temos $P' = \text{proj}_{\alpha} P$.
Indicamos por $d_{P, \alpha}$ a distância de P a α, ou a distância de α a P. Ela também pode ser indicada por $d_{P, P'}$.

Distância entre reta e plano paralelos

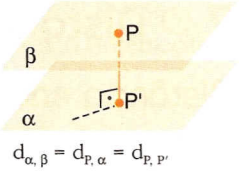
A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância de um ponto qualquer da reta ao plano.



Na figura ao lado, temos $P \in r$ e $P' = \text{proj}_{\alpha} P$.
Indicamos por $d_{r, \alpha}$ a distância de r a α, ou a distância de α a r. Ela pode também ser indicada por $d_{P, \alpha}$, ou $d_{P, P'}$.

Distância entre planos paralelos

A distância entre dois planos paralelos é a distância de um ponto qualquer de um deles ao outro plano.

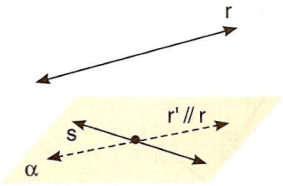


Na figura ao lado, temos $P \in \beta$ e $P' = \text{proj}_{\alpha} P$.
Indicamos por $d_{\alpha, \beta}$ a distância de α a β, ou a distância de β a α. Ela pode também ser indicada por $d_{P, \alpha'}$, ou $d_{P, P'}$.

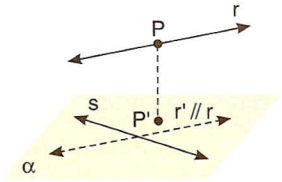
Distância entre duas retas reversas

A distância entre duas retas reversas é a distância de um ponto qualquer de uma delas ao plano que passa pela outra e é paralelo à primeira.

Para se achar a distância entre duas retas reversas, r e s, conduz-se por uma delas (por exemplo, s) um plano α paralelo à outra (r) e se obtém a distância desta outra reta (r) ao plano α.



$d_{r,s} = d_{r,\alpha} = d_{P,\alpha} = d_{P,P'}$



α é o plano que passa por s e é paralelo a r.

Na figura à direita temos $P \in r$ e $P' = proj_{\alpha}P$.

Indicamos por $d_{r,s}$ a distância de r a s, ou a distância de s a r. Ela também pode ser indicada por $d_{r,\alpha}$, $d_{P,\alpha}$, ou $d_{P,P'}$.

8 ○ Ângulos

Já é conhecido o conceito de ângulo de duas retas concorrentes.

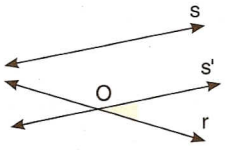
Ângulo de retas reversas

Ângulo de duas retas reversas é aquele formado por uma delas com a reta paralela à outra, conduzida por um ponto da primeira.

Na figura, o ângulo das retas r e s reversas é o ângulo da reta r com a reta s' paralela à reta s por um ponto O, pertencente à reta r.

Temos:

- r e s reversas;
- $O \in r$;
- $O \in s'$ e $s' // s$;
- $\widehat{rs} = \widehat{rs'}$.

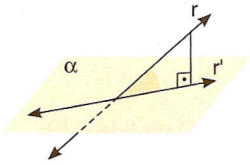


Ângulo de reta e plano

Ângulo de uma reta e um plano *oblíquos* é aquele formado pela reta com sua projeção ortogonal sobre o plano.

Na figura, temos:

- $r' = proj_{\alpha}r$;
- $\widehat{r\alpha} = \widehat{rr'}$.



Quando uma reta e um plano são perpendiculares, o ângulo por eles formado é *reto*.

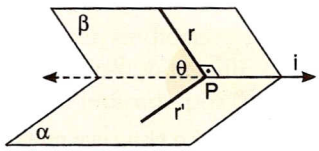
Quando uma reta está contida num plano ou é paralela a ele, dizemos que o ângulo da reta com o plano é *nulo*.

Ângulo de dois planos

Quando dois planos são *oblíquos*, toda reta de um deles perpendicular à interseção é chamada reta de *maior declive* deste plano em relação ao outro.

Ângulo de dois planos *oblíquos* é aquele formado por uma reta de maior declive de um deles com o outro plano.

Na figura, temos:



- α e β são planos oblíquos;
- $\alpha \cap \beta = i$;
- $r \subset \beta$ e $r \perp i$;
- $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{r\alpha}$;
- $\alpha \cup \beta$, indicado por $\widehat{\alpha i \beta}$, é chamado *diedro* ou ângulo diedro;
- θ é a medida do ângulo $\widehat{rPr'}$ — chamado seção normal do diedro — e é a medida do diedro.

Além disso:

- o ângulo de dois planos perpendiculares é *reto*;
- o ângulo entre dois planos paralelos é dito *nulo*.

Exercícios

22 Avalie se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

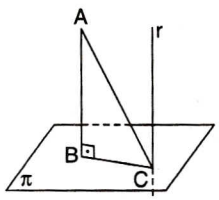
a) A projeção ortogonal de um ponto sobre um plano pode não ser um ponto.
b) A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é sempre uma reta.
c) Projetando sobre um plano um segmento de reta obtemos um segmento paralelo a ele, ou um ponto.
d) Existe a possibilidade de, ao projetarmos sobre um plano um quadrado, obtermos um segmento de reta maior que o lado do quadrado.

23 Duas retas paralelas *r* e *s* são projetadas ortogonalmente sobre o plano α. Quais são as posições relativas das projeções?

24 Dois círculos concêntricos coplanares são projetados ortogonalmente sobre um outro plano. Sabendo-se que a projeção é um segmento de reta, pergunta-se:

a) Qual é a posição relativa entre os planos?
b) Qual é a medida da projeção obtida?

25



Na figura, estão representados o plano π, que contém $\overline{BC}$, e o plano que contém o triângulo retângulo ABC e é perpendicular a π; *r* passa por *C* e é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.
Considerando as definições de distâncias apresentadas no presente capítulo, enumere *todas* as distâncias mostradas na figura.

26 Classifique como verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):

a) A distâncias de um ponto a um plano é a distância do ponto a qualquer ponto do plano.
b) A distância entre um ponto e um plano é a reta perpendicular ao plano pelo ponto.
c) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância de um ponto qualquer da reta a um ponto qualquer do plano.
d) A distância entre uma reta e um plano paralelos é a distância de um ponto qualquer da reta ao plano.
e) A distância entre dois planos paralelos é a distância de um ponto qualquer de um deles a um ponto qualquer do outro.
f) A distância entre dois planos paralelos distintos é igual à distância entre uma reta de um deles e o outro plano.

Testes de vestibulares

1 (Unopar-PR) Considere as seguintes afirmações:

I. Duas retas reversas não têm ponto comum.
II. Se duas retas quaisquer não têm ponto comum, então pode-se concluir que elas são necessariamente paralelas.
III. Se uma reta não está contida num plano e é paralela a uma reta desse plano, então ela é paralela ao plano.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

a) I, II e III
b) II, apenas
c) III, apenas
d) II e III, apenas
e) I e III, apenas

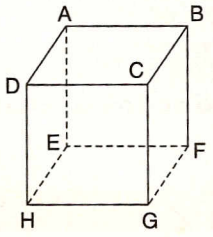
2 (U. E. Londrina-PR) São dadas as proposições:

I. Duas retas distintas determinam um único plano.
II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
III. Se dois planos distintos são paralelos entre si, então toda reta de um deles é paralela a uma reta do outro.

É correto afirmar que apenas:

a) I e II são verdadeiras.
b) I e III são verdadeiras.
c) II e III são verdadeiras.
d) I é verdadeira.
e) III é verdadeira.

3 (UFAL) Na figura ao lado tem-se um cubo de vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*. Assinale *V* ou *F*.



a) O cubo tem 12 arestas.
b) A reta $\overleftrightarrow{FG}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$.
c) As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CG}$ são ortogonais.
d) A reta $\overleftrightarrow{EF}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{DC}$.
e) A interseção do plano determinado pelos pontos *D*, *B* e *F* com o plano da face EFGH é a reta $\overleftrightarrow{FH}$.

4 (U.A.-AM) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

I. Se duas retas distintas não são paralelas, elas são concorrentes.
II. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles interceptam o outro plano.
III. Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
IV. A projeção ortogonal de uma reta sobre um plano é sempre uma reta.
V. Em dois planos paralelos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano.

a) III
b) I
c) II
d) IV
e) V

5 (ESPM-SP) Sejam *r* e *s* duas retas distintas, paralelas entre si, contidas em um plano α. A reta *t*, perpendicular ao plano α, intercepta a reta *r* em *A*. As retas *t* e *s* são:

a) reversas e não ortogonais
b) ortogonais
c) paralelas entre si
d) perpendiculares entre si
e) coplanares

6 (Ucsal-BA) Sejam duas retas distintas *r* e *s* e dois planos distintos α e β.

a) Se $r \parallel s$ e $\alpha \parallel \beta$, então $r \parallel \alpha$.
b) Se $r \perp \alpha$ e $r \perp \beta$, então $\alpha \parallel \beta$.
c) Se $r \parallel \alpha$ e $r \perp s$, então $s \parallel \alpha$.
d) Se $\alpha \perp \beta$ e $r \subset \alpha$, então $r \perp \beta$.
e) Se $r \perp \alpha$ e $r \perp s$, então $s \perp \alpha$.

7 (UF-SE) Analise as afirmações seguintes:

I. A projeção ortogonal de uma reta num plano é uma reta.
II. A projeção ortogonal de um ponto num plano é um ponto.
III. A medida da projeção ortogonal de um segmento oblíquo a um plano, sobre este plano, é menor que a medida do próprio segmento.

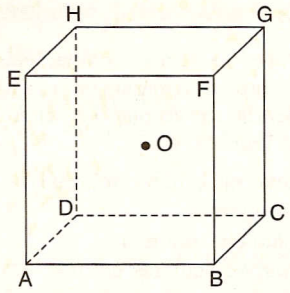
É correto afirmar que:

a) somente I e II são verdadeiras.
b) somente I e III são verdadeiras.
c) somente II e III são verdadeiras.
d) I, II e III são verdadeiras.
e) I, II e III são falsas.

8 (U. F. São Carlos-SP) Considere um plano α e um ponto *P* qualquer do espaço. Se por *P* traçarmos a reta perpendicular a α, a interseção dessa reta com α é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto *P* sobre α. No caso de uma figura *F* do espaço, a projeção ortogonal de *F* sobre α é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos.
Com relação a um plano α qualquer fixado, pode-se dizer que:

a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semi-reta.
b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

9 (UF-RS) A figura abaixo representa um cubo de centro O.



Considere as afirmações abaixo.

I. O ponto O pertence ao plano BDE.

II. O ponto O pertence ao plano ACG.

III. Qualquer plano contendo os pontos O e E também contém C.

Quais estão corretas?

a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas I e II.
d) Apenas I e III.
e) Apenas II e III.

10 (U. F. Uberlândia-MG) Em relação à interseção de um cubo de aresta a com um plano, assinale a alternativa falsa.

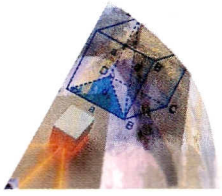
a) Pode ser um ponto.
b) Pode ser um retângulo de lados a e $a\sqrt{2}$.
c) Pode ser um triângulo eqüilátero.
d) Não pode ser um triângulo isósceles.
e) Pode ser um segmento.

11 (Vunesp-SP) Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, r e s, reversas. Seja t a perpendicular comum a r e a s. Então:

a) t é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.
b) t é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.
c) t é a reta suporte de uma das arestas do cubo.
d) t é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em r e s.
e) t é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

Desafio

A reta r contém o ponto P, e Q é ponto de s; se r e s não se encontram, qual é a interseção dos planos α e β, sendo $\alpha = (P, s)$ e $\beta = (Q, r)$?



POLIEDROS

27

1 ○ Introdução

Nos próximos capítulos vamos estudar figuras geométricas do espaço chamadas sólidos geométricos.

Os sólidos geométricos podem ser classificados em duas categorias: os corpos redondos e os poliedros.

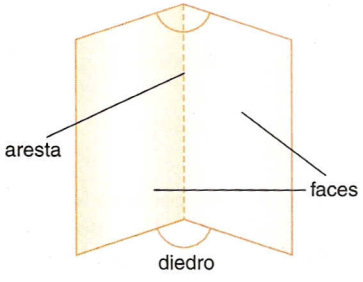
2 ○ Os poliedros

Poliedros são os sólidos limitados por porções de planos — polígonos planos — denominados *faces*.

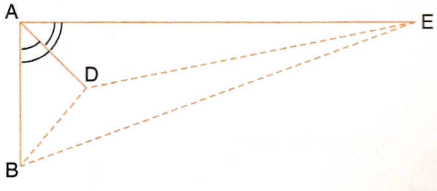
Entre duas faces adjacentes estão as *arestas*, segmentos de reta cujas extremidades são os *vértices* do poliedro.

A, B, C, ... vértices
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, ... arestas
ABCD, ADEF, ... faces

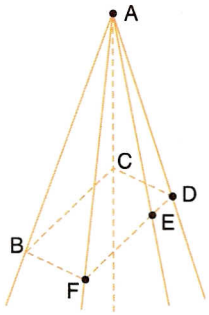
Em geral, cada aresta, como interseção de duas faces, forma com esses polígonos planos um *diedro*.



Cada vértice pode ser interseção de três ou mais arestas; na figura ao lado, por exemplo, em torno de cada um dos vértices forma-se um *triedro*.

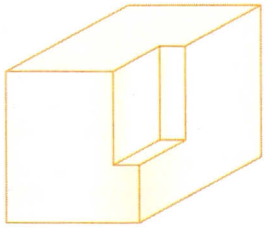


Muitas vezes em torno de um vértice forma-se um ângulo *poliédrico*.



Um poliedro é dito *convexo* quando todo plano que contém uma face deixa todas as outras faces num mesmo semi-espaço.

poliedro convexo



poliedro não convexo

3 ○ Relação de Euler

Para todo poliedro convexo vale a relação:

$$V - A + F = 2\ ,$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

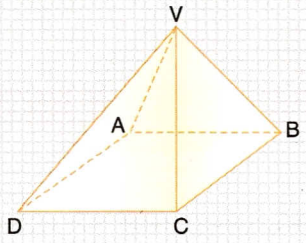
Exemplo 1

Observando o sólido ao lado, temos:

$V = 5 \quad A = 8 \quad F = 5$

Vale a relação de Euler:

$5 - 8 + 5 = 2$



pirâmide quadrangular

Exemplo 2

Um poliedro convexo tem exatamente seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Calculemos o número de vértices do poliedro.

Inicialmente devemos observar que em seis faces triangulares temos 6×3 arestas e em cinco faces quadrangulares há 5×4 arestas. Como cada aresta é comum a duas faces, cada aresta terá sido computada duas vezes:

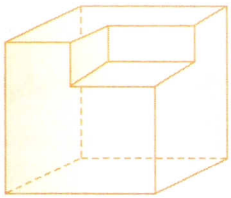
$$2A = \underbrace{6 \times 3 + 5 \times 4}_{F = 11} \Rightarrow 2A = 38 \Rightarrow A = 19$$

Aplicando a relação de Euler:

$V - 19 + 11 = 2 \Rightarrow V = 10$, e o poliedro possui 10 vértices.

Observação

A relação de Euler, como foi visto, é válida para todo poliedro convexo. Ocorre que ela pode verificar-se também para poliedros não convexos. Assim dizemos:
"Todo poliedro convexo é euleriano, porém nem todo poliedro euleriano é convexo".



O poliedro da figura não é convexo embora valha a relação de Euler.

$$V - A + F = 14 - 21 + 9 = 2$$

Exercícios

1 (PUC-SP) Qual é o poliedro que tem 12 vértices e 30 arestas?

2 Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais.

3 Ache o número de faces de um poliedro convexo que possui dezesseis ângulos triédricos.

4 Num poliedro convexo, quatro faces são quadrangulares e as demais são triangulares. Determine o número de faces do poliedro sabendo que o número de arestas é o dobro do número de faces triangulares.

5 (Fuvest-SP) Quantas faces tem um poliedro convexo com 6 vértices e 9 arestas?
Desenhe um poliedro que satisfaça essas condições.

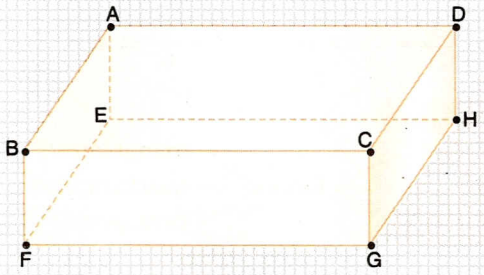
6 Quantos são os vértices de um poliedro convexo de oito faces, todas triangulares?

4 Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado *poliedro de Platão* quando preenche as seguintes condições:

- todas as faces têm o mesmo número n de arestas;
- todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número m de arestas;
- vale a relação de Euler.

Exemplo 3



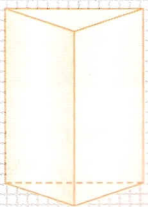
O prisma quadrangular da figura é um poliedro de Platão, pois:

- todas as 6 faces são quadriláteros ($n = 4$);
- todos os ângulos são triédricos ($m = 3$);
- sendo $V = 8$, $F = 6$ e $A = 12$, temos:

$$8 - 12 + 6 = 14 - 12 = 2$$

Exemplo 4

O prisma triangular da figura ao lado *não* é poliedro de Platão, pois 2 faces são triangulares e 3 faces são quadrangulares.



Propriedade

Existem exatamente cinco classes de poliedros de Platão.

Demonstração

Para um poliedro de Platão temos:

- **1º** Cada uma das F faces tem n arestas ($n \geq 3$) e, como cada aresta está em duas faces, temos:

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \quad (I)$$

- **2º** Cada um dos V ângulos poliédricos tem m arestas ($m \geq 3$) e, como cada aresta contém dois vértices, temos:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \quad (II)$$

- **3º** Vale a relação de Euler:

$$V - A + F = 2 \quad (III)$$

Substituindo (I) e (II) em (III) vem:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$$

Sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. No entanto, se ambos fossem simultaneamente maiores que 3, teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \leq 0,$$

o que constitui absurdo, pois $A > 0$.

Concluímos que nos poliedros de Platão temos obrigatoriamente

$m = 3$ (o poliedro possui triedros)
ou
$n = 3$ (o poliedro possui triângulos)

- Para $m = 3$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6$$

	m	*n*	
triedros	3	3	triangulares
	3	4	quadrangulares
	3	5	pentagonais

- Para $n = 3$:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} > 0 \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6$$

		m	*n*	
ângulos	triédricos	3	3	faces triangulares
	tetraédricos	4	3	
	pentaédricos	5	3	

Concluindo:

Os poliedros de Platão são determinados pelos pares ordenados (m, n) da tabela ao lado. Portanto, são *exatamente cinco* as classes de poliedros de Platão, o que demonstra a propriedade.

m	*n*
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Exemplo 5

Vamos estudar a possibilidade m = 4 e n = 3.
Temos:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 12$$

Ainda: $F = \frac{2A}{n} = \frac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow F = 8$, e o poliedro tem 8 faces, além de 6 vértices (V – 12 + 8 = 2).

Procedendo como no exemplo, para denominar e caracterizar os poliedros de Platão podemos montar a tabela:

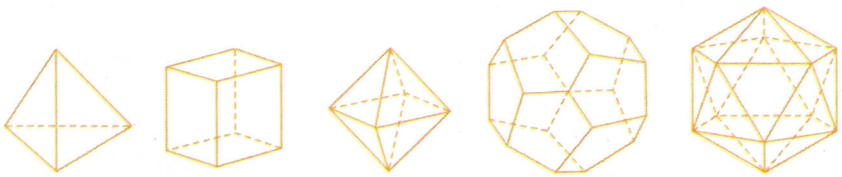
m	n	A	V	F	Poliedro
3	3	6	4	4	tetraedro
3	4	12	8	6	hexaedro
4	3	12	6	8	octoedro
3	5	30	20	12	dodecaedro
5	3	30	12	20	icosaedro

5 Poliedros regulares

Um poliedro convexo é *regular* quando:

- suas faces são polígonos regulares e congruentes;
- seus ângulos poliédricos são congruentes.

Pelas condições estabelecidas acima, podemos observar que os poliedros regulares são poliedros de Platão. Assim, existem exatamente cinco poliedros regulares. São eles:



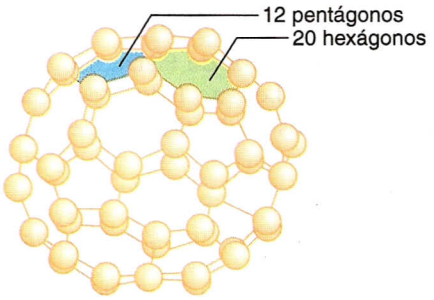
tetraedro regular | hexaedro regular (cubo) | octaedro regular | dodecaedro regular | icosaedro regular

Exercícios

7 Em quais poliedros considerados de Platão há faces cuja soma dos ângulos vale 180°?

8 Calcule, em graus, a soma dos ângulos das faces de cada um dos poliedros de Platão.

9 Numa molécula tridimensional de carbono, os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo com 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais regulares, como em uma bola de futebol.
Qual é o número de átomos de carbono na molécula? E o número de ligações entre esses átomos?



Testes de vestibulares

1 (PUC-PR) Um poliedro convexo tem 7 faces. De um dos seus vértices partem 6 arestas e de cada um dos vértices restantes partem 3 arestas.
Quantas arestas tem esse poliedro?

a) 8 c) 12 e) 16
b) 10 d) 14

2 (FMU/Fiam/FAAM-SP) Um poliedro convexo tem seis vértices. De cada vértice partem quatro arestas. Esse poliedro possui:

a) 2 faces d) 8 faces
b) 16 faces e) 4 faces
c) 20 faces

3 (UE-CE) Um poliedro convexo de nove vértices possui quatro ângulos triédricos e cinco ângulos tetraédricos. Assim, o número de faces do poliedro é:

a) 12 c) 10 e) 8
b) 11 d) 9

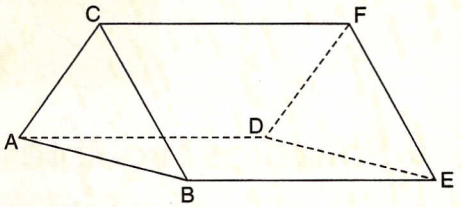
4 (FMU/Fiam-SP) O hexaedro regular é um poliedro com:

a) 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices.
b) 3 faces quadradas, 4 arestas e 6 vértices.
c) 6 faces triangulares, 12 arestas e 8 vértices.
d) 4 faces quadradas, 8 arestas e 8 vértices.
e) 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices.

5 (U. F. Santa Maria-RS) Um poliedro convexo tem três faces triangulares, uma quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais. A soma dos ângulos de todas as faces desse poliedro é:

a) 2880° c) 3000° e) 4320°
b) 2890° d) 4000°

6 (Cefet-PR) Considerando o prisma triangular regular da figura, associe *V* para sentenças verdadeiras e *F* para as sentenças falsas.



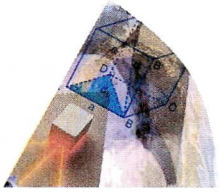
- $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ são paralelas.
- A reta que contém a aresta $\overline{AB}$ é ortogonal à reta que contém a aresta $\overline{CF}$.
- A reta que contém o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular ao plano determinado pelos vértices *A*, *B*, *D* e *E* do prisma.
- O diedro determinado pelos planos das faces ABDE e BCFE mede 45°.

A alternativa que corresponde à seqüência correta é:

a) F V V F c) V V F V e) F F V V
b) V V F F d) V F F V

Desafio

(FEI-SP) Um poliedro convexo com faces quadrangulares e pentagonais tem 15 arestas. Calcule o número de faces de cada tipo sabendo que a soma de todos os ângulos dos polígonos das faces é 32 retos.



28 ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

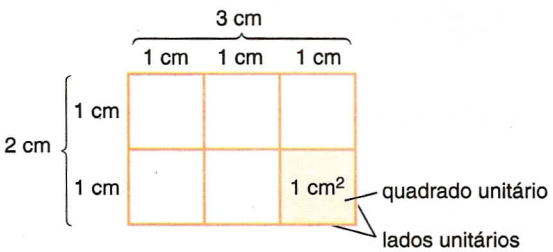
1 ○ Conceito

Toda superfície plana ocupa uma *extensão* do plano. Determinar a *área* de uma superfície significa *medir* tal extensão.

Assim como para toda medição que se faz, é necessário definir uma *unidade*; no caso, vamos estabelecer um *quadrado unitário*, ou seja, um quadrado de lado 1, o qual possui, igualmente, área 1.

2 ○ Área do retângulo

Se tivermos, por exemplo, um retângulo de dimensões 2 cm e 3 cm, para determinar a área ocupada pela sua superfície, poderemos decompor cada dimensão em unidades de comprimento (centímetros):

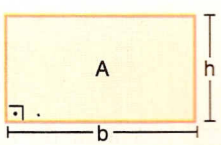


Como em cada uma das *duas* fileiras horizontais há *três* quadrados unitários, a área do retângulo mede 2 cm × 3 cm = 6 cm².

Na prática, mesmo nos casos em que as medidas de comprimento não são números inteiros, para obter a área A de um retângulo simplesmente multiplicamos as suas dimensões b e h:

$$A = b \cdot h$$

A área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.



Exemplo 1

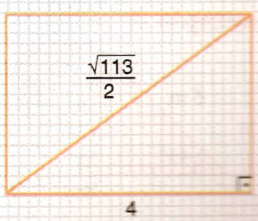
A diagonal e a base de um retângulo medem $\frac{\sqrt{113}}{2}$ m e 4 m, respectivamente.

Para calcular a área do retângulo obtemos inicialmente sua altura:

$$\left(\frac{\sqrt{113}}{2}\right)^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h = \frac{7}{2} \text{ m}$$

Daí:

$$A = b \cdot h = 4 \cdot \frac{7}{2} \Rightarrow A = 14 \text{ m}^2$$

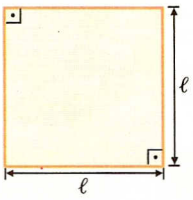


3 ○ Área do quadrado

Um quadrado de lado ℓ nada mais é do que um retângulo de base ℓ e altura ℓ. Na determinação de sua área vale a fórmula usada para a área do retângulo: $A = \ell \cdot \ell$, ou seja:

$$A = \ell^2$$

A área do quadrado é igual ao quadrado da medida do lado.

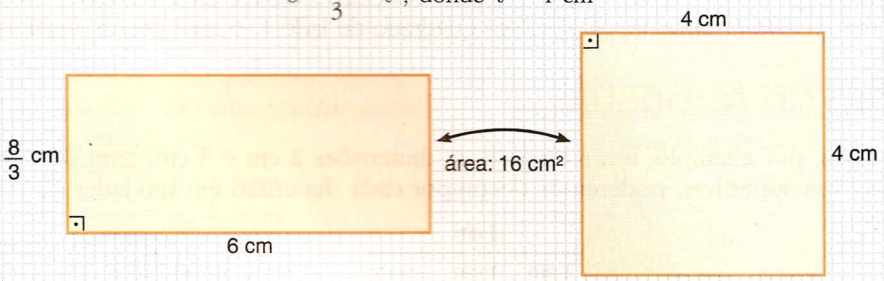


Exemplo 2

Um quadrado ocupa a mesma extensão do plano que um retângulo de base 6 cm e altura $\frac{8}{3}$ cm.

Para determinar o lado do quadrado podemos igualar as áreas:

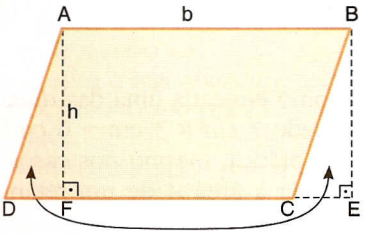
$$6 \cdot \frac{8}{3} = \ell^2, \text{ donde } \ell = 4 \text{ cm}$$



Duas figuras planas — como as do exemplo acima — que possuem a mesma área são ditas *figuras equivalentes*.

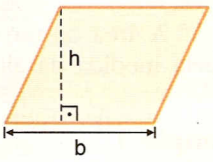
4 ○ Área do paralelogramo

O paralelogramo ABCD da figura é equivalente ao retângulo ABEF, pois $\triangle ADF \equiv \triangle BCE$. Assim, a área do paralelogramo é obtida da mesma maneira que a área do retângulo:

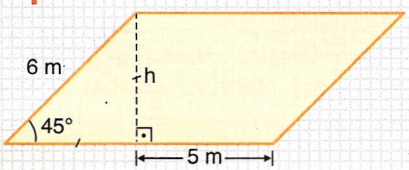


$$A = b \cdot h$$

A área do paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.



Exemplo 3



Para determinar a área do paralelogramo ao lado fazemos:

$$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

Como o triângulo é isósceles e $A_{par} = b \cdot h$, vem:

$$A = (5 + h) \cdot h = (5 + 3\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow A = (15\sqrt{2} + 18) \text{ m}^2$$

Exercícios

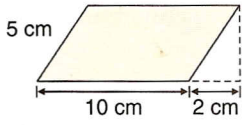
1 Determine a área de:

a) um retângulo de altura 2 cm e diagonal 3 cm;
b) um quadrado de diagonal 4 cm;
c) um paralelogramo de base 4 cm e altura 3 cm.

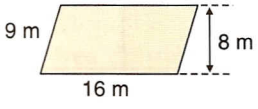
2 Um retângulo tem perímetro 28 cm. Se a área do retângulo mede 40 cm^2, quais são suas dimensões?

3 Determine a área de cada um dos paralelogramos:

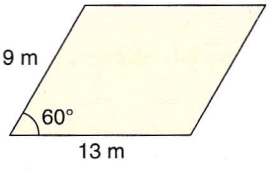
a)



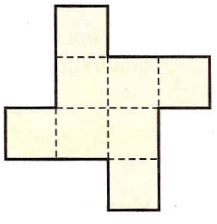
b)



c)



4 (UF-RN) Um terreno de 72 m^2 de área é formado por 8 quadrados congruentes, conforme mostra a figura ao lado.
Quanto mede a cerca que delimita o terreno?



5 Determine a área de um quadrado de:

a) lado 2x; b) perímetro 2x; c) diagonal 2x.

6 Determine a área do quadrado inscrito:

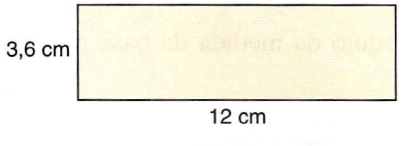
a) em um círculo de raio 2 cm;
b) em um semicírculo de raio 2 cm.

7 (Unicamp-SP) Um fio de 48 cm de comprimento é cortado em duas partes, para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro.

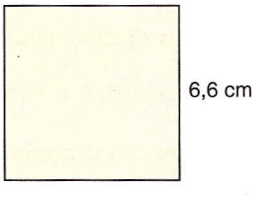
a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes do fio?
b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

8 Pesquise a existência de figuras equivalentes dentre as mostradas abaixo:

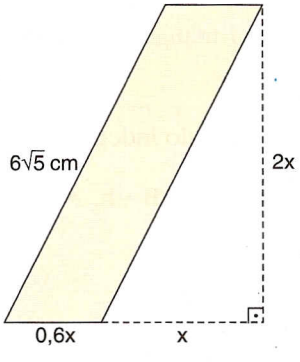
a) retângulo



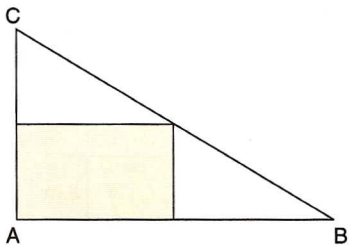
b) quadrado



c) paralelogramo



9 (UF-MS) Numa vidraçaria há um pedaço de espelho com o formato de um triângulo retângulo, cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente, 80 cm e 60 cm. Para aproveitar esse pedaço de espelho, o vidraceiro quer, a partir dele, recortar um outro espelho, na forma de um retângulo, de modo que dois de seus lados devam estar sobre os catetos do triângulo e o quarto vértice sobre a sua hipotenusa, conforme esboçado na figura abaixo. Sabendo-se que o espelho retangular deve ser recortado de forma que tenha a maior área possível, e sendo S tal área em cm^2, determine $\frac{7}{100}$ S.

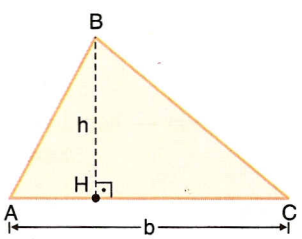


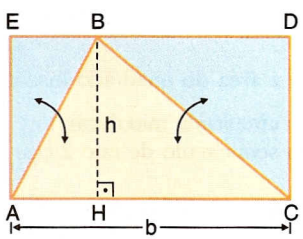
10 Um paralelogramo de lados medindo 8 cm e 6 cm é equivalente a um retângulo de dimensões 6 cm e 6,6 cm. Determine o seno do ângulo agudo α formado entre os lados do paralelogramo.

11 Se aumentarmos em 20% o lado de um quadrado, sua área aumentará 20 cm^2. Determine o lado do quadrado original.

5 Área do triângulo

Vamos considerar o triângulo ABC de base b e altura h e o retângulo ACDE.





Os triângulos ABE e ABH são congruentes, o mesmo ocorrendo com os triângulos BCD e BCH. Assim, a área do triângulo ABC vale a metade da área do retângulo ACDE.

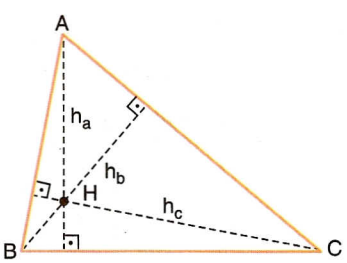
De modo geral, para um triângulo de base b e altura h, podemos escrever:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura.

A área de um triângulo independe da base considerada. Assim, para um triângulo ABC, temos:

$$A = \frac{1}{2} BC \cdot h_a = \frac{1}{2} AB \cdot h_c = \frac{1}{2} AC \cdot h_b$$



Exemplo 4

Considerando o triângulo ABC da página anterior, supondo BC = 7 cm e h_a = 6 cm, temos:

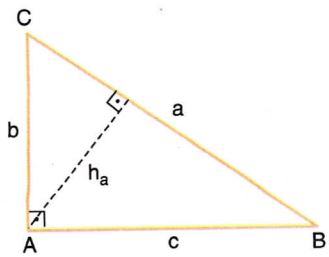
$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \Rightarrow A = 21 \text{ cm}^2$$

Ainda, dada a medida h_b = 5 cm, podemos determinar a medida do lado $\overline{AC}$. Basta fazer:

$$21 = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 5 \Rightarrow AC = \frac{42}{5} \text{ cm}$$

Casos particulares

▶ *Triângulo retângulo*



A área do triângulo retângulo vale metade do produto dos catetos:

$$A = \frac{1}{2} bc$$

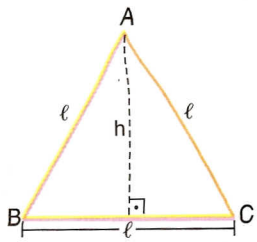
$$\frac{1}{2} a \cdot h_a$$

relação métrica: $ah_a = bc$

▶ *Triângulo eqüilátero*

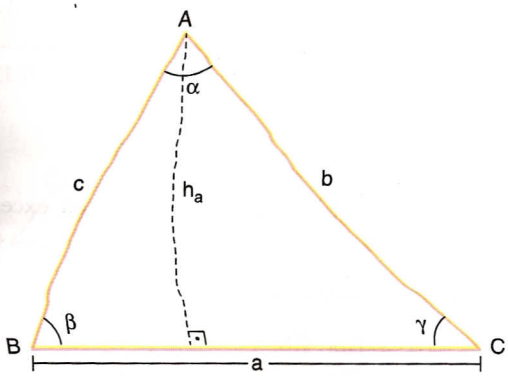
Como a altura do triângulo eqüilátero mede $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, a área é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$



Outras expressões da área de um triângulo

▶ **1ª** *Em função de dois lados e do ângulo compreendido entre eles.*



Temos $A = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ e $sen\ \beta = \frac{h_a}{c} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_a = c \cdot sen\ \beta$

Assim: $A = \frac{1}{2} ac\ sen\ \beta$.

De modo geral:

$$A = \frac{1}{2} ac\ sen\ \beta = \frac{1}{2} bc\ sen\ \alpha = \frac{1}{2} ab\ sen\ \gamma$$

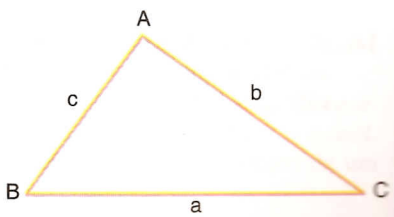
▶ **2ª** Em função dos três lados — fórmula de Hierão:

Considerando o perímetro 2p do triângulo ABC, temos:

$2p = a + b + c$ e $\frac{a + b + c}{2} = p$ (semiperímetro)

Demonstra-se que a área do triângulo ABC é dada por:

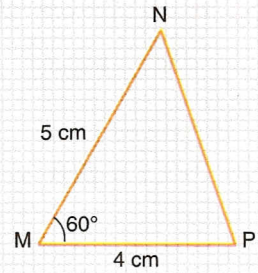
$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$



Exemplo 5

Seja o triângulo MNP representado na figura. Temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{sen } 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 5\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



Exemplo 6

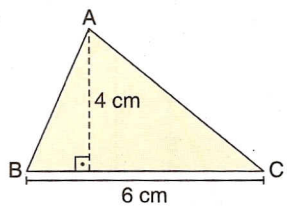
O triângulo de lados de medidas 5 cm, 8 cm e 11 cm tem perímetro $2p = 5 + 8 + 11 = 24$ cm e semiperímetro $p = 12$ cm. Assim, sua área é dada por:

$$A = \sqrt{12 \cdot (12 - 5) \cdot (12 - 8) \cdot (12 - 11)} = \sqrt{12 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1} \Rightarrow A = 4\sqrt{21} \text{ cm}^2$$

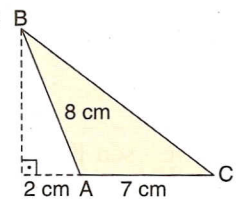
Exercícios

12 Calcule a área do triângulo ABC em cada caso:

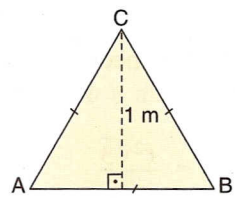
a)



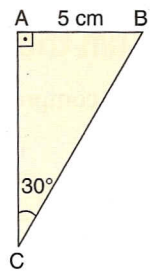
b)



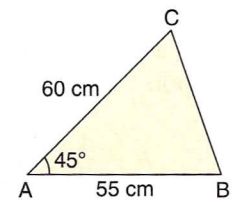
c)



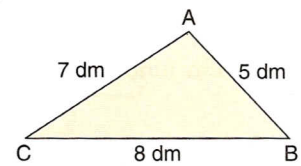
d)



e)



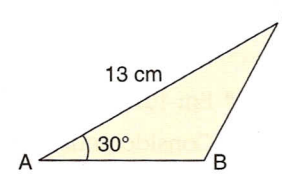
f)



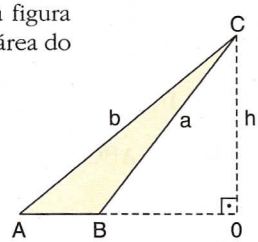
13 Em um triângulo retângulo um dos catetos mede 11 cm e a hipotenusa tem medida excedendo 4 cm a medida do outro cateto. Determine a área do triângulo.

14 Determine a área de um triângulo cujos lados medem 6 cm, 9 cm e 12 cm.

15 A área do $\triangle ABC$ da figura vale 26 cm²; determine a medida do lado $\overline{AB}$.



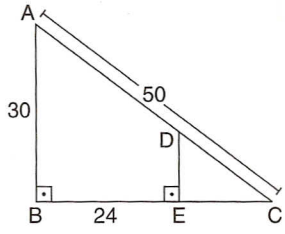
16 (U. F. Ouro Preto-MG) Sabendo que, na figura ao lado, $h = 4$, $a = 5$ e $b = \sqrt{41}$, calcule a área do triângulo ABC.



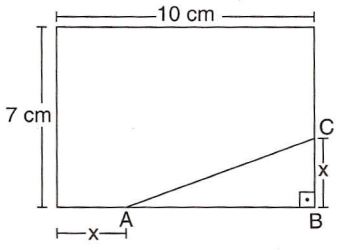
17 Observe a figura e responda:

a) Que parcela da área do triângulo ABC é ocupada pelo triângulo CDE?

b) Qual a razão entre a área do trapézio ABDE e a do triângulo CDE?



18 (U. F. Ouro Preto-MG) Determine, com base na figura, os valores de x, de forma que a área do triângulo ABC seja maior que 12 cm^2.

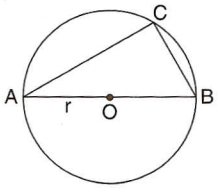


19 (FEI-SP) O lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC é diâmetro de uma circunferência de raio 2 cm; o vértice C é ponto dessa circunferência. Nessas condições, determine o maior valor que a área do triângulo ABC pode assumir.

20 (U. F. Viçosa-MG) Seja $\overline{AB}$ o diâmetro de uma circunferência de raio r, e seja C um ponto pertencente a ela, distinto de A e B, conforme figura ao lado.

a) Sendo o ângulo $A\hat{B}C = \beta$, determine a área do triângulo ABC, em função de β e r.

b) Essa área é máxima para qual valor de β?

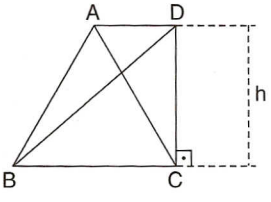


21 (UF-PA) A base e a altura de um triângulo medem, respectivamente, 6x e x + 1, e a base e a altura de um retângulo medem, respectivamente, 2x + 2 e x + 2, com $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Encontre os valores de x para que a área do triângulo seja maior que a área do retângulo.

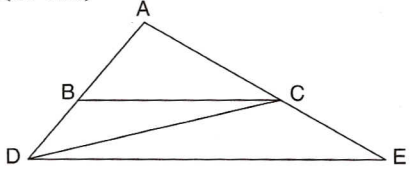
22 (U. F. Ouro Preto-MG) O triângulo eqüilátero ABC e o triângulo retângulo BCD têm a mesma altura h.
Se a área do triângulo ABC é $4\sqrt{3}$, calcule:

a) a área do triângulo BCD.

b) a área do triângulo ACD.



23 (UF-MG)



Nessa figura, os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. Sendo A_1 e A_2 as áreas dos triângulos ABC e BCD, respectivamente, sabe-se que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{3}$.

Calcule o valor de $\frac{A_3}{A_2}$, sendo A_3 a área do triângulo DCE.

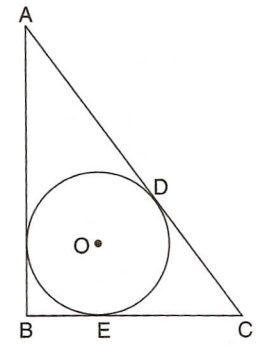
24 (UF-GO) Dado o triângulo ABC, retângulo em A, toma-se um ponto D sobre o lado $\overline{BC}$. Sabendo-se que $\overline{AB}$ mede 1 cm e o ângulo oposto a esse lado mede 30°, determine a medida do segmento $\overline{BD}$, de modo que a área do triângulo ABC seja o triplo da área do triângulo ABD.

25 Os moradores de um condomínio pretendiam construir um enfeite natalino que consistiria de um painel colorido circundado por um cordão de lâmpadas.
Inicialmente projetou-se um formato de triângulo eqüilátero e foi construído o apoio do cordão da base.
Posteriormente notou-se que havia lâmpadas de sobra, o que motivou a idéia de aumentar o painel.
Utilizou-se a base já construída, e a altura do painel foi duplicada, ficando este com o formato de um triângulo isósceles.
Qual foi o percentual de acréscimo observado em relação ao projeto original:

a) quanto ao comprimento do cordão?

b) quanto à área do painel?

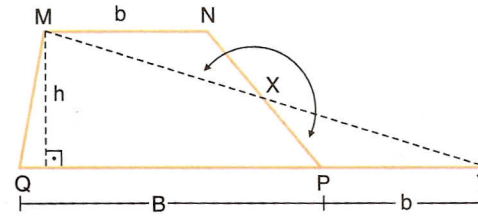
26 (U. F. Viçosa-MG) Na figura, ABC é um triângulo retângulo com catetos de medidas BC = 3 e BA = 4; a circunferência de centro *O*, inscrita no triângulo, tangencia-o nos pontos *D* e *E*. Determine a área do polígono ABEOD.



6 Área do trapézio

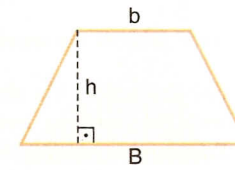
Seja o trapézio MNPQ da figura, de bases *B* e *b* e altura *h*.

Prolongando-se a base maior de um segmento de medida *b* (medida da base menor), notamos que os triângulos formados, MNX e YPX, são congruentes. Assim, a área do trapézio pode ser dada como a área do triângulo MQY:



$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

A área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das bases pela altura.



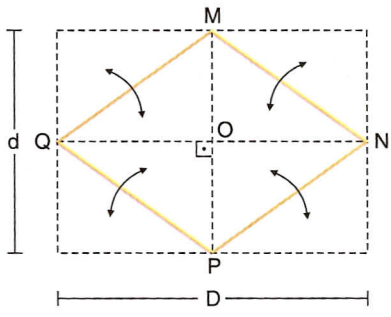
Exemplo 7

A área de um trapézio de bases 6 dm e 3 dm e altura 2 dm é dada por:

$$A = \frac{6 + 3}{2} \cdot 2 \Rightarrow A = 9 \text{ dm}^2$$

7 Área do losango

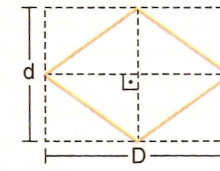
Seja o losango MNPQ da figura, de diagonais *D* e *d*.



Construído o retângulo de dimensões *D* e *d*, notamos que, sendo congruentes os oito triângulos retângulos formados, a extensão ocupada pelo losango vale a metade da ocupada pelo retângulo. Assim:

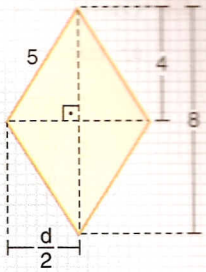
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

A área do losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.



Exemplo 8

Um losango de lado $\ell = 5$ cm e diagonal $D = 8$ cm possui a diagonal d dada pelo teorema de Pitágoras:

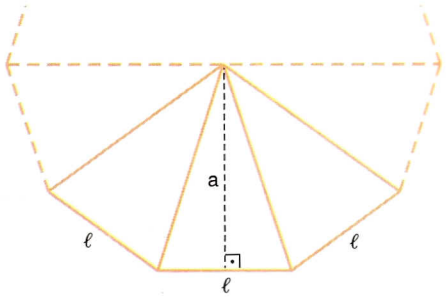


$$5^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 4^2 \Rightarrow \frac{d}{2} = 3 \Rightarrow d = 6 \text{ cm}$$

Assim, a área do losango vale:

$$A = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow A = 24 \text{ cm}^2$$

8 Área do polígono regular



Apótema de um polígono regular é o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um lado.

Todo polígono regular de n lados de medida ℓ pode ser decomposto em n triângulos de base ℓ e altura a, sendo a o apótema do polígono.

A área do polígono é dada por:

$$A = n \cdot A_\Delta = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \underbrace{n\ell}_{\text{perímetro}} \cdot \frac{a}{2} = 2p \cdot \frac{a}{2} = \underbrace{p}_{\text{semiperímetro}} \cdot a$$

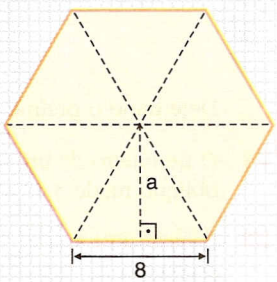
Em geral:

$$A = p \cdot a$$

A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

Exemplo 9

Na determinação da área de um hexágono regular de lado 8 cm, devemos notar que ele pode ser decomposto em seis triângulos *eqüiláteros*. O apótema do hexágono é a própria altura de cada triângulo:



$$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

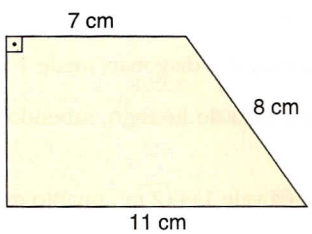
Assim:

$$A = p \cdot a = \frac{6\ell}{2} \cdot a = 3 \cdot \ell \cdot a = 3 \cdot 8 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

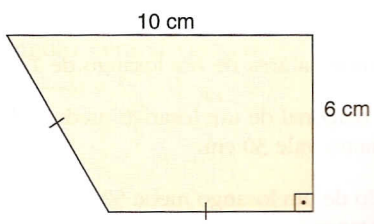
Exercícios

27 Determine a área de cada trapézio retângulo:

a)

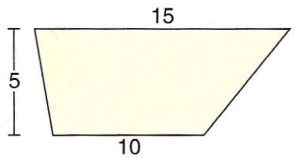


b)

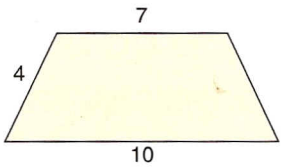


28 Considere em centímetros as medidas indicadas e determine a área de cada polígono:

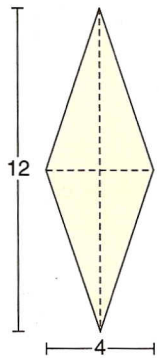
a) trapézio



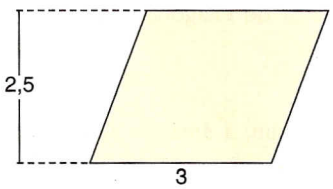
b) trapézio isósceles



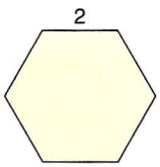
c) losango



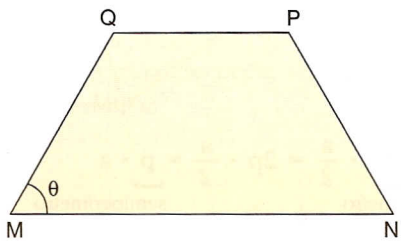
d) losango



e) hexágono regular

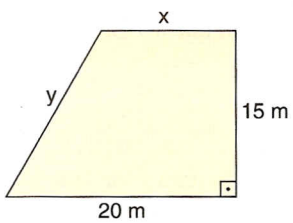


29 (UE-CE)



MNPQ é um trapézio isósceles.
MN = 20 cm, QP = 10 cm e $\theta = 60^\circ$.
Determine, em cm^2, a área do trapézio.

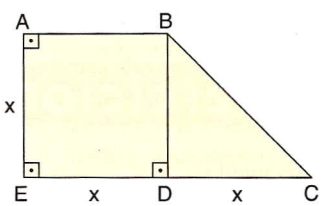
30 (UF-AL) Na figura, tem-se a planta de um terreno com forma de trapézio e área de 240 m^2.



Determine o perímetro do terreno.

31 O perímetro de um trapézio isósceles vale 22 cm. Se uma das bases mede o dobro da outra e cada lado oblíquo mede 3,5 cm, quanto mede a área do trapézio?

32 (Unicap-PE) A área da região hachurada, abaixo, é de 54 cm^2. Determine, em metros, o comprimento do segmento de reta $\overline{EC}$.

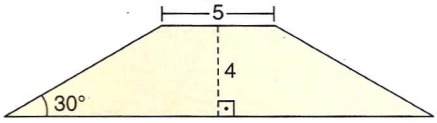


33 Determine a área de um losango de 13 dm de lado sabendo que uma das diagonais mede 1 m.

34 Uma diagonal de um losango mede o dobro da outra. Determine a área do losango, sabendo que o seu perímetro vale 30 cm.

35 O lado de um losango mede 50% a mais que uma diagonal. Se a área vale $144\sqrt{2}$ m^2, quanto mede o lado do losango?

36 (UF-BA) Considere verdadeiro ou falso:



a) Num losango de área 1200 cm², se a razão entre as diagonais é 3 : 8, o lado mede $5\sqrt{73}$ cm.

b) O trapézio isósceles representado na figura tem área igual a $4(5 + 4\sqrt{3})$ unidades de área.

37 Determine a área de um hexágono regular de $13\sqrt{2}$ cm de apótema.

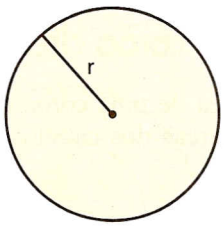
38 Determine a área de um pentágono regular de lado ℓ e apótema a.

39 É dado um hexágono regular de lado ℓ; um quadrado tem o mesmo perímetro desse hexágono. Mostre que a área do quadrado é menor que a área do hexágono.

9 Área do círculo

Um círculo de raio r tem a área dada pelo produto:

$$A = \pi r^2$$

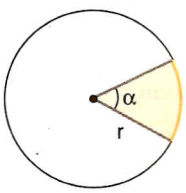


Exemplo 10

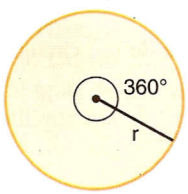
A área de um círculo de diâmetro 6 cm é dada pelo produto $A = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ cm², pois $r = \frac{6}{2} = 3$ cm.

Área do setor circular

Seja um setor de α° e raio r.



setor de α°



setor de 360°

A área do setor é diretamente proporcional à medida do ângulo central. Vamos calcular a área pela regra de três:

	área		ângulo central (graus)	
setor:	A	———	α°	} ⇒
círculo:	πr^2	———	360°	

$$\Rightarrow \frac{A}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$$

Exemplo 11

Um setor de 45° de um círculo de 10 cm de raio equivale à oitava parte $\left(45° = \frac{360°}{8}\right)$ do círculo. Assim, sua área é dada por:

$$A = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 10^2 \Rightarrow A = \frac{25\pi}{2}\ cm^2$$

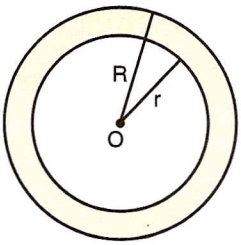
Entretanto, em outras condições poderíamos aplicar a fórmula deduzida acima:

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 45°}{360°} = \frac{25\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{25\pi}{2}\ cm^2$$

Para α em radianos, a área de um setor é dada por: $A = \frac{\alpha r^2}{2}$.

Área da coroa circular

A área de uma coroa circular de raios R e r é dada pela diferença entre as áreas dos círculos de raios R e r, nesta ordem:



$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Exemplo 12

A área da coroa circular de raios 5 cm e 2 cm é:

$$A = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 2^2 = 21\pi \Rightarrow A = 21\pi\ cm^2$$

Exercícios

40 Determine a área de um círculo:

a) de raio 6 dm.

b) de raio $\frac{6}{\pi}$ dm.

c) de diâmetro 4 cm.

d) de 20π cm de perímetro.

41 Um círculo é equivalente a um quadrado de 6 cm de lado. Adote $\pi = 3{,}14$ e determine a medida aproximada do raio do círculo.

42 Determine a área do semicírculo cujo perímetro mede $2\pi(2 + \pi)$ cm.

43 Um setor circular de raio 6 cm tem o ângulo central indicado em cada caso. Determine sua área.

a) 60°

b) $\frac{\pi}{6}$ rad

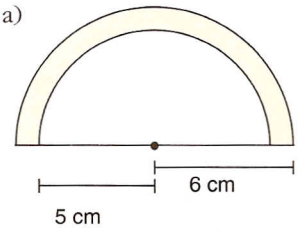
c) 50°

d) 120°

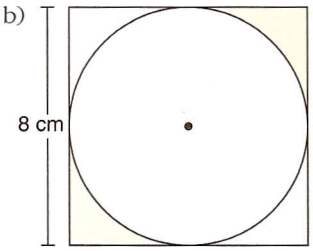
e) $\frac{\pi}{2}$ rad

44 Determine a área da região assinalada em cada caso:

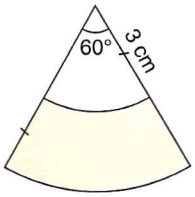
a)



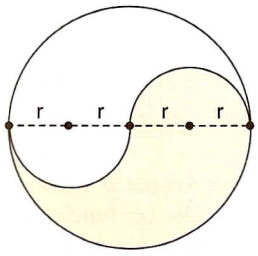
b)



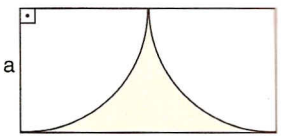
c)



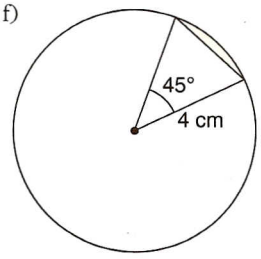
d)



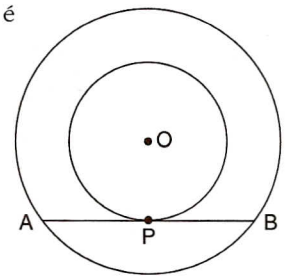
e)



f)



45 (UF-RS) Na figura, OP = 2, AB = 8, *O* é o centro dos círculos e $\overline{AB}$ é tangente, em *P*, ao círculo menor.
Determine a área do disco maior.

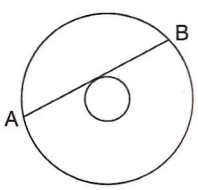


46 Determine a área de um semicírculo inscrito num retângulo de 8 m de base.

47 Qual é a razão entre as áreas de um quadrado inscrito e um quadrado circunscrito à mesma circunferência?

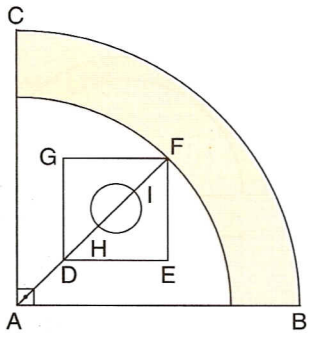
48 Calcule a área da região compreendida entre uma circunferência de raio 8 cm e o hexágono regular inscrito nela.

49 (UF-GO) Considere duas circunferências de mesmo centro, uma de raio r e a outra de raio R, sendo $r < R$. O segmento $\overline{AB}$, representado na figura ao lado, é tangente à circunferência menor. Sejam A_1 a área da região exterior ao círculo menor e interior ao maior, e A_2 a área de um círculo cujo diâmetro é igual ao segmento $\overline{AB}$. Uma das áreas, citadas acima, é maior que a outra? Justifique sua resposta.



50 (UF-MT) A etiqueta do CD mostrado na figura tem a forma de uma coroa circular cujo diâmetro da circunferência externa mede 11,8 cm e da circunferência interna, 3,6 cm. Considerando $\pi = 3{,}14$, determine o número inteiro mais próximo da medida (em cm^2) da área da etiqueta.

51 (UF-SC) A figura ao lado representa um campo de beisebol. Sabe-se que:



a) AB = AC = 99 m;

b) AD = 3 m;

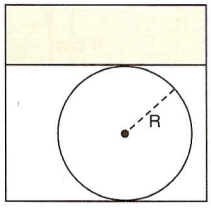
c) $HI = \frac{DF}{6}$;

d) o arremessador fica no círculo localizado no centro do quadrado;

e) a área hachurada mede 1458π m^2.

Determine o raio, em metros, do círculo onde fica o arremessador.

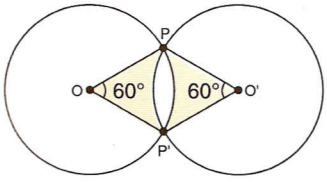
52 (UF-GO) Um quadrado de 4 cm de lado é dividido em dois retângulos. Em um dos retângulos, coloca-se um círculo, de raio R, tangenciando dois de seus lados opostos, conforme figura ao lado.



a) Escreva uma expressão que represente a soma das áreas do círculo e do retângulo que não contém o círculo, em função de R.

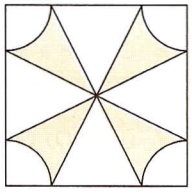
b) Qual deve ser o raio do círculo, para que a área pedida no item anterior seja a menor possível?

53 (UFF-RJ) As circunferências de centros O e O' possuem, ambas, 1 cm de raio e se interceptam nos pontos P e P', conforme mostra a figura.



Determine a área da região assinalada.

54 (U. F. São Carlos-SP) Considere a região R, assinalada, exibida ao lado, construída no interior de um quadrado de lado medindo 4 cm.

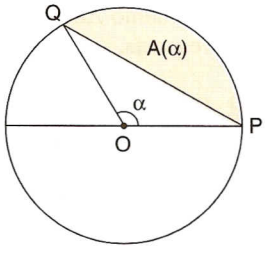


Sabendo-se que os arcos de circunferência que aparecem nos cantos do quadrado têm seus centros nos vértices do quadrado e que cada raio mede 1 cm, pede-se:

a) a área da região interna ao quadrado, complementar à região R;

b) a área da região R.

55 (UnB-DF) No sistema de coordenadas xOy, considere a circunferência de centro na origem e de raio igual a 1. A cada ângulo central α no intervalo $[0, \pi]$, represente por $A(\alpha)$ a área delimitada pelo arco da circunferência e o segmento de reta que liga os pontos P e Q, como ilustrado na figura ao lado.



Com base nessas informações, considere verdadeiro ou falso:

a) A área A é uma função crescente do ângulo central α.

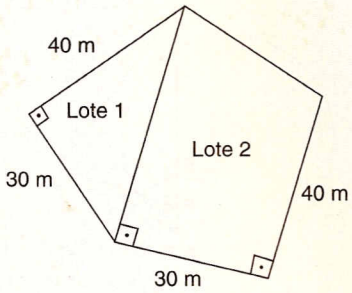
b) $\frac{1}{4} < A\left(\frac{\pi}{2}\right) < \frac{1}{2}$

c) $A(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - \text{sen } \alpha)$

Testes de vestibulares

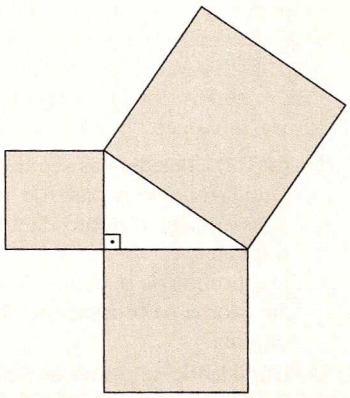
1 (Cefet-PR) A área do terreno cuja planta se apresenta abaixo e que é dividido em dois lotes, em m^2, é:

a) 1800
b) 1950
c) 2050
d) 2200
e) 2400



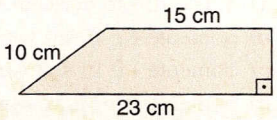
2 (Mackenzie-SP) Na figura, a soma das áreas dos três quadrados é 18. A área do quadrado maior é:

a) 8
b) 12
c) 6
d) 9
e) 10



3 (Unopar-PR) A área do trapézio, em cm^2, é:

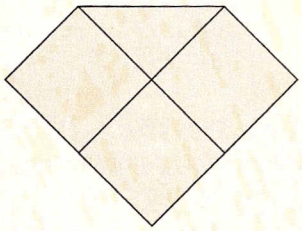
a) 380
b) 230
c) 165
d) 145
e) 114



4 (Unopar-PR) O diâmetro de um círculo está sobre o lado de um triângulo eqüilátero de $\sqrt{3}$ cm de altura. A área do círculo vale, em cm^2:

a) $\frac{\pi}{2}$
b) π
c) 2π
d) 3π
e) 4π

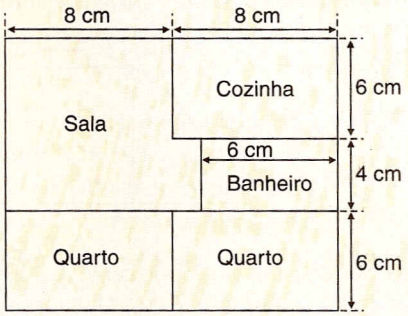
5 (ESPM-SP) Examine o polígono desenhado, o qual é formado a partir de três quadrados, cada um com lados de medida x cm.



O perímetro, em centímetros, e a área, em centímetros quadrados, desse polígono são dados, respectivamente, pelas expressões:

a) $\frac{11x}{2}$; $3x^2$
b) $6x + \sqrt{2}$; $\frac{7x^2}{2}$
c) $(6 + \sqrt{2})x$; $\frac{7x^2}{2}$
d) $(6 + \sqrt{2})x$; $7x^2$
e) $6x + \sqrt{2}$; $\frac{11x^2}{2}$

6 (UF-SE) A planta apresentada abaixo tem escala 1 : 50, ou seja, cada medida de 1 cm na planta representa uma medida real de 50 cm.

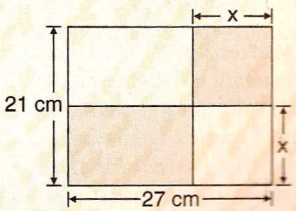


A área real da sala, em metros quadrados, é igual a:

a) 20
b) 22
c) 24
d) 26
e) 28

7 (FEI-SP) Determinar a medida x, indicada na figura, de modo que a soma das áreas dos retângulos em destaque (com hachura) seja máxima.

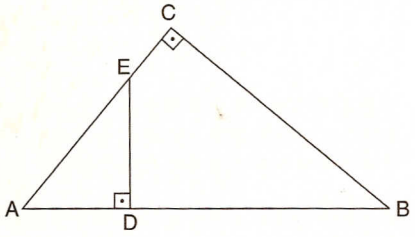
a) 24 cm
b) 20 cm
c) 15 cm
d) 12 cm
e) 8 cm



8 (U. F. Viçosa-MG) As medidas do lado, do perímetro e da área de um quadrado estão, nesta ordem, em progressão geométrica. A diagonal desse quadrado mede:

a) $16\sqrt{2}$ c) $12\sqrt{2}$ e) $18\sqrt{2}$
b) $10\sqrt{2}$ d) $14\sqrt{2}$

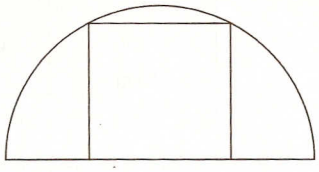
9 (UF-RS) Na figura abaixo, AC = 5, BC = 6 e DE = 3.



A área do triângulo ADE é:

a) $\frac{15}{8}$ c) $\frac{15}{2}$ e) 15
b) $\frac{15}{4}$ d) 10

10 (UF-RN) A figura mostra um quadrado inscrito num semicírculo de raio r. Sabendo que a área do quadrado é 36 cm², podemos afirmar que o valor de r é:



a) 45 cm
b) $9\sqrt{5}$ cm
c) $5\sqrt{3}$ cm
d) $3\sqrt{5}$ cm
e) $2\sqrt{5}$ cm

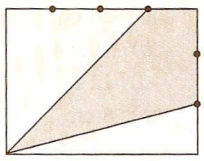
11 (PUC-MG) Os vinte por cento da área de um triângulo eqüilátero T equivalem à área de um triângulo eqüilátero de lado unitário. O comprimento do lado do triângulo T é:

a) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$
b) $3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{7}$

12 (UF-MG) Uma fazenda tem uma área de 0,4 km². Suponha que essa fazenda seja um quadrado, cujo lado mede ℓ metros.
O número ℓ satisfaz a condição:

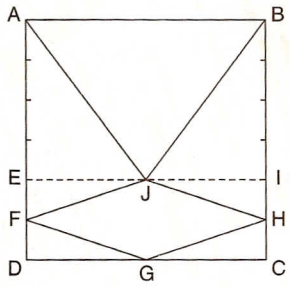
a) $180 < \ell < 210$ c) $400 < \ell < 500$
b) $210 < \ell < 250$ d) $600 < \ell < 700$

13 (Mackenzie-SP) Os lados do retângulo da figura, de área 48, foram divididos em 7 partes iguais pelos pontos assinalados. A área do quadrilátero destacado é:



a) 32 c) 20 e) 22
b) 24 d) 16

14 (Fatec-SP) Na figura abaixo, os lados do quadrado ABCD medem 6 cm e os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ estão divididos em 6 partes iguais.



Se os pontos G e J são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{EI}$, então a razão entre as áreas do losango FGHJ e do triângulo ABJ, nessa ordem, é:

a) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{2}{5}$
b) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{2}$

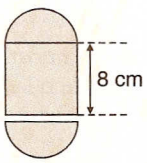
15 (Unifor-CE) Considere as seguintes proposições:

I. Duplicando-se a base de um retângulo, a área torna-se o dobro da área do retângulo original.
II. Duplicando-se a altura de um triângulo, a área torna-se o dobro da área do triângulo original.
III. Duplicando-se o raio de um círculo, a área torna-se o dobro da área do círculo original.

É correto afirmar que:

a) I, II e III são verdadeiras.
b) somente I e II são verdadeiras.
c) somente I e III são verdadeiras.
d) somente II e III são verdadeiras.
e) somente uma das proposições é verdadeira.

16 (UGF – Universidade Gama Filho-RJ) Nas comemorações de fim de ano, um homem caminha sobre a areia molhada da praia sem tirar os sapatos. Olhando para trás, observa que suas pegadas são formadas por 2 semicírculos de raios iguais, e por um quadrado, como mostra a figura acima. Supondo que o lado do quadrado mede 8 cm, a área de uma pegada, em cm², é aproximadamente igual a:

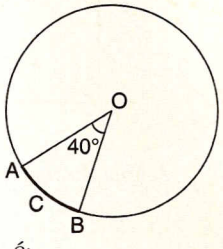


a) 110 c) 113 e) 118
b) 112 d) 114

17 (Unaerp-SP) Dois círculos concêntricos de raios R_1 e R_2, tais que $R_1 + R_2 = 2d$, formam uma coroa circular de largura d. A área dessa coroa corresponde a:

a) πd
b) $2\pi d$
c) $4\pi d$
d) $2\pi d^2$
e) $4\pi d^2$

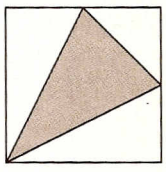
18 (UF-SE) Sabe-se que o comprimento do arco $\overset{\frown}{ACB}$, destacado no círculo de centro O, é $\frac{2\pi}{3}$ cm. Nessas condições, a área do círculo, em centímetros quadrados, é:



a) 6π
b) 8π
c) 9π
d) 12π
e) 15π

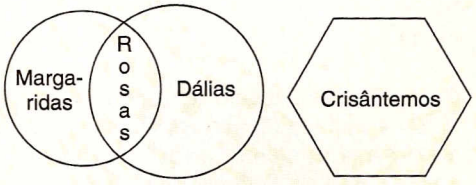
19 (U. F. Viçosa-MG) Une-se um dos vértices de um quadrado aos pontos médios dos lados que não contêm esse vértice, obtendo-se um triângulo isósceles (veja figura abaixo). A área desse triângulo, em relação à área do quadrado, representa:

a) 38,5%
b) 37,5%
c) 36,5%
d) 35,5%
e) 39,5%

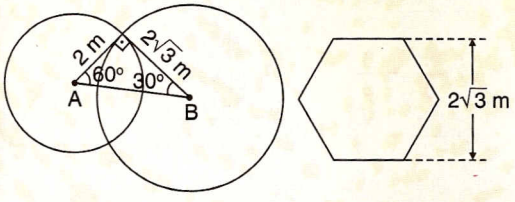


Para responder aos testes de números 20 e 21 considere as informações e as figuras que seguem.

Nas figuras abaixo, tem-se uma vista superior de dois jardins de uma praça.



Nas figuras abaixo, têm-se esboços dos projetos desses jardins. Um dos jardins é formado a partir de dois círculos, de centros em A e em B. O outro tem a forma de um polígono regular.



Em seus cálculos, use $\pi = 3{,}1$ e $\sqrt{3} = 1{,}7$.

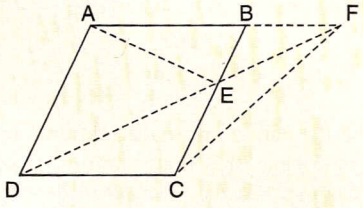
20 (Puccamp-SP) De acordo com o projeto, qual é, aproximadamente, a área do jardim reservado às rosas?

a) 3,4 m²
b) 4 m²
c) 4,2 m²
d) 4,8 m²
e) 5,8 m²

21 (Puccamp-SP) Deseja-se cercar com uma grade o canteiro reservado aos crisântemos. Para isso, é preciso obter seu perímetro, que é igual a:

a) 8,6 m
b) 9 m
c) 10,8 m
d) 11,2 m
e) 12 m

22 (UF-PE) Seja ABCD um paralelogramo e E um ponto no lado $\overline{BC}$. Seja F a interseção da reta passando por A e B com a reta passando por D e E (veja a figura).



Considerando os dados acima, não podemos afirmar que:

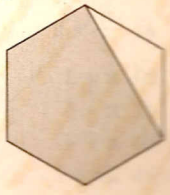
a) a área de ADE é metade da área de ABCD.
b) DCF e ADE têm a mesma área.
c) ABE e CDE têm a mesma área.
d) ABE e CEF têm a mesma área.
e) a área de ABCD é igual à soma das áreas de ADE e DCF.

23 (Unifor-CE) De uma lâmina quadrada de metal corta-se uma peça circular do maior tamanho possível, e desta corta-se um quadrado, também do maior tamanho possível. Se o lado do quadrado original mede 16 cm, a área da superfície do metal que foi desperdiçado, em centímetros quadrados, é:

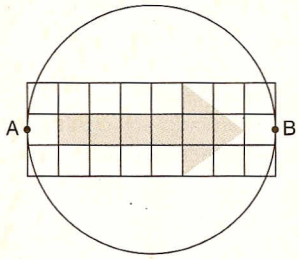
a) 136
b) 128
c) 64
d) 48
e) 32

24 (Mackenzie-SP) Se o hexágono regular da figura tem área 2, a área do pentágono assinalado é:

a) $\frac{7}{2}$
b) $\frac{7}{3}$
c) $\frac{5}{6}$
d) $\frac{4}{3}$
e) $\frac{5}{3}$



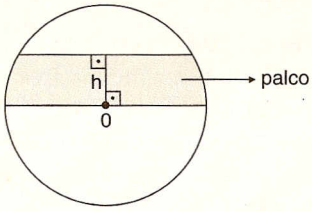
25 (UMC-SP) Para confeccionar uma placa de indicação foi utilizado um círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e sobre ele foi colocada uma malha quadriculada tendo cada quadrado 5 cm de lado e o símbolo, pintado em cinza, conforme figura a seguir.



Retirada a malha e mantido o símbolo, a área ocupada pelo símbolo e a área do círculo não utilizada são, respectivamente:

a) 175 cm^2 e $(400\pi - 175)$ cm^2
b) 175 cm^2 e $(400\pi - 600)$ cm^2
c) 600 cm^2 e $(400\pi - 600)$ cm^2
d) 175 cm^2 e 225 cm^2
e) 600 cm^2 e 1000 cm^2

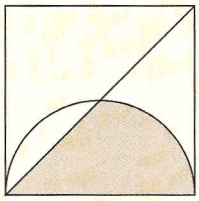
26 (UFF-RJ) Para a encenação de uma peça teatral, os patrocinadores financiaram a construção de uma arena circular com 10 m de raio. O palco ocupará a região representada pela parte hachurada na figura a seguir:



Se O indica o centro da arena e se h mede 5 m, então, a área do palco, em m^2, vale:

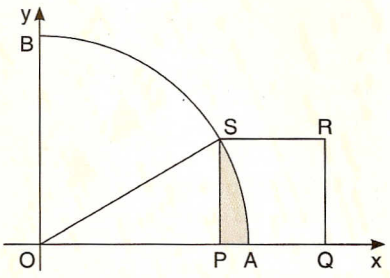
a) $\frac{75\sqrt{3} + 50\pi}{3}$
b) $\frac{25\sqrt{3}\pi}{2}$
c) $\frac{50\sqrt{2} + \pi}{2}$
d) $\frac{5\sqrt{2} + 10\pi}{3}$
e) 100π

27 (Fuvest-SP) Na figura estão representados um quadrado de lado 4, uma de suas diagonais e uma semicircunferência de raio 2. Então a área da região hachurada é:



a) $\frac{\pi}{2} + 2$
b) $\pi + 2$
c) $\pi + 3$
d) $\pi + 4$
e) $2\pi +$.

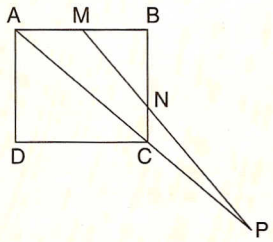
28 (UF-RS) Na figura abaixo, ASB é arco do círculo de raio 2 com centro na origem, e PQRS é quadrado de área 1.



A área da região sombreada é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}$
b) $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$
d) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
e) $\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

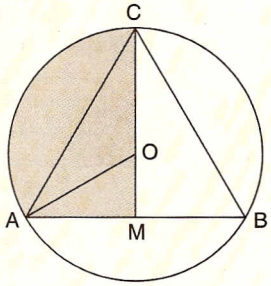
29 (UF-PI) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado 6 cm, e M é ponto médio do lado $\overline{AB}$. Se o comprimento da diagonal $\overline{AC}$ é igual ao comprimento do segmento $\overline{CP}$, a área, em cm^2, do quadrilátero AMNC vale:



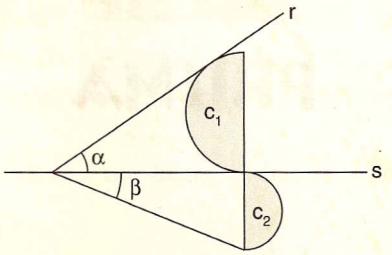
a) 10
b) 12
c) 14
d) 18
e) 20

30 (Cefet-PR) Um triângulo eqüilátero ABC, de altura h = 3 cm, está inscrito em um círculo de centro O. Sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, a região hachurada, limitada pelos segmentos $\overline{AM}$, $\overline{MC}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AC}$, tem área igual a:

a) $\frac{3\pi}{2}$
b) $\frac{4\pi}{3}$
c) $\frac{4\pi}{3} + \frac{3}{2}$
d) $\frac{3\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$



31 (UF-CE) Considere a figura abaixo, na qual:
- a área do semicírculo c_1 é quatro vezes a área do semicírculo c_2;
- a reta r é tangente a c_1 e a reta s é tangente a c_1 e c_2.

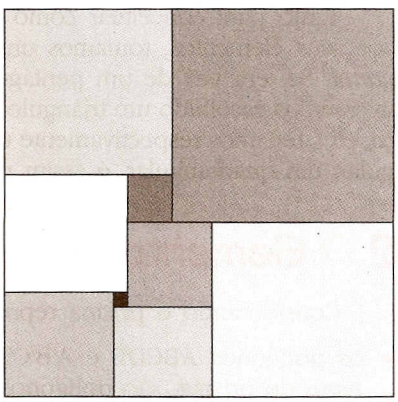


Então, podemos afirmar corretamente que:

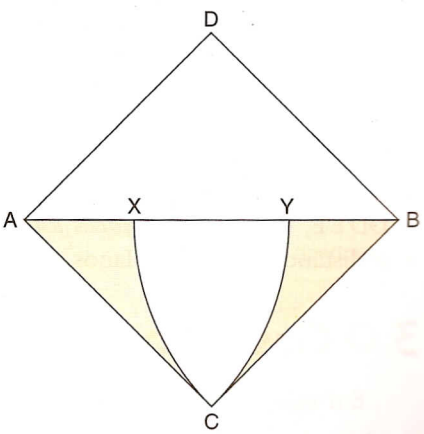
a) $\alpha = \frac{5}{2}\beta$ b) $\alpha = \frac{3}{2}\beta$ c) $\alpha = 4\beta$ d) $\alpha = 2\beta$ e) $\alpha = \frac{2}{3}\beta$

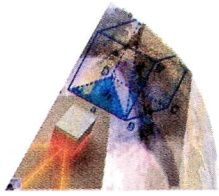
Desafios

1 (UF-PE) O retângulo ao lado foi dividido em nove quadrados. Se o quadrado menor tem área 1, qual a soma dos dígitos da área do retângulo?



2 Na figura, A e B, além de serem vértices de um quadrado, são centros dos arcos que passam por C. Sendo a área da região hachurada igual a $(64 - 16\pi)$ cm^2, determine a medida do segmento $\overline{XY}$.



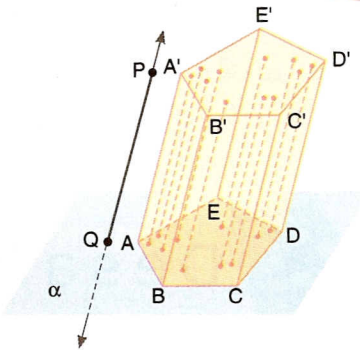


PRISMA

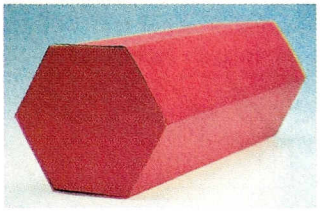
29

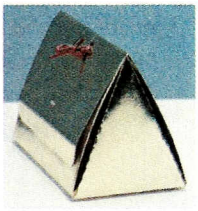
1 ○ Conceito

Consideremos um polígono (ou região poligonal) ABCDE de cinco lados num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta α. Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a $\overline{PQ}$, cada um deles com uma das extremidades num dos pontos de ABCDE e todos com a outra extremidade num mesmo semi-espaço dos determinados por α. A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado *prisma pentagonal*.



Tanto para conceituar como para dar nome aos seus elementos, tomamos um *prisma pentagonal*. Se, em vez de um pentágono como base tivéssemos escolhido um triângulo, um quadrilátero, etc., teríamos respectivamente um prisma triangular, um quadrangular, e assim por diante.

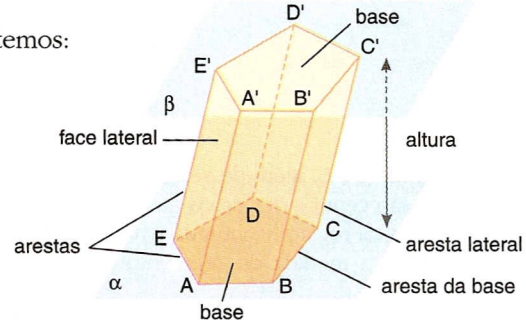




Albany Estúdio

2 ○ Elementos

Considerando o prisma representado ao lado, temos:



α e β: planos das bases

- os polígonos ABCDE e A′B′C′D′E′, chamados *bases* do prisma, são polígonos congruentes e estão situados em planos paralelos. Esses planos (α e β) são os *planos das bases*;
- os lados, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'A'}$ são as *arestas das bases*;
- os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$ são as *arestas laterais*;
- os paralelogramos AA′B′B, BB′C′C, CC′D′D, DD′E′E, EE′A′A são as *faces laterais*;
- a distância entre os planos α e β que contêm as bases é a *altura* do prisma.

3 ○ Classificação

Em relação ao número de lados dos polígonos das bases, os prismas podem ser:

- triangulares — as bases são triângulos;
- quadrangulares — as bases são quadriláteros;

- pentagonais — as bases são pentágonos;
- hexagonais — as bases são hexágonos,

e assim por diante.

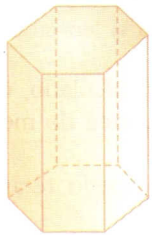
Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas classificam-se em:

- oblíquos — as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases;
- retos — as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Em todo prisma reto as faces laterais são *retângulos*.

Eis alguns exemplos de prismas para ilustrar a classificação:

prisma reto (quadrangular) | prisma reto (pentagonal) | prisma oblíquo (heptagonal) | prisma oblíquo (triangular)

Um caso particular de prisma reto é o *prisma regular*, que tem como bases polígonos regulares (triângulos eqüiláteros, quadrados, hexágonos regulares, etc.).



prisma regular (hexagonal)

4 Paralelepípedo

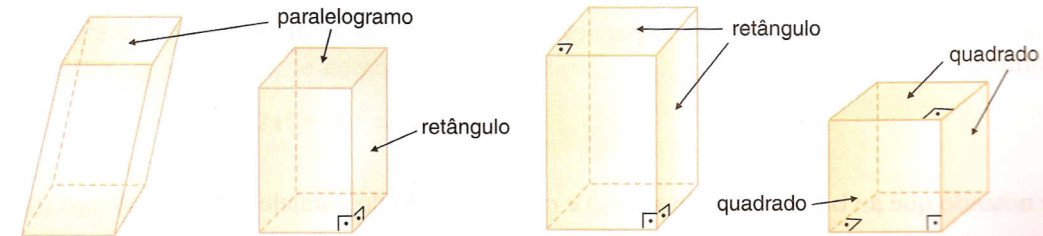
Um prisma quadrangular particular de grande importância é o *paralelepípedo*, que tem *paralelogramos* como bases. Assim, as seis faces de um paralelepípedo são paralelogramos.

Quando as bases de um prisma reto são retângulos, ele é chamado *paralelepípedo retângulo* (ou ortoedro ou paralelepípedo reto-retângulo ou, ainda, bloco retangular).

As seis faces de um paralelepípedo retângulo são *retângulos*.

Um tipo especial de paralelepípedo retângulo é o cubo, cujas seis faces são *quadrados*.

Alguns exemplos de paralelepípedos:

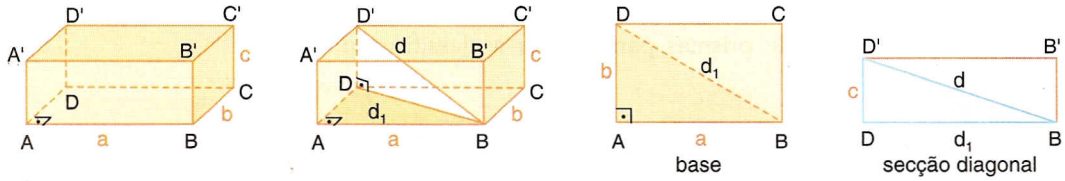


paralelepípedo oblíquo | paralelepípedo reto | paralelepípedo reto-retângulo | cubo

Paralelepípedo retângulo

Seja um paralelepípedo retângulo cujo retângulo da base tem lados a e b e cuja altura é c; dizemos que esse paralelepípedo tem dimensões a, b e c. Ele possui quatro arestas de medida a, quatro de medida b e quatro de medida c. A qualquer vértice concorrem três arestas, cada uma com medida diferente em relação às outras.

Vamos obter a área total S, a diagonal d e o volume V deste paralelogramo:



- *Cálculo de* S

A área total é a área da superfície total: seis retângulos, dos quais dois têm dimensões a e b, dois têm dimensões a e c e dois têm dimensões b e c.

Assim: $S = 2ab + 2ac + 2bc$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

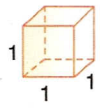
- *Cálculo de* d

Indicando por d_1 a medida da diagonal da base ABCD, temos:

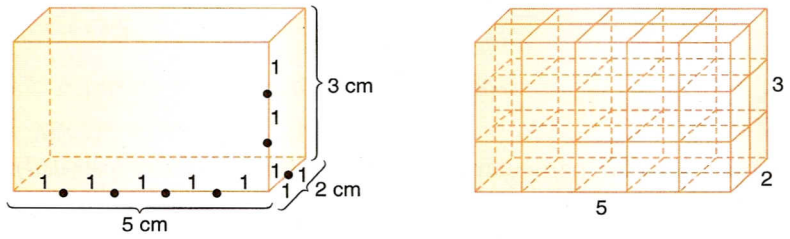
$$\left.\begin{array}{l}\text{No } \triangle BAD\text{: } d_1^2 = a^2 + b^2 \\ \text{No } \triangle BDD'\text{: } d^2 = d_1^2 + c^2\end{array}\right\} \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- *Cálculo de* V

Como se trata do primeiro volume a ser calculado, vamos apresentar inicialmente o *cubo unitário*, que tem aresta unitária (aresta de medida 1) e volume unitário (seu volume é 1).



Seja, agora, por exemplo, um paralelepípedo retângulo de dimensões 5 cm, 2 cm e 3 cm, representado abaixo:



Decompondo cada dimensão em unidades de comprimento (cm), teremos cinco unidades (5 cm), duas unidades (2 cm) e três unidades (3 cm), respectivamente. Isso sugere que o paralelepípedo pode ser dividido em $5 \cdot 2 \cdot 3$ cubos unitários (cm^3) e o volume desse paralelepípedo é $5\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 30\text{ cm}^3$.

De modo geral, o volume V de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c é dado pela fórmula:

$$V = a \cdot b \cdot c \ ,$$

e notando que $a \cdot b$ é a área da base (A_b) e c é a altura (h) do paralelepípedo, podemos escrever:

$$V = A_b \cdot h$$

Exemplo 1

Vamos determinar a área total S e o volume V de um ortoedro cuja diagonal mede $10\sqrt{2}$ cm, sabendo que suas dimensões são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5.

Sendo a, b e c as dimensões do paralelepípedo, temos:

$$k = \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow a = 3k,\ b = 4k \text{ e } c = 5k$$

Com a diagonal $d = 10\sqrt{2}$, podemos escrever:

$$(10\sqrt{2})^2 = 200 = d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 9k^2 + 16k^2 + 25k^2 = 200 \Rightarrow k = 2$$

Assim, $a = 6$, $b = 8$ e $c = 10$.

A área S é dada por:

$$S = 2 \cdot (6 \cdot 8 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 10) \Rightarrow S = 376 \text{ cm}^2$$

Para o volume V, temos:

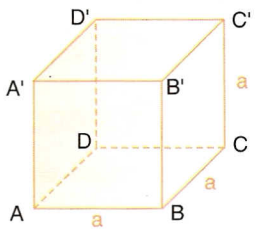
$$V = 6 \cdot 8 \cdot 10 \Rightarrow V = 480 \text{ cm}^3$$

Cubo

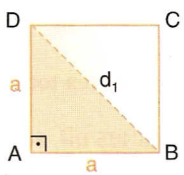
O *cubo* é um paralelepípedo retângulo cujas seis faces são quadrados.

Um cubo possui as doze arestas congruentes entre si.

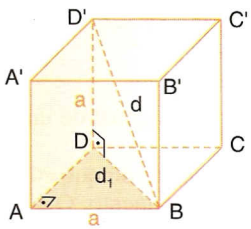
Vejamos como obter a área total S, a diagonal d e o volume V de um cubo de aresta a.



cubo



face



diagonal

- *Cálculo de* S

A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes. Se o cubo tem aresta a, cada face tem área a^2.

Portanto:

$$S = 6a^2$$

- *Cálculo de* d

Inicialmente calculemos a medida d_1 de uma diagonal de face.

No $\triangle BAD$: $d_1^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d_1 = a\sqrt{2}$

No $\triangle BDD'$: $d^2 = a^2 + d_1^2$, e como $d_1^2 = 2a^2$, temos:

$$d^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow \quad d = a\sqrt{3}$$

- *Cálculo de* V

O volume do cubo é:

$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow \quad V = a^3$$

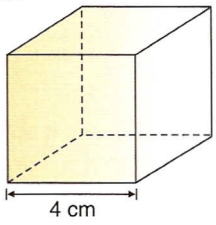
Exercícios

1 Classifique os prismas abaixo, sabendo que eles possuem, respectivamente:

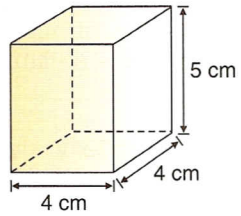
a) 8 faces;
b) 9 arestas;
c) 12 vértices;
d) soma dos ângulos das faces igual a 18 retos.

2 Calcule a diagonal, a área total e o volume de cada um dos paralelepípedos, de acordo com as medidas indicadas.

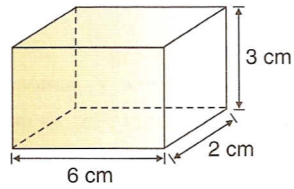
a) cubo



b) paralelepípedo retângulo

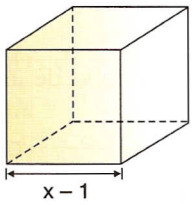


c) paralelepípedo retângulo

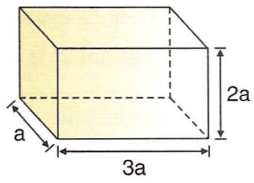


3 Represente, por meio de expressões algébricas, a diagonal, a área total e o volume de cada um dos paralelepípedos, cujas medidas estão indicadas.

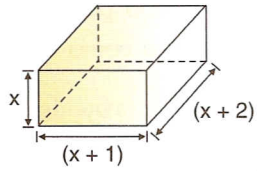
a) cubo



b) paralelepípedo retângulo



c) paralelepípedo retângulo



4 Determine a diagonal de um cubo de 30 m^2 de área total.

5 O volume de um tanque cúbico sem tampa é 125 m^3. Seu interior deve ser revestido com massa plástica para evitar vazamento. Qual é a área da superfície a ser revestida?

6 Duplicando-se cada uma das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo, o que acontece com:

a) sua área total?
b) seu volume?

7 Determine a razão entre os volumes dos sólidos *A* e *B*, nessa ordem, sendo:

- *A:* cubo de área total 486 cm^2;
- *B:* paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 6 cm, 8 cm e 15 cm.

8 A diferença entre a medida da diagonal de um cubo e a medida da diagonal de uma face do mesmo cubo é 6 cm.
Determine a área total do cubo.

9 (UF-MS) Considere *verdadeiro* ou *falso*:

As dimensões de uma piscina olímpica são: 50 metros de comprimento, 25 metros de largura e 3 metros de profundidade. Então, podemos afirmar que:

a) se essa piscina tivesse área da base 20% menor e altura 30% maior, então seu volume seria 4% maior.
b) se essa piscina tivesse área da base 50% menor e altura 50% menor, então seu volume seria 50% menor.
c) a capacidade da piscina é 3 750 000 litros.
d) para elevar o nível da água em 10 cm são necessários 125 000 litros.
e) a área total da parte interna da piscina é de 1 600 m^2.

10 As dimensões de um paralelepípedo retângulo são 5 cm, 8 cm e 10 cm.

a) Qual é sua área total?

b) Qual é a área total de um cubo cujo volume é igual ao do paralelepípedo?

11 A diferença entre os volumes de dois cubos é 16 cm^3.
Determine a aresta do menor sabendo que a diagonal do maior mede $6\sqrt{3}$ m.

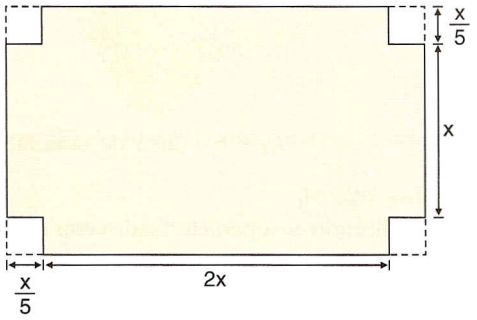
12 Um prisma regular possui as 18 arestas com medidas iguais. Sabendo que o triplo da medida da altura do prisma é numericamente igual à área da base, determine a medida da aresta.

13 Determine a diagonal de um paralelepípedo, sendo 34 m^2 sua área total e 32 m a soma das medidas de todas as suas arestas.

14 (Unicamp-SP) A figura ao lado é a planificação de uma caixa sem tampa.

a) Encontre o valor de x, em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.

b) Se o material utilizado custa R$ 10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros, considerando-se apenas o custo da folha retangular plana?



15 (FEI-SP) O conteúdo de um reservatório de água, inicialmente cheio, será transferido para outro reservatório inicialmente vazio. Os dois reservatórios têm formato de cubo, o primeiro com medida da aresta de 2 m e o segundo com aresta de 4 m. O fluxo da bomba utilizada para transferir a água é de 80 litros por minuto. Depois de quantos minutos do início da operação as alturas das colunas de água nos dois reservatórios serão iguais?

5 Áreas e volume

Área da base: A_b

A *área da base* de um prisma é a área do polígono que constitui a base do prisma.

Área lateral: A_ℓ

A superfície lateral de um prisma é a reunião de suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada *área lateral* do prisma.

$$A_\ell = \text{soma das áreas das faces laterais}$$

Área total: A_t

A superfície total de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada *área total* do prisma e é indicada por A_t.

$$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

Volume: V

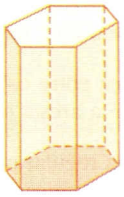
O *volume* de um prisma, assim como o de um paralelepípedo retângulo, é igual ao produto da área da base pela medida da altura:

$$V = (\text{área da base}) \cdot (\text{medida da altura})$$

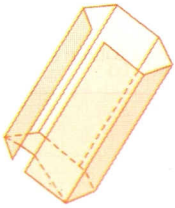
$$V = A_b \cdot h$$

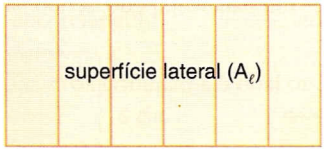
Observação

Considerando um prisma regular hexagonal, temos:



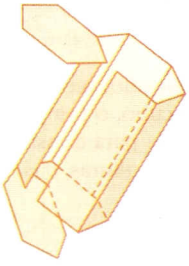
- *Área da base*: A_b
  É a área de um hexágono regular.
- *Área lateral*: A_ℓ
  Para visualizar a superfície lateral, vamos planificá-la.

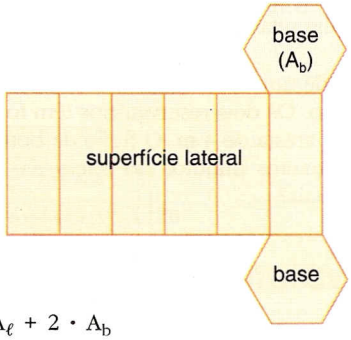




A_ℓ = 6 · (área de uma face lateral) = 6 · (área de um retângulo)

- *Área total*: A_t
  Planificando a superfície total, vem:



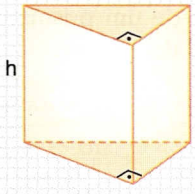


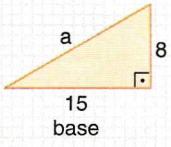
$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$

A_t = 6 · (área de um retângulo) + 2 · (área de um hexágono regular)

Exemplo 2

Consideremos um prisma reto de 20 cm de altura cuja base é um triângulo retângulo de catetos de 8 cm e 15 cm. Vamos calcular a área lateral, a área total e o volume do prisma.





Inicialmente, por Pitágoras, tiramos a medida da hipotenusa:

$$a = 17 \text{ cm}$$

- *Área lateral* (soma das áreas de três retângulos):

$$A_\ell = 8 \cdot 20 + 15 \cdot 20 + 17 \cdot 20 \Rightarrow A_\ell = 800 \text{ cm}^2$$

- *Área total* (soma da área lateral com o dobro da área da base):

$$A_t = 800 + 2 \cdot \frac{15 \cdot 8}{2} \Rightarrow A_t = 920 \text{ cm}^2$$

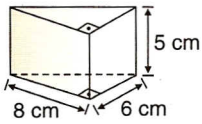
- *Volume*:

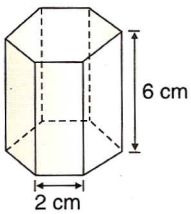
$$V = \underbrace{\frac{15 \cdot 8}{2}}_{\text{área da base}} \cdot \underbrace{20}_{\text{altura}} \Rightarrow V = 1\,200 \text{ cm}^3$$

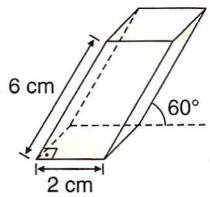
Exercícios

16 Calcule a área lateral, a área total e o volume de cada um dos prismas, cujas medidas estão indicadas nas figuras abaixo.

a) prisma reto (triangular) b) prisma regular (hexagonal) c) prisma oblíquo (base quadrada)







17 Calcule a área total e o volume de um prisma hexagonal regular de 10 cm de aresta lateral e 5 cm de aresta da base.

18 Um prisma reto tem base quadrada de diagonal 2 cm. Calcule o volume do prisma sabendo que sua diagonal mede $4\sqrt{3}$ cm.

19 Um prisma regular tem por base um triângulo eqüilátero de área $5\sqrt{3}$ m². Se a altura do prisma mede 3 m, determine sua área lateral e seu volume.

20 As dimensões de um bloco retangular de diagonal $\sqrt{371}$ cm são expressas por números ímpares consecutivos.

a) Qual é o volume desse bloco?

b) Qual é o volume de um segundo bloco cujas dimensões são 20% menores que as dimensões do primeiro bloco?

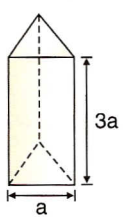
21 Um losango de diagonais medindo 30 cm e 40 cm serve como base de um prisma reto de altura 60 cm; qual é o volume, em litros, do prisma? E sua área lateral?

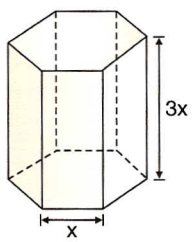
22 Considere um quadrado Q_1 inscrito em um círculo e um quadrado Q_2 circunscrito a esse círculo. Supondo-se que Q_1 sirva de base para um prisma reto de altura h, qual deve ser a altura do prisma reto que tem por base Q_2 para que os dois sólidos tenham o mesmo volume?

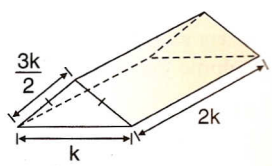
23 A altura de um prisma hexagonal regular mede 4 cm. A área total do prisma vale o triplo da área lateral. Determine o volume do prisma.

24 Represente, por meio de expressões algébricas, a área lateral, a área total e o volume de cada um dos prismas, cujos tipos e medidas estão indicados.

a) prisma regular (triangular) b) prisma regular (hexagonal) c) prisma reto (triangular)





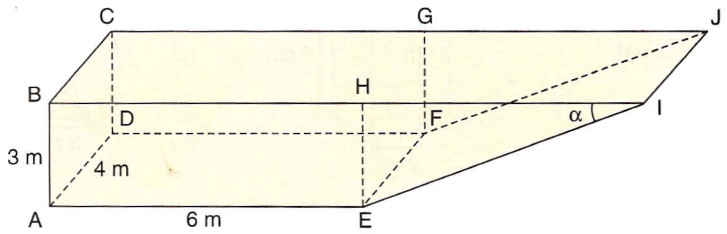


25 Mostre que os conteúdos de dois cubos, um com área total $\frac{50}{3}a^2$ e o outro com diagonal $\frac{3\sqrt{3}}{5}a$, não são suficientes para preencher completamente a capacidade de um terceiro cubo de aresta $\frac{7a}{2}$.

26 (UF-RJ) Uma barra de doce de leite (paralelepípedo retângulo), com 5 cm × 6 cm × 7 cm, foi completamente envolvida com papel laminado. Se a barra for cortada em cubos de 1 cm de aresta, quantos cubos ficarão sem nenhuma cobertura de papel laminado?

27 Um prisma regular hexagonal tem 5 cm de altura e $2\sqrt{3}$ cm de apótema da base.
Determine a área lateral, a área total e o volume do prisma.

28 (Vunesp-SP) Um tanque para criação de peixes tem a forma da figura abaixo:

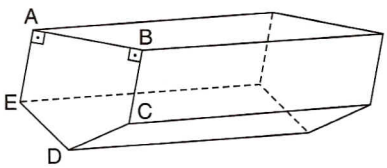


em que ABCDEFGH representa um paralelepípedo retângulo e EFGHIJ, um prisma cuja base EHI é um triângulo retângulo $\left(\text{com ângulo reto no vértice } H \text{ e ângulo } \alpha \text{ no vértice } I \text{ tal que sen } \alpha = \frac{3}{5}\right)$. A superfície interna do tanque será pintada com material impermeabilizante líquido. Cada metro quadrado pintado necessita de 2 litros de impermeabilizante, cujo preço é R$ 2,00 por litro. Sabendo que AB = 3 m, AE = 6 m e AD = 4 m, determine:

a) as medidas de $\overline{EI}$ e $\overline{HI}$;

b) a área da superfície a ser pintada e quanto será gasto, em reais.

29 (UF-GO) A figura ao lado representa um prisma reto, de altura 10 cm, e cuja base é o pentágono ABCDE. Sabendo que AB = 3 cm e BC = CD = DE = EA = 2 cm, calcule o volume do prisma.



30 Um recipiente cúbico de 8 cm de aresta está completamente cheio de água. Parte dela será transferida para outro recipiente — este em forma de prisma regular hexagonal com altura $\frac{16}{3}$ cm e aresta da base medindo 4 cm —, de modo que se encha completamente.
Determine a altura da parte não ocupada pela água no recipiente cúbico, após a transferência.

Testes de vestibulares

1 (U. F. São Carlos-SP) Se a soma das medidas de todas as arestas de um cubo é 60 cm, então o volume desse cubo, em centímetros cúbicos, é:

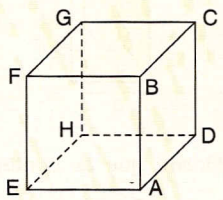
a) 125 c) 75 e) 25
b) 100 d) 60

2 (PUC-MG) Um tanque é um prisma retangular reto de dimensões 25 cm, 80 cm e 90 cm. Sua capacidade, em litros, é:

a) 18 c) 1 800 e) 180 000
b) 180 d) 18 000

3 (FEI-SP) O sólido ABCDEFGH é um cubo cujas arestas medem 4 cm. Qual a área do retângulo ABGH?

a) 32 cm²
b) $16\sqrt{2}$ cm²
c) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm²
d) $\frac{13\sqrt{2}}{3}$ cm²
e) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ cm²



4 (UNIP-SP) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em cm^3, é:

a) $27\sqrt{3}$ d) $54\sqrt{3}$
b) $13\sqrt{2}$ e) $17\sqrt{5}$
c) 12

5 (UE-CE) O volume de um prisma hexagonal regular é $216\sqrt{3}$ cm^3. Se a área lateral desse prisma é $144\sqrt{3}$ cm^2, então a altura desse prisma, em cm, mede:

a) 12 b) 14 c) 16 d) 18

6 (Cefet-MG) Aumentando 1 cm na aresta de um cubo, sua área lateral aumentará 28 cm^2. A aresta do cubo primitivo, em cm, é:

a) 0 c) 2 e) 4
b) 1 d) 3

7 (UF-CE) Em um reservatório na forma de paralelepípedo retângulo foram colocados 18 000 litros de água, correspondendo a $\frac{4}{5}$ de sua capacidade total. Se este reservatório possui 3 m de largura e 5 m de comprimento, então a medida de sua altura é:

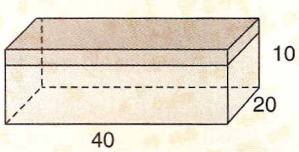
a) 1 m c) 1,5 m e) 3 m
b) 2 m d) 2,5 m

8 (Unopar-PR) Uma aresta de um cubo *A* tem 2 cm a menos que uma aresta de um cubo *B*. A área da superfície total do cubo *A*, ou seja, a soma das áreas de todas as suas faces, é 294 cm^2. A equação que permite determinar a medida *x* da aresta de *B* é:

a) $6x^2 - 12 = 294$ d) $6 \cdot (x + 2)^2 = 294$
b) $4(x + 2)^2 = 294$ e) $4 \cdot (x - 2)^2 = 294$
c) $6 \cdot (x - 2)^2 = 294$

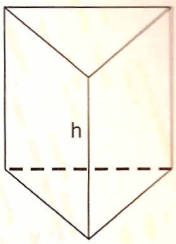
9 (U. F. Santa Maria-RS) Uma caixa de sapatos (com tampa) é confeccionada com papelão e tem as medidas, em centímetros, conforme a figura.
Sabendo-se que à área total da caixa são acrescentados 2% para fazer as dobras de fixação, o total de papelão empregado na confecção da caixa, em cm^2, é:

a) 2 406
b) 2 744
c) 2 856
d) 2 800
e) 8 000

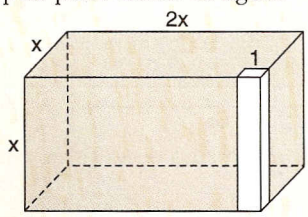


10 (UF-RN) Um triângulo isósceles cujos lados medem 10 cm, 10 cm e 12 cm é a base do prisma reto, de volume igual a 528 cm^3, conforme figura ao lado.
Pode-se afirmar que a altura *h* do prisma é igual a:

a) 13 cm
b) 8 cm
c) 12 cm
d) 11 cm



11 (Unesp-SP) Considere o sólido resultante de um paralelepípedo retângulo de arestas medindo *x*, *x* e 2x, do qual um prisma de base quadrada de lado 1 e altura *x* foi retirado. O sólido está representado pela parte escura da figura.



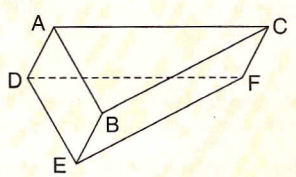
O volume desse sólido, em função de *x*, é dado pela expressão:

a) $2x^3 - x^2$ d) $2x^3 - 2x^2$
b) $4x^3 - x^2$ e) $2x^3 - 2x$
c) $2x^3 - x$

12 (U. F. Viçosa-MG) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um paralelepípedo retangular, e mede 1,20 m de comprimento, 0,50 m de largura e 2,00 m de altura. Uma pedra de forma irregular é colocada no recipiente, ficando totalmente coberta pela água. Observa-se, então, que o nível da água sobe 1 m. Assim é correto concluir que o volume da pedra, em m^3, é:

a) 0,06 c) 0,6 e) 600
b) 6 d) 60

13 (PUC-SP) Na figura abaixo tem-se o prisma reto ABCDEF, no qual DE = 6 cm, EF = 8 cm e $\overline{DE} \perp \overline{EF}$.



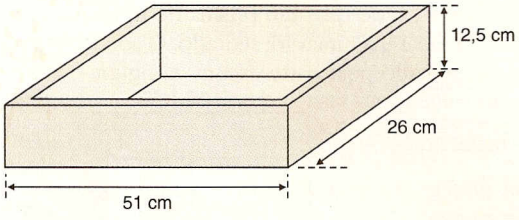
Se o volume desse prisma é 120 cm^3, a sua área total, em centímetros quadrados, é:

a) 144 c) 160 e) 172
b) 156 d) 168

14 (Puccamp-SP) Uma caixa-d'água, com a forma de um paralelepípedo retângulo, tem capacidade para 1000 litros. Qual é a capacidade de outra caixa, semelhante à primeira, cujas medidas das arestas são 20% maiores?

a) 1728 ℓ c) 1836 ℓ e) 1948 ℓ
b) 1800 ℓ d) 1900 ℓ

15 (PUC-SP) Uma caixa sem tampa é feita com placas de madeira de 0,5 cm de espessura. Depois de pronta, observa-se que as medidas da caixa, pela parte externa, são 51 cm × 26 cm × 12,5 cm, conforme mostra a figura abaixo.



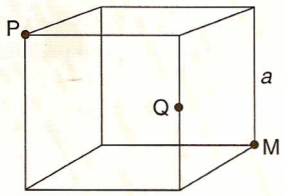
O volume interno dessa caixa, em metros cúbicos, é:

a) 0,015 c) 0,15 e) 1,5
b) 0,0156 d) 0,156

16 (UFF-RJ) Uma piscina tem a forma de um prisma reto, cuja base é um retângulo de dimensões 15 m e 10 m.
A quantidade necessária de litros de água para que o nível de água da piscina suba 10 cm é:

a) 0,15 c) 150 e) 15000
b) 1,5 d) 1500

17 (Unaerp-SP)



No cubo acima, de aresta a, estão representados os pontos P e M (vértices) e o ponto Q (médio de uma das arestas). Expressando-se as medidas dos segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{PM}$ em função de a, a soma PQ + QM pode ser expressa por:

a) $\sqrt{2}a$ c) $2a$ e) $2{,}9a$
b) $\sqrt{3}a$ d) $\sqrt{5}a$

18 (Unesp-SP) A água de um reservatório na forma de um paralelepípedo retângulo de comprimento 30 m e largura 20 m atingia a altura de 10 m. Com a falta de chuvas e o calor, 1800 metros cúbicos da água do reservatório evaporaram. A água restante no reservatório atingiu a altura de:

a) 2 m b) 3 m c) 7 m d) 8 m e) 9 m

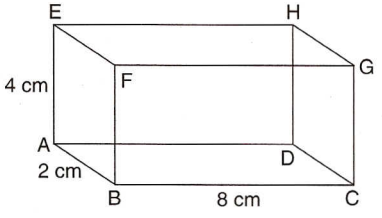
19 (Fuvest-SP) Em um bloco retangular (isto é, paralelepípedo reto retângulo) de volume $\frac{27}{8}$, as medidas das arestas concorrentes em um mesmo vértice estão em progressão geométrica. Se a medida da aresta maior é 2, a medida da aresta menor é:

a) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{9}{8}$ e) $\frac{11}{8}$
b) $\frac{8}{8}$ d) $\frac{10}{8}$

Desafios

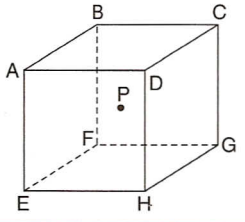
1 Seja o bloco retangular da figura ao lado.
Considerando o triângulo de vértices B, D e H e o ângulo $\alpha = H\hat{B}D$:

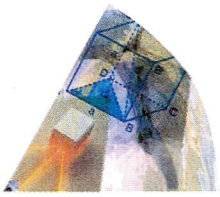
a) calcule sen α;
b) determine a área do triângulo BDH.



2 (UFF-RJ) O cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H e o ponto P, que é o centro deste cubo, estão representados na figura ao lado.

Considere o triângulo APC e calcule o seno do ângulo $A\hat{P}C$.





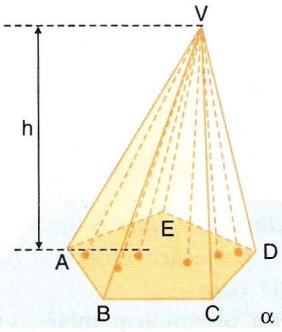
PIRÂMIDE

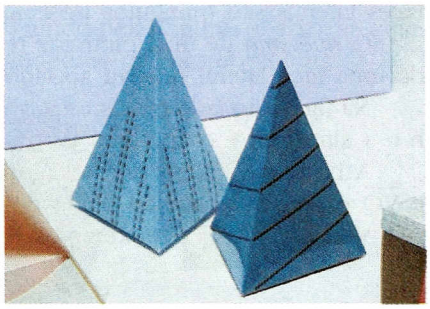
30

1 ○ Conceito

Consideremos um polígono (ou região poligonal) ABCDE de cinco lados num plano α e um ponto V fora de α. Tomemos segmentos de reta, todos com uma extremidade em V e a outra extremidade nos pontos de ABCDE. A reunião desses segmentos é um sólido chamado *pirâmide pentagonal*.

Tanto para conceituar pirâmide como para dar nome aos seus elementos, tomamos uma *pirâmide pentagonal*. Se, por exemplo, em vez de um pentágono, tivéssemos escolhido como base um triângulo, um quadrilátero, etc., teríamos, respectivamente, uma pirâmide triangular, uma quadrangular e assim por diante.

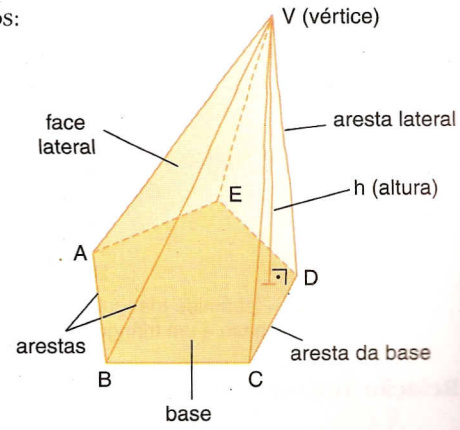




2 ○ Elementos

Considerando a pirâmide representada ao lado, temos:

- V é o *vértice* da pirâmide;
- o polígono ABCDE é a *base* da pirâmide;
- os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ são as *arestas da base*;
- os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$ são as *arestas laterais*;
- os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE e VEA são as *faces laterais*;
- a distância do vértice da pirâmide ao plano da base é a *altura* da pirâmide.



3 ○ Classificação

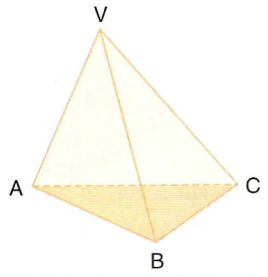
As pirâmides podem ser classificadas de acordo com as bases:

- pirâmide triangular — a base é um triângulo;
- pirâmide quadrangular — a base é um quadrilátero;

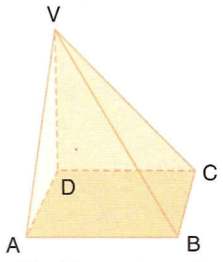
- pirâmide pentagonal — a base é um pentágono;
- pirâmide hexagonal — a base é um hexágono,

e assim por diante.

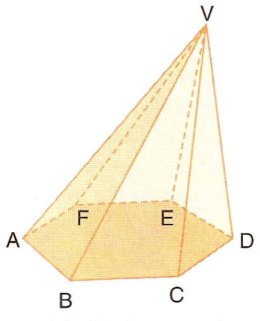
Vejamos alguns exemplos de pirâmides:



pirâmide triangular (tetraedro)



pirâmide quadrangular



pirâmide hexagonal

Pirâmide regular

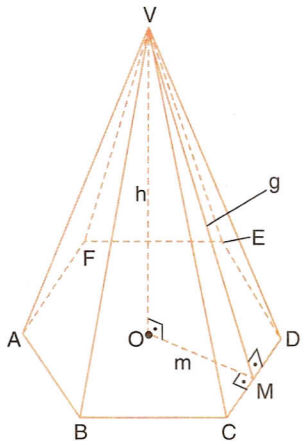
Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

Numa pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

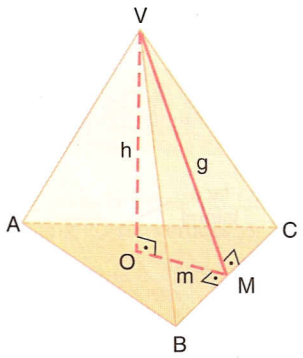
O *apótema* de uma pirâmide regular (indicado por g) é a altura de uma face lateral relativa ao lado da base.

Na figura ao lado temos uma pirâmide regular hexagonal em que h é a altura, m é o apótema da base e g é o apótema da pirâmide.

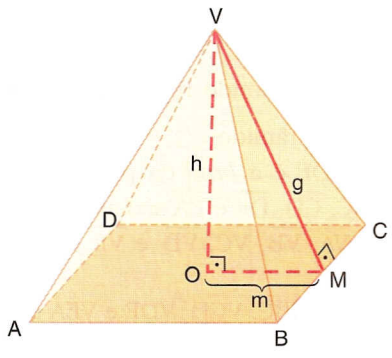
A base ABCDEF é um hexágono regular, O é o centro da base e $\overline{VO}$ é perpendicular ao plano da base.



Vejamos mais dois exemplos de pirâmides regulares:



pirâmide triangular regular
(a base é um triângulo eqüilátero)



pirâmide quadrangular regular
(a base é um quadrado)

Relação notável

Notamos que em uma pirâmide regular qualquer:

$$h^2 + m^2 = g^2 \quad ,$$

em que h é a altura, m é o apótema da base e g é o apótema da pirâmide.

4 ○ Áreas e volume

Área da base: A_b

A *área da base* de uma pirâmide é a área de um polígono.

Área lateral: A_ℓ

A superfície lateral de uma pirâmide é a reunião das suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada *área lateral* da pirâmide e é indicada por A_ℓ.

$$A_\ell = \text{soma das áreas das faces laterais}$$

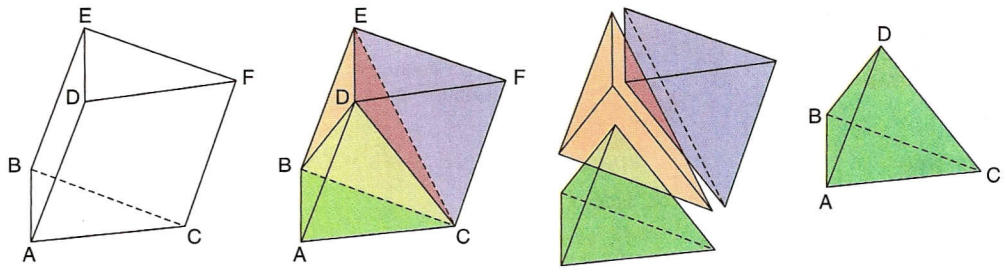
Área total: A_t

A superfície total de uma pirâmide é a reunião da superfície lateral com a base da pirâmide. A área dessa superfície é chamada *área total* da pirâmide e é indicada por A_t.

$$A_t = A_\ell + A_b$$

Volume: V

O *volume* de uma pirâmide triangular (DABC, por exemplo) é $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma triangular (ABCDEF) de mesma base e mesma altura, como é sugerido pelas figuras abaixo, as quais mostram a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros de mesmo volume:



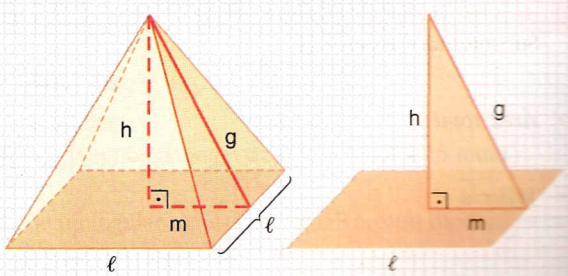
O procedimento é análogo para qualquer tipo de pirâmide (quadrangular, pentagonal, etc.) e, no geral, o volume de uma pirâmide *qualquer* é dado pela fórmula:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\text{área da base}) \cdot (\text{medida da altura})$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Exemplo 1

Vamos calcular a área A_b da base, a área lateral A_ℓ, a área total A_t e o volume V de uma pirâmide regular quadrangular, sabendo que a aresta ℓ da base mede 6 cm e a altura da pirâmide mede 4 cm.



- *Área da base:*

$$A_b = \ell^2 = 6^2 \Rightarrow A_b = 36 \text{ cm}^2$$

- *Área lateral:*

A superfície lateral é composta de quatro triângulos isósceles, congruentes entre si, todos de base ℓ e altura g. Cálculo de g:

$$m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = 3 \text{ cm}$$

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g = 5 \text{ cm}$$

Assim: $A_\ell = 4 \cdot \frac{\ell \cdot g}{2} = 2 \cdot 6 \cdot 5 \Rightarrow A_\ell = 60 \text{ cm}^2$

- *Área total:*

$$A_t = A_b + A_\ell = 36 + 60 \Rightarrow A_t = 96 \text{ cm}^2$$

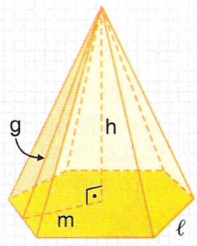
- *Volume:*

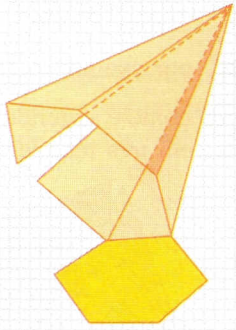
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 \Rightarrow V = 48 \text{ cm}^3$$

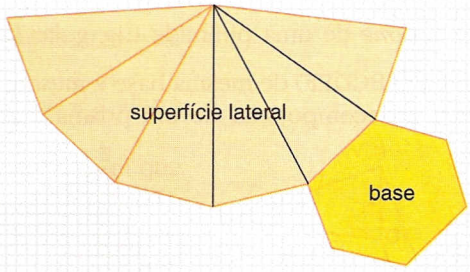
Exemplo 2

Seja uma pirâmide regular hexagonal de altura 30 cm e aresta da base medindo 20 cm. Vamos determinar A_b, A_ℓ, A_t e V.

Inicialmente vamos aproveitar este exemplo para visualizar as superfícies lateral e total da pirâmide.







- *Área da base*

É a área de um hexágono regular de lado $\ell = 20$ cm:

$$A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 20^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 600\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

- *Área lateral*

$$A_\ell = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot g\right) = 3\ell g \ (*)$$

Cálculo de m (o apótema da base é a altura de um triângulo eqüilátero):

$$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow m = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

O apótema g da pirâmide é dado por:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 30^2 + (10\sqrt{3})^2 = 1\,200 \Rightarrow g = 20\sqrt{3} \text{ cm}$$

Substituindo-se em (*):

$$A_\ell = 3 \cdot 20 \cdot 20\sqrt{3} \Rightarrow A_\ell = 1\,200\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

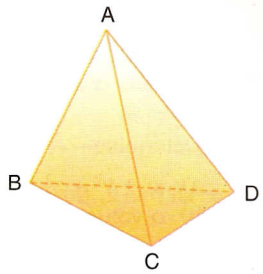
- *Área total*

$$A_t = A_b + A_\ell = 600\sqrt{3} + 1\,200\sqrt{3} \Rightarrow A_t = 1\,800\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

- *Volume*

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3}\ 600\sqrt{3} \cdot 30 \Rightarrow V = 6\,000\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

5 ○ Tetraedro regular



Tetraedro regular é uma pirâmide regular em que as quatro faces são congruentes.

Um tetraedro regular possui todas as seis arestas congruentes.

Notemos que as quatro faces ABC, ABD, ACD e BCD do tetraedro ABCD da figura são triângulos eqüiláteros e qualquer uma delas pode ser considerada a base do tetraedro regular.

Vejamos como obter a área total A_t, a altura h e o volume V de um tetraedro regular de aresta a.

- *Área total*

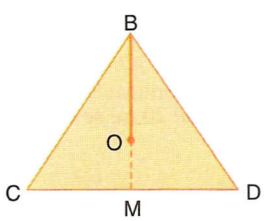
A área total vale o quádruplo da área da face. Cada face é um triângulo eqüilátero de lado a.

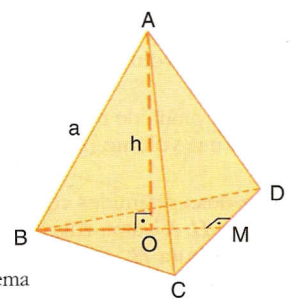
$$A_t = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = a^2\sqrt{3}$$

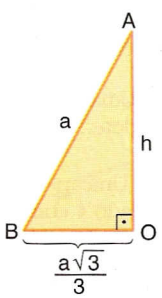
- *Altura*

A projeção do vértice A sobre a base BCD é o centro O dessa face.

Sendo M o ponto médio de $\overline{CD}$, vamos calcular BO na base e a altura h no triângulo AOB, retângulo em O:







$$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$BO = \frac{2}{3}\,BM$$

$$BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$OM = \frac{1}{3}\,BM = \frac{1}{2}\,BO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$ (expressão do apótema do △ eqüilátero)

No △AOB, sendo AB = a, $BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ e AO = h, temos:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \Rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

- *Volume*

A área da base é a área de uma face: $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Exercícios

1 Classifique a pirâmide de cada caso, sabendo que ela possui:

a) 6 faces;

b) 12 arestas;

c) 8 vértices;

d) a soma dos ângulos das faces igual a 16 retos.

2 Determine a área total e o volume de uma pirâmide quadrangular regular que tem 8 arestas medindo 4 cm cada uma.

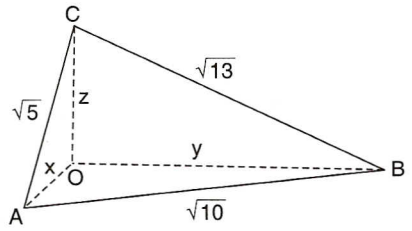
3 Determine a área total e o volume de um tetraedro regular de aresta 6 cm.

4 (U. F. Ouro Preto-MG) Considere o tetraedro OABC, em que as arestas OA, OB e OC são perpendiculares entre si.

Determine:

a) $x^2 + y^2 + z^2$;

b) o volume do tetraedro.



5 (UC-GO, adaptado) Certo fabricante de talco está indeciso entre dois modelos de embalagens aconselhados pelo departamento de *marketing* para seu produto. O primeiro modelo tem o formato de um cubo de aresta 5 cm; o segundo modelo tem a forma de uma pirâmide quadrangular regular, com a área da base igual a 25 cm^2 e a área de uma das faces igual a 38 cm^2. Se for levada em conta a economia que se pode fazer na quantidade de material gasto na confecção da embalagem, o fabricante optará pelo cubo.

a) Essa conclusão é verdadeira ou falsa? Justifique.

b) Determine o percentual de desperdício de material no caso de opção pela embalagem menos econômica.

6 Em uma pirâmide triangular regular, a aresta da base mede 6 m e a altura, $\sqrt{6}$ m. Determine:

a) a área total da pirâmide;

b) a aresta lateral da pirâmide.

7 (U. F. Ouro Preto-MG) Numa pirâmide regular de base quadrada, a área da base vale 36 cm^2 e a área lateral, 60 cm^2. Determine o volume dessa pirâmide.

8 Uma aresta lateral de uma pirâmide regular hexagonal mede 20 m; se outra aresta da pirâmide mede 12 m, determine a área lateral e o volume da pirâmide.

9 (Unicap-PE) Considere duas pirâmides com o mesmo volume. Uma delas tem um triângulo eqüilátero de lado ℓ como base e altura H. A outra, cuja base é um quadrado de lado ℓ, tem $5\sqrt{3}$ m de altura. Determine, em metros, a medida da altura H.

10 Determine a área total e o volume de uma pirâmide regular cuja altura mede 12 cm e cuja base é um quadrado de lado de 6 cm.

11 (UF-PA) Um fazendeiro construiu, para guardar sua colheita, um celeiro cuja forma é a de um sólido, composto de um prisma quadrangular reto, que tem sobre ele uma pirâmide de igual base e com 3 m de altura. Se a diagonal da base mede 10 m e a altura do prisma é $\frac{3}{5}$ dessa diagonal, calcule, em litros, a capacidade total desse celeiro.

12 Há algum tempo as embalagens de leite pasteurizado e de achocolatado tinham a forma de tetraedros regulares.

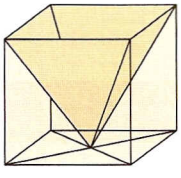
Determine, em cada caso, a aresta do tetraedro para que o conteúdo das embalagens seja igual a:

a) 1 litro de leite;

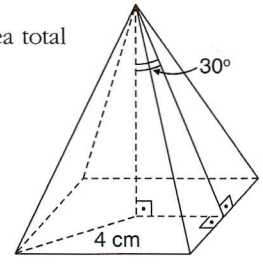
b) 250 mℓ de achocolatado.

13 Um funil foi construído retirando-se material de um cubo maciço de aresta 12 cm, como mostra a figura.

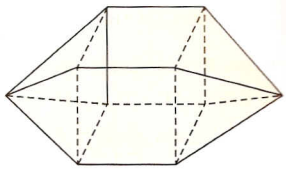
Calcule o volume do material remanescente.



14 A pirâmide ao lado é regular. Determine a área total e o volume dessa pirâmide.

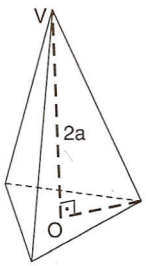


15 (U. F. Ouro Preto-MG) A figura ao lado mostra duas pirâmides regulares cujas bases coincidem com duas faces de um cubo de aresta a. Sabe-se que as alturas das pirâmides são iguais à diagonal do cubo. Determine a área total do sólido formado pelas pirâmides e pelo cubo.

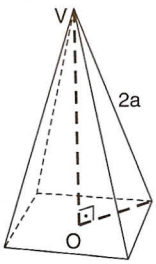


16 As pirâmides das figuras são regulares e têm as arestas das bases medindo a.
Considere os dados assinalados e, para cada pirâmide, determine a área total e o volume. (O: centro da base.)

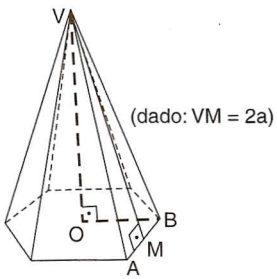
a)



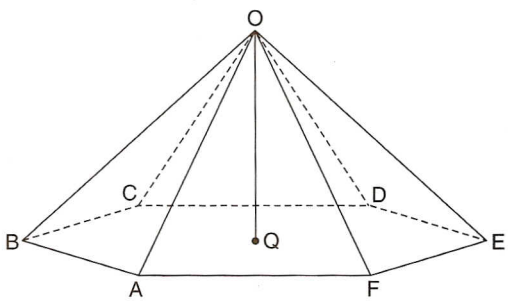
b)



c)



17 (UFF-RJ) A figura mostra a pirâmide regular OABCDEF de base hexagonal cuja altura tem a mesma medida das arestas da base.
Pelo ponto médio M, da altura $\overline{OQ}$, traça-se o segmento $\overline{MN}$ perpendicular à aresta $\overline{OC}$.
Sabendo que $\overline{MN}$ mede 5 cm, determine o volume da pirâmide.

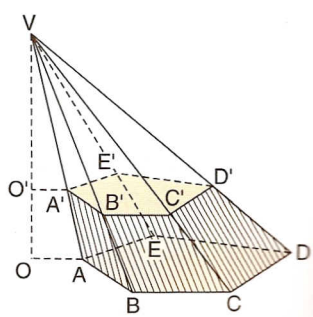


6 Tronco de pirâmide

Conceito

Seção transversal de uma pirâmide é a interseção da pirâmide com um plano paralelo à base.

Tronco de pirâmide de bases paralelas é a reunião da base de uma pirâmide com uma seção transversal e com o conjunto dos pontos da pirâmide compreendidos entre o plano da base e o plano da seção transversal.



Elementos

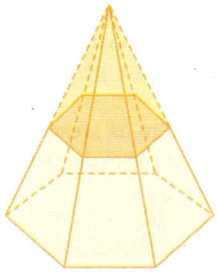
A base da pirâmide é a *base maior* do tronco, e a seção é a *base menor* do tronco.
A distância entre os planos das bases é a *altura* do tronco.

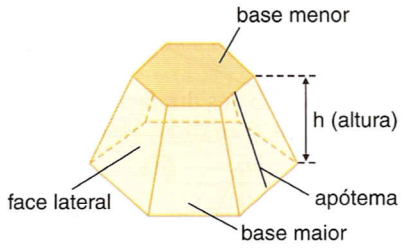
Tronco de pirâmide regular

Tronco de pirâmide regular é o tronco de bases paralelas obtido de uma pirâmide regular.

Num tronco de pirâmide regular:

- as arestas laterais são congruentes entre si;
- as bases são polígonos regulares semelhantes;
- as faces laterais são trapézios isósceles, congruentes entre si;
- a altura de qualquer face lateral chama-se *apótema* do tronco.





Áreas e volume

Áreas das bases: A_B e A_b

A *área da base maior* é a área de um polígono e é indicada por A_B.

A *área da base menor* é a área de um polígono *semelhante* à base maior e é indicada por A_b.

Área lateral: A_ℓ

A superfície lateral de um tronco de pirâmide é a reunião das faces laterais do tronco. A área dessa superfície é chamada *área lateral* e é indicada por A_ℓ.

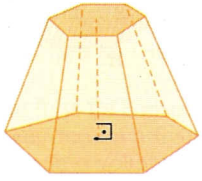
$$A_\ell = \text{soma das áreas das faces laterais}$$

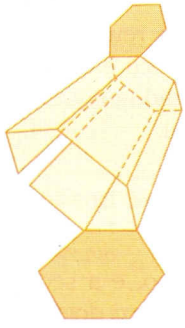
Área total: A_t

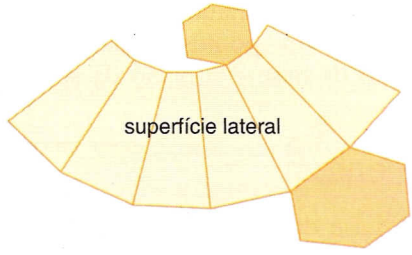
A superfície total de um tronco de pirâmide é a reunião da superfície lateral com a base maior e com a base menor. A área dessa superfície é chamada *área total* e é indicada por A_t.

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

No caso de um tronco de pirâmide hexagonal regular, temos:







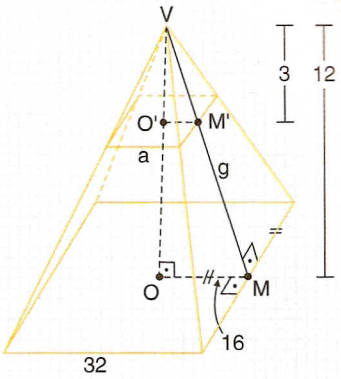
$$A_\ell = 6 \cdot (\text{área de uma face lateral}) = 6 \cdot (\text{área de um trapézio isósceles})$$

$$A_t = \underbrace{6 \cdot \left(\begin{array}{c}\text{área de um}\\ \text{trapézio isósceles}\end{array}\right)}_{A_\ell} + \underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{área de um}\\ \text{hexágono regular}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{área de outro}\\ \text{hexágono regular}\end{array}\right)}_{A_B + A_b}$$

Exemplo 3

Uma pirâmide quadrangular regular, de altura medindo 12 cm e aresta da base medindo 32 cm, é secionada, a 3 cm do vértice, por um plano paralelo à base.

Vamos determinar a área total do tronco obtido.



Cálculo do apótema VM da pirâmide original:

$$VM^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow VM = 20 \text{ cm}$$

$\triangle VO'M' \sim \triangle VOM$:

$$\frac{VO}{VO'} = \frac{VM}{VM'} = \frac{OM}{O'M'} \Rightarrow \frac{12}{3} = \frac{20}{VM'} = \frac{16}{\frac{a}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} VM' = 5 \text{ cm} \\ a = 8 \text{ cm} \end{cases}$$

Temos:

$$g = MM' = VM - VM' = 20 - 5 \Rightarrow g = 15 \text{ cm (apótema do tronco)}$$

A área lateral do tronco é dada por:

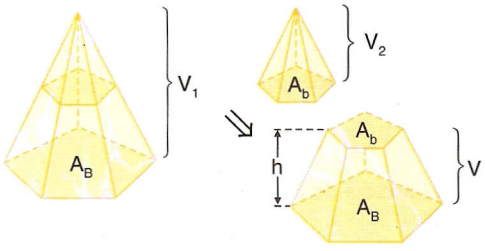
$$A_\ell = 4 \cdot \frac{32 + 8}{2} \cdot 15 = 1\,200 \Rightarrow A_\ell = 1\,200 \text{ cm}^2$$

Daí:

$$A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 32^2 + 8^2 + 1\,200 \Rightarrow A_t = 2\,288 \text{ cm}^2$$

Volume: V

O *volume* de um tronco de pirâmide qualquer de bases paralelas é obtido pela *diferença* entre os volumes de duas pirâmides: a de base A_B e a de base A_b.



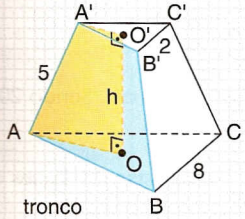
$$V = V_1 - V_2$$

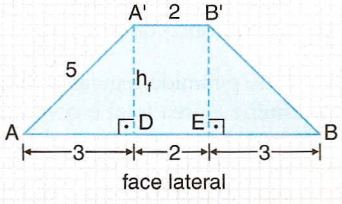
Desenvolvendo a diferença, obtemos, em função da altura do tronco e das áreas das suas bases, o valor do volume:

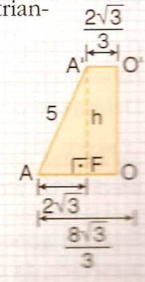
$$V = \frac{h}{3}(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b)$$

Exemplo 4

Vamos calcular a área lateral, a área total e o volume de um tronco de pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede 5 cm e os lados das bases medem 2 cm e 8 cm.







- *Área lateral*

Cálculo da altura da face:

$$\text{No } \triangle ADA': \ h_f^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow h_f = 4 \text{ cm}$$

A área lateral é igual a três vezes a área de uma face lateral, ou seja:

$$A_\ell = 3 \cdot A_{\text{trapézio}} = 3 \cdot \left(\frac{2+8}{2} \cdot 4\right) \Rightarrow A_\ell = 60 \text{ cm}^2$$

- *Área total*

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b \Rightarrow A_t = 60 + \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = (60 + 17\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

- *Volume*

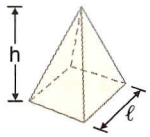
Inicialmente devemos determinar a altura do tronco, usando o triângulo AFA': $h^2 = 5^2 - (2\sqrt{3})^2 = 13 \Rightarrow h = \sqrt{13}$ cm

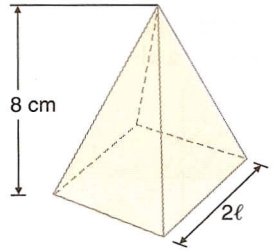
Daí:

$$V = \frac{h}{3}[A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b] = \frac{\sqrt{13}}{3}\left[\frac{64\sqrt{3}}{4} + \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{4}\right] = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot 21\sqrt{3} \Rightarrow V = 7\sqrt{39} \text{ cm}^3$$

Exercícios

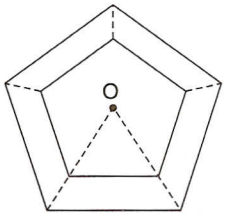
18 São dadas duas pirâmides quadrangulares semelhantes, representadas na figura:





a) Calcule a razão de semelhança entre as arestas de uma e de outra.
b) Determine a altura h.
c) Sendo $\ell = 3$ cm, ache as áreas totais das pirâmides e a razão entre elas.
d) Qual é a razão entre os volumes das pirâmides?

19 Dois pentágonos regulares são bases de um tronco de pirâmide, cuja vista superior é apresentada ao lado.
As arestas das bases medem 2 cm e 3 cm, sendo 1 cm a medida do apótema do tronco. Determine a aresta lateral e a área lateral do tronco.



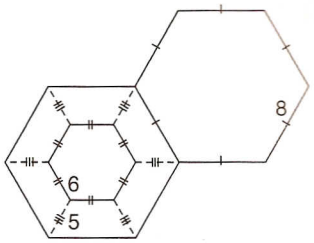
20 O apótema de um tronco de pirâmide regular mede 60 cm; as arestas das bases quadradas do tronco medem 1 m e 2 m. Determine o volume do tronco.

21 (UF-RJ) Uma pirâmide regular tem base quadrada de área 4. Ela é seccionada por um plano paralelo à base de modo a formar um tronco de pirâmide de altura 2 e de base superior de área 1.
Determine o valor da aresta lateral do tronco de pirâmide.

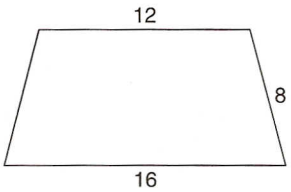
22 As arestas das bases de um tronco de pirâmide regular hexagonal medem 10 cm e 15 cm. Sendo 20 cm a medida da altura do tronco, determine a área total e o volume do tronco.

23 Seja um tronco de pirâmide regular triangular em que a e $3a$ são as medidas das arestas das bases e $2a$ é a medida da aresta lateral. Determine a área total e o volume do tronco.

24 A figura ao lado sugere a construção de um tronco de pirâmide regular hexagonal, cujas medidas estão dadas em centímetros.
Determine o volume do tronco.

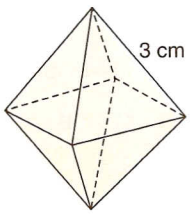


25 Um tronco de pirâmide regular de base quadrangular tem uma face lateral representada na figura ao lado, com as medidas em centímetros.
Determine a área total e o volume do tronco.



26 Uma pirâmide regular triangular tem aresta lateral de 10 dm e apótema da base de 3 dm. Corta-se essa pirâmide por um plano paralelo à base e cuja distância ao vértice é 4 dm.
Calcule o volume do tronco de pirâmide obtido.

27 O octaedro regular é um poliedro que possui oito faces triangulares. As faces são triângulos eqüiláteros (veja a figura ao lado). Calcule a área total e o volume de um octaedro regular de aresta medindo 3 cm.



Testes de vestibulares

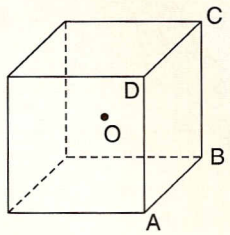
1 (Fatec-SP) As arestas laterais de uma pirâmide regular medem 15 cm, e sua base é um quadrado cujos lados medem 18 cm.
A altura dessa pirâmide, em centímetros, é igual a:

a) $3\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{5}$ e) $\sqrt{7}$
b) $3\sqrt{7}$ d) $2\sqrt{7}$

2 (U. F. Ouro Preto-MG) Se a base de uma pirâmide reta é um quadrado inscrito numa circunferência de raio 8 cm, e a altura dessa pirâmide é 7 cm, então a área total, em cm^2, é:

a) 128 d) $128 + 144\sqrt{2}$
b) $144\sqrt{2}$ e) $256 + 144\sqrt{2}$
c) $128 + 36\sqrt{2}$

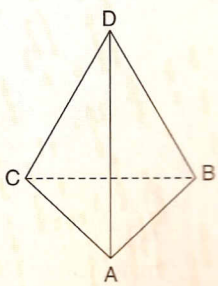
3 (UF-RS) Na figura, O é o centro do cubo.



Se o volume do cubo é 1, o volume da pirâmide de base ABCD e vértice O é:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

4 (UF-BA) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F).
Na pirâmide representada pela figura ao lado, tem-se que:



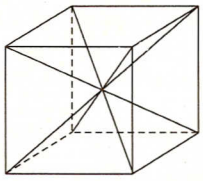
- a base é um triângulo isósceles, retângulo em A e $\overline{AB}$ mede 4 u.c.;
- a face BCD é um triângulo eqüilátero, sendo o seu plano perpendicular ao plano da base da pirâmide.

Nessas condições, pode-se afirmar:

a) O perímetro do triângulo ABC mede $12\sqrt{2}$ u.c.
b) A altura do triângulo BCD mede $2\sqrt{6}$ u.c.
c) O comprimento da circunferência circunscrita à base da pirâmide é igual a $4\sqrt{2}\,\pi$ u.c.
d) O volume da pirâmide é igual a $16\sqrt{6}$ u.v.

5 (UF-PE) Na figura abaixo o cubo de aresta medindo 6 está dividido em pirâmides congruentes de bases quadradas e com vértices no centro do cubo. Qual o volume de cada pirâmide?

a) 36
b) 48
c) 54
d) 64
e) 72



6 (UF-MA) A base de um prisma e de uma pirâmide é um polígono regular de n lados. Cada face desse prisma é um quadrado, cuja diagonal mede $\sqrt{18}$ cm. Qual a altura da pirâmide, sabendo-se que seu volume é igual ao volume do prisma?

a) $\sqrt{18}$ cm
b) 3 cm
c) 18 cm
d) $3\sqrt{18}$ cm
e) 9 cm

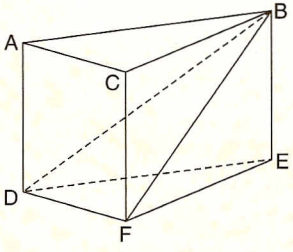
7 (UCDB-MS) A área total de um tetraedro regular cuja altura mede 2 cm é igual a:

a) $6\sqrt{3}$ cm²
b) $4\sqrt{3}$ cm²
c) $8\sqrt{3}$ cm²
d) $10\sqrt{3}$ cm²
e) $2\sqrt{3}$ cm²

8 (UF-CE) Em um tetraedro regular VABC, seja M o ponto médio da aresta $\overline{BC}$; seja α o ângulo cujo vértice é M e cujos lados são os segmentos de reta $\overline{MA}$ e $\overline{MV}$. Então cos α é igual a:

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{5}{6}$
e) $\frac{7}{8}$

9 (UF-MG)



Essa figura representa um prisma reto de base triangular. O plano que contém os vértices B, D e F divide esse prisma em dois sólidos: DACFB, de volume V_1, e DEFB, de volume V_2.

Assim sendo, a razão $\frac{V_1}{V_2}$ é:

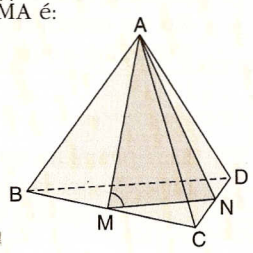
a) 1
b) $\frac{3}{2}$
c) 2
d) $\frac{5}{2}$

10 (ITA-SP) A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12 m³, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):

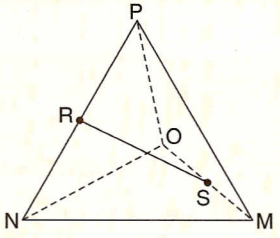
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

11 (UF-RS) O tetraedro regular ABCD está representado na figura abaixo. M é o ponto médio da aresta $\overline{BC}$ e N é o ponto médio da aresta $\overline{CD}$. O cosseno do ângulo $N\hat{M}A$ é:

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



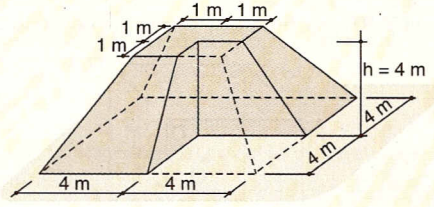
12 (UFF-RJ) No tetraedro regular representado na figura, R e S são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{NP}$ e $\overline{OM}$.



A razão $\frac{RS}{MN}$ é igual a:

a) $\sqrt{3}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $3\sqrt{2}$

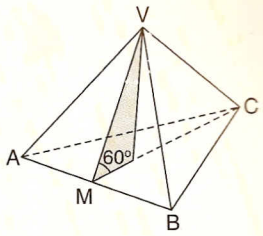
13 (Cefet-PR) No acesso principal da cidade de Troncópolis existe um monumento de concreto maciço, inspirado basicamente num tronco de pirâmide quadrangular regular, conforme a figura a seguir. Para pintá-lo, o prefeito da cidade mandou medir as dimensões e então calcular o total de área externa que receberá tinta. Determine o valor encontrado, em metros quadrados.



a) 151
b) 78
c) 98
d) 83
e) 131

14 (Fuvest-SP) A figura ao lado representa uma pirâmide de base triangular ABC e vértice V. Sabe-se que ABC e ABV são triângulos eqüiláteros de lado ℓ e que M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Se a medida do ângulo $V\hat{M}C$ é 60°, então o volume da pirâmide é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^3$ b) $\frac{\sqrt{3}}{8}\ell^3$ c) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ell^3$ d) $\frac{\sqrt{3}}{16}\ell^3$ e) $\frac{\sqrt{3}}{18}\ell^3$



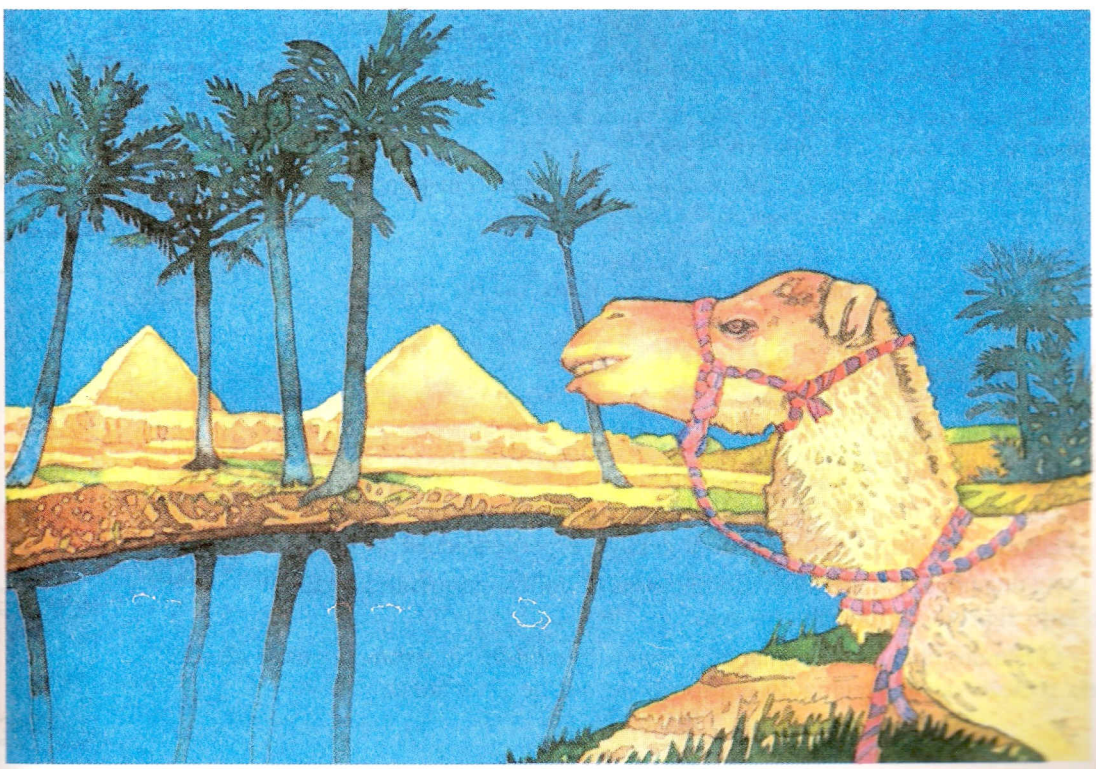
Desafios

1 (Fuvest-SP) A base de uma pirâmide regular é um quadrado ABCD de lado 6 e diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. A distância de seu vértice E ao plano que contém a base é 4.

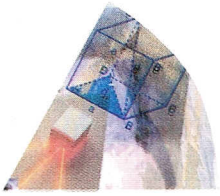
a) Determine o volume do tetraedro ABDE.

b) Determine a distância do ponto B ao plano que contém a face ADE.

2 (Cefet-PR) Uma pirâmide hexagonal regular, com aresta da base e aresta lateral medindo, respectivamente, 9 cm e 15 cm, foi secionada por dois planos paralelos à base, os quais dividiram a altura da pirâmide em três partes iguais. Calcule o volume da parte da pirâmide, compreendida entre esses planos.



Bobbi Tull/Artville/Getty Images

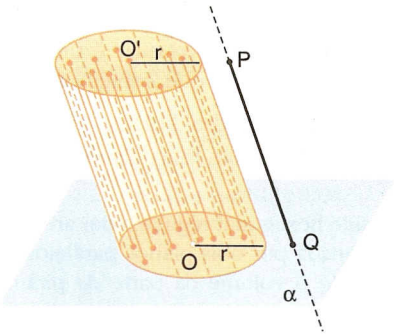


CILINDRO

31

1 ○ Conceito

Consideremos um círculo de centro O e raio r num plano α, e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta α em Q. Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a $\overline{PQ}$, cada um deles com uma das extremidades num ponto do círculo e a outra extremidade num mesmo semi-espaço dos determinados por α. A reunião de *todos* esses segmentos é um sólido chamado *cilindro*.

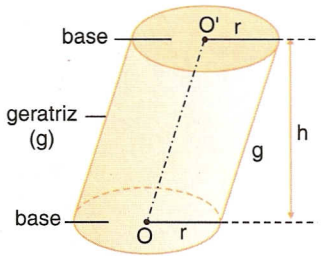


Martin Gorfein/Abril Imagens

2 ○ Elementos

Considerando o cilindro representado ao lado, temos:

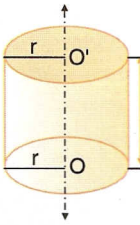
- os círculos de centros O e O' e raio r situados em planos paralelos são as *bases* do cilindro;
- os segmentos paralelos a $\overline{OO'}$ com as extremidades em pontos das circunferências das bases são as *geratrizes* (g);
- a reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é o *eixo* do cilindro;
- a distância entre os planos das bases é a *altura* (h) do cilindro.



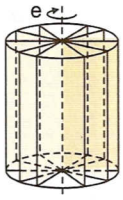
3 ○ Classificação

Um cilindro pode ser classificado conforme a inclinação da geratriz em relação aos planos das bases:

- o cilindro circular é oblíquo quando a geratriz é oblíqua às bases;
- o cilindro circular é reto quando a geratriz é perpendicular às bases.



As duas figuras anteriores são cilindros oblíquos, enquanto a figura ao lado representa um cilindro reto.



O cilindro circular reto é também chamado *cilindro de revolução*; ele é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados.

4 ○ Áreas e volume

Área da base: A_b

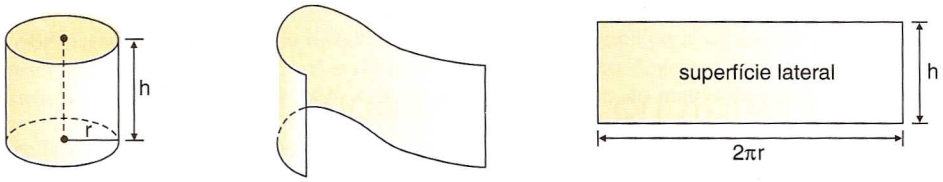
A *área da base* de um cilindro é a área de um círculo de raio r.

$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral: A_ℓ

A superfície lateral de um cilindro é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada *área lateral* do cilindro e é indicada por A_ℓ.

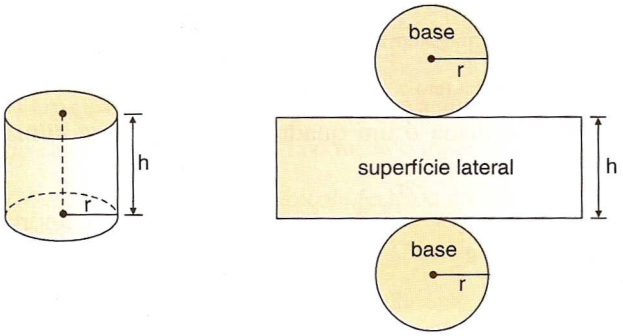
A superfície lateral de um cilindro circular reto, de altura h, e cujos círculos das bases têm raio r, planificada, é um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e h (altura do cilindro).



A_ℓ = área de um retângulo $\Rightarrow$ $A_\ell = 2\pi rh$

Área total: A_t

A superfície total de um cilindro é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases. A área dessa superfície é a *área total* do cilindro e é indicada por A_t.



$$A_t = A_\ell + 2A_b$$

Substituindo-se $A_\ell = 2\pi rh$ e $A_b = \pi r^2$, vem:

$$A_t = 2\pi r\,(h + r)$$

Volume: V

O *volume* de um cilindro é obtido da mesma forma que se obtém o volume do prisma:

$$V = A_b \cdot h$$

Substituindo $A_b = \pi r^2$, temos:

$$V = \pi r^2 h$$

Exemplo

Seja $V = 20\pi\ cm^3$ o volume de um cilindro reto cujo raio mede 40% da medida da altura. Vamos determinar o valor de sua área total.

Sendo r o raio da base do cilindro de altura h, temos:

$$r = 40\%\ h = \frac{2h}{5}$$

Mas $V = \pi r^2 h = 20\pi = \pi \cdot \left(\frac{2h}{5}\right)^2 \cdot h \Rightarrow h^3 = 125 \Rightarrow h = 5\ cm.$

Portanto, $r = \frac{2}{5} \cdot 5 \Rightarrow r = 2\ cm.$

- *Área da base*

  $A_b = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A_b = 4\pi\ cm^2$

- *Área lateral*

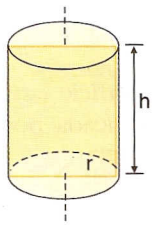
  $A_\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow A_\ell = 20\pi\ cm^2$

$$\Rightarrow A_t = A_\ell + 2A_b = 20\pi + 2 \cdot 4\pi \Rightarrow A_t = 28\pi\ cm^2$$

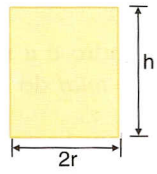
5 Seção meridiana e cilindro eqüilátero

Seção meridiana de um cilindro circular reto é a interseção deste com um plano que contém o eixo.

A seção meridiana de um cilindro reto é um retângulo.

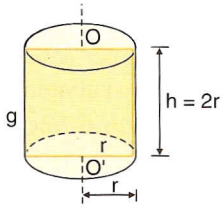


cilindro reto

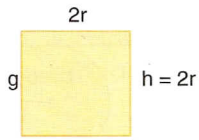


seção meridiana

Um cilindro cuja seção meridiana é um quadrado denomina-se *cilindro eqüilátero*.



cilindro eqüilátero



seção meridiana do cilindro eqüilátero

Em todo cilindro eqüilátero:

$$g = h = 2r$$

Vejamos como obter a área lateral A_ℓ, a área total A_t e o volume V de um cilindro eqüilátero de raio igual a r.

- *Área lateral*

$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = 2\pi rh \\ h = 2r \end{array}\right\} \Rightarrow A_\ell = 2\pi r \cdot 2r \Rightarrow \quad A_\ell = 4\pi r^2$$

- *Área total*

$$\left.\begin{array}{l} A_t = A_\ell + 2A_b \\ A_b = \pi r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_t = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 \Rightarrow \quad A_t = 6\pi r^2$$

- *Volume*

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi r^2 \cdot 2r \Rightarrow \quad V = 2\pi r^3$$

Exercícios

1 A área da base de um cilindro reto vale 16π m^2. Se a altura do cilindro mede 3 m, determine a área total e o volume do cilindro.

2 A planificação da superfície lateral de um cilindro reto tem dimensões 6 cm e 8 cm. Determine a área total do cilindro.

3 A diagonal da seção meridiana de um cilindro eqüilátero mede $\sqrt{72}$ cm. Determine a área total e o volume do cilindro.

4 (Unesp-SP) Considere uma lata cilíndrica de raio r e altura h, completamente cheia de um determinado líquido. Esse líquido deve ser distribuído totalmente em copos também cilíndricos, cuja altura é um quarto da altura da lata e cujo raio é dois terços do raio da lata. Determine:

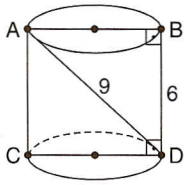
a) os volumes da lata e do copo, em função de r e h;

b) o número de copos necessários, considerando que os copos serão totalmente cheios com o líquido.

5 (FGV-SP) Deseja-se construir um reservatório cilíndrico com tampa para armazenar certo líquido. O volume do reservatório deve ser de 50 m^3 e o raio da base do cilindro deve ser de 2 m. Se o material usado na construção custa R$ 100,00 por metro quadrado, qual é o custo do material a ser utilizado? (Adote $\pi = 3$.)

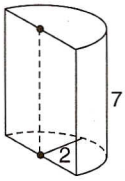
6 Em cada caso, determine a área total e o volume do sólido, cujas medidas estão dadas em centímetros:

a)



$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são diâmetros dos círculos situados em planos paralelos

b)



Semicilindro reto fechado

7 Seja um cilindro oblíquo com bases em planos paralelos distantes 20 cm um do outro. Determine o raio da base, de modo que o cilindro tenha capacidade de armazenar exatamente π litros de um certo líquido.

8 Seja um cilindro oblíquo cuja geratriz mede $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m e forma ângulo de 60° com os planos das bases. Determine o volume do cilindro sabendo que o raio mede o triplo da altura.

9 (U. F. Viçosa-MG) Deseja-se construir um recipiente fechado em forma de um cilindro circular reto com área lateral 144π m^2 e altura de 12 m.

a) Determine o volume do recipiente.

b) Supondo que o metro quadrado do material a ser utilizado custa R$ 10,00, calcule o valor gasto na construção do recipiente. (Considere $\pi = 3{,}14$.)

10 Leia o texto e resolva as questões a seguir.

São Paulo, o maior consumidor de madeira ilegal da Amazônia

O Sul e Sudeste, especialmente São Paulo, são os maiores consumidores da madeira amazônica extraída de forma predatória. Todos os anos são arrancados da floresta 28 milhões de metros cúbicos de madeira em tora. Desse total, só 4 milhões vêm de áreas em que se pratica manejo florestal. Todo restante é oriundo de desmatamentos em propriedades particulares, terras públicas e áreas indígenas.

Ao contrário do que se imagina, não é para o mercado externo que vai a madeira da Amazônia. Só 4 milhões de metros cúbicos de madeira em tora são exportados anualmente e os principais compradores são os europeus, seguidos dos norte-americanos. O total exportado coincide com a produção do manejo florestal. E isso dá alguma pista do papel que têm os consumidores na destruição ou na preservação da floresta.

Os Estados do sul e sudeste consomem anualmente 16 milhões de metros cúbicos das árvores amazônicas. São Paulo, sozinho, transforma um terço desse total — 5,2 milhões — em material de construção descartável e permanente (portas, janelas e esquadrias, mobiliário, toda a sorte de apetrechos, como cabos de faca, e ferramentas). O consumo *per capita* de madeira em São Paulo é três vezes maior que o do Japão — o maior devorador de madeiras tropicais do planeta.

(*O Estado de S. Paulo*, 4/11/2001.)

Admita que uma tora de madeira tenha um formato aproximadamente cilíndrico, comprimento médio de 4 m e circunferência da base com perímetro 155 cm. (Adote $\pi \cong 3{,}1$.)

a) Quantas toras de madeira são arrancadas, por ano, da floresta Amazônica?

b) Quantas toras são exportadas anualmente? Quantas são levadas a São Paulo?

c) Admitindo que a população do Estado de São Paulo seja de 37 milhões e a do Japão, 127 milhões (dados extraídos do *Almanaque Abril 2002*), determine o volume de madeira consumido por ano no Japão.

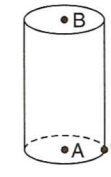
11 (Unirio/Ence-RJ) Seja um cilindro de revolução obtido da rotação de um quadrado, cujo lado está apoiado no eixo de rotação. Determine a medida desse lado (sem unidade), de modo que a área total do cilindro seja igual ao seu volume.

12 (Ucsal-BA) Pode-se fabricar um cilindro reto, de volume V_1, curvando-se uma placa metálica retangular de maneira que coincidam os dois lados maiores:

Pode-se fabricar outro cilindro reto, de volume V_2, com outra placa de mesmas dimensões, curvando-a de maneira que coincidam os lados menores:

Nessas condições, de acordo com as medidas dadas nas figuras, expresse V_2 em função de V_1.

13 (Fuvest-SP) Na figura ao lado, tem-se um cilindro circular reto, em que A e B são os centros das bases e C é um ponto da intersecção da superfície lateral com a base inferior do cilindro. Se D é o ponto do segmento $\overline{BC}$, cujas distâncias a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são ambas iguais a d, obtenha a razão entre o volume do cilindro e sua área total, em função de d.

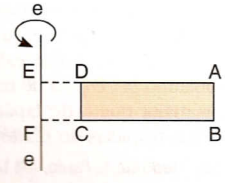


14 A capacidade declarada de uma latinha de cerveja Kaskaria é 350 ml. Sabendo que a altura da lata é de 12 cm e que, pela irregularidade da lata e pela necessidade de espaço interno desocupado, há "perda" de 12,26% da capacidade, determine o diâmetro da lata, adotando $\pi = 3{,}1$.

15 (UFF-RJ) Uma peça de madeira, que tem a forma de um prisma reto com 50 cm de altura e cuja seção reta é um quadrado com 6 cm de lado, custa R$ 1,00. Essa peça será torneada para se obter um pé de cadeira cilíndrico, com 6 cm de diâmetro e 50 cm de altura. O material desperdiçado na produção do pé da cadeira deverá ser vendido para reciclagem por um preço P igual ao seu custo. Determine o preço P, considerando $\pi = 3{,}14$.

16 (Unicamp-SP) Começando com um cilindro de raio 1 e altura também 1, define-se o procedimento de colocar sobre um cilindro anterior outro cilindro de igual altura e raio $\frac{2}{3}$ do raio do anterior. Embora a altura do sólido fictício resultante seja infinita, seu volume pode ser calculado. Faça esse cálculo.

17



O retângulo ABCD, separado do eixo e pelo quadrado CDEF, gira 360° em torno de e; assim é gerado um sólido.
Determine o seu volume.

Dados: AB = 1 cm e $BC = \frac{3}{4}$ AE.

Testes de vestibulares

1 (UE-PA) O surdo é um instrumento de percussão bastante usado nas rodas de samba, nas bandas escolares e principalmente pelas baterias das escolas de samba. Nos padrões normais, tem um formato de cilindro circular reto com diâmetro de 30 cm e altura de 40 cm. O volume ocupado por esse surdo é:

a) $12\,000\pi$ cm^3
b) $9\,000\pi$ cm^3
c) $7\,500\pi$ cm^3
d) $6\,000\pi$ cm^3
e) $4\,500\pi$ cm^3

2 (UMC-SP) Uma seringa tem 2 cm de diâmetro e 11 cm de comprimento. Para enchê-la, puxamos o êmbolo, que pode ser afastado até 7 cm no interior do cilindro. A quantidade máxima de remédio que cabe na seringa, em centímetros cúbicos, é:

a) π b) 4π c) 7π d) 11π e) 28π

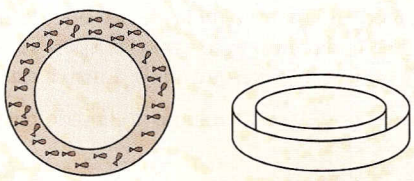
3 (Fatec-SP) Uma pessoa comprou um vasilhame para armazenar água em sua casa e, ao colocar $0{,}256\pi$ m^3 de água, constatou que a parte ocupada correspondia a apenas 40% da capacidade total. Se esse vasilhame tem o formato de um cilindro circular reto e altura de 1 m, então o raio de sua base, em metros, é

a) 0,6
b) 0,7
c) 0,8
d) 0,9
e) 1,0

4 (Faap-SP) Uma lata cilíndrica tem um rótulo retangular, envolvendo-a completamente (mas sem superposição). O rótulo mede 10 cm de altura e 12 cm de largura. Outra lata, de mesma altura, tem rótulo semelhante, medindo 10 cm de altura e largura de 24 cm. A razão entre o volume da lata maior e o da lata menor é:

a) 5 : 2
b) 2 : 1
c) 3 : 2
d) 4 : 3
e) 4 : 1

5 (UF-AL) Na figura abaixo aparecem duas vistas de um tanque para peixes, construído em uma praça pública.



Suas paredes são duas superfícies cilíndricas com altura de 1,2 m e raios da base medindo 3 m e 4 m. Se, no momento, a água no interior do tanque está alcançando $\frac{3}{4}$ de sua altura, quantos litros de água há no tanque? $\left(\text{Use } \pi = \frac{22}{7}.\right)$

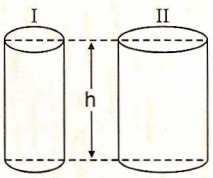
a) 1980
b) 3300
c) 6600
d) 19800
e) 66000

6 (Unopar-PR) Um determinado tipo de suco é vendido em lata de forma cilíndrica, cuja altura mede 10 cm e o diâmetro da base mede 12 cm. Sabendo-se que 1 000 cm^3 é igual a 1 litro, pode-se afirmar que a capacidade da lata é:

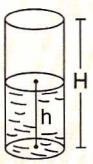
a) menor que 0,5 litro.
b) maior que 0,5 litro e menor que 0,75 litro.
c) maior que 0,75 litro e menor que 1 litro.
d) maior que 1 litro e menor que 1,25 litro.
e) maior que 1,25 litro.

7 (Mackenzie-SP) Aumentando-se 50% o raio de base do cilindro I, obteve-se o cilindro II, cuja área lateral é igual à área total do primeiro. Se o volume do cilindro I é 16π então a altura h dos cilindros I e II é:

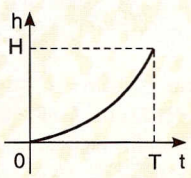
a) 10
b) 8
c) 6
d) 4
e) 2

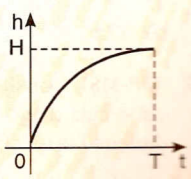


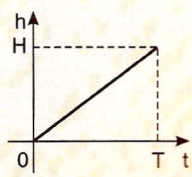
8 (UF-RN) Um reservatório com formato de um cilindro circular reto (veja figura abaixo) está sendo abastecido de água, com vazão constante. A altura do reservatório é H metros, e ele, com essa vazão, enche completamente em T horas.

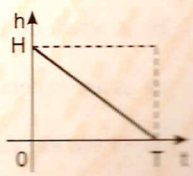


Dentre os gráficos abaixo, aquele que representa a altura (h) do nível da água no reservatório em função do tempo (t) é:

a)


c)


b)


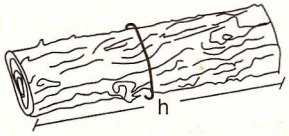
d)


9 (UE-CE) O volume de um cilindro circular reto é $36\sqrt{6}\pi$ cm³. Se a altura desse cilindro mede $6\sqrt{6}$ cm, então a área total desse cilindro, em cm², é:

a) 72π b) 84π c) 92π d) 96π

10 (Enem-MEC) Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

I — Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.



II — O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.

III — O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-se um cilindro perfeito.

A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização.

Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de:

a) 30% c) 15% e) 5%
b) 22% d) 12%

11 (PUC-RS) Num reservatório com a forma de um cilindro circular reto, de raio da base 3 cm e altura 12 cm, solta-se uma esfera maciça. O nível da água, que estava na metade da altura do cilindro, eleva-se até dois terços da altura. O volume de água deslocado, em cm³, foi de:

a) 9π c) 18π e) 48π
b) 12π d) 24π

12 (UF-MS) Considere um cilindro inscrito num cubo cuja diagonal mede 20 cm. Assinale *V* (verdadeiro) ou *F* (falso) nas afirmações seguintes:

a) O raio da base e a altura do cilindro são iguais.

b) A altura do cilindro é $\frac{20}{\sqrt{2}}$ cm.

c) A área lateral do cilindro é $\frac{400\pi}{3}$ cm².

d) O volume do cubo é $\frac{(20)^3}{3\sqrt{3}}$ cm³.

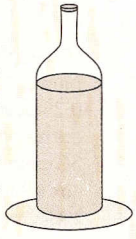
13 (U. F. Juiz de Fora-MG) Aumentando-se 4 cm o raio de um cilindro e mantendo-se a sua altura, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do cilindro original. Sabendo-se que a altura do cilindro original mede 1 cm, então o seu raio mede, em cm:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6

14 (Faap-SP) Uma fábrica de tintas está estudando novas embalagens para seu produto, comercializado em latas cilíndricas cuja circunferência mede 10π cm. As latas serão distribuídas em caixas de papelão ondulado, dispostas verticalmente sobre a base da caixa, numa única camada. Numa caixa de base retangular medindo 25 cm por 45 cm, quantas latas caberiam?

a) 12 c) 11 e) 8
b) 6 d) 9

15 (Enem-MEC) Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa quase completamente seu corpo, conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada.



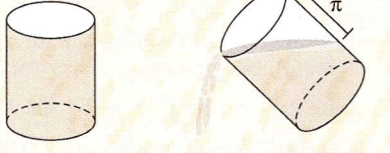
1) Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

a) 1 c) 3 e) 5
b) 2 d) 4

2) Para calcular a capacidade total da garrafa, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

a) 1 c) 3 e) 5
b) 2 d) 4

16 (UA-AM) Um copo de vidro com formato de um cilindro circular reto, cujo diâmetro interno mede 4 cm, está cheio de um líquido até a borda. Inclinando esse copo, despeja-se o líquido nele contido até que atinja a marca que dista da borda $\frac{16}{\pi}$ cm. O volume do líquido despejado é:



a) 36 cm³ c) 64 cm³ e) 80 cm³
b) 16 cm³ d) 32 cm³

Desafios

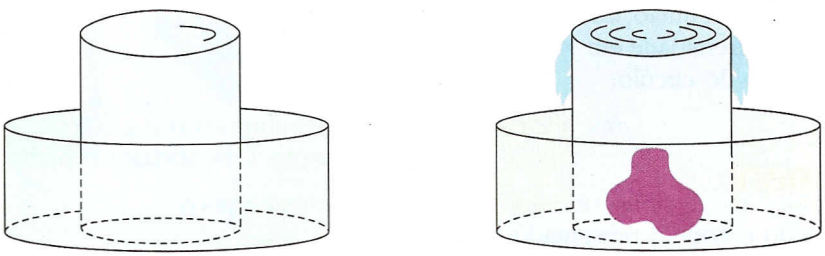
1 (UF-PA) Uma fábrica de azeite usa, para embalar sua produção, latas de 2240 ml com a forma de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões estão em progressão aritmética (P.A.) e somam 42 cm. Decide mudar a embalagem, passando a usar latas cilíndricas com 3 dm de altura e 1 dm de diâmetro. Entre as duas latas, uma de cada tipo, calcule qual a mais vantajosa para essa indústria, levando em consideração o material gasto para a confecção e a capacidade das latas. (Use $\pi = 3{,}14$.)

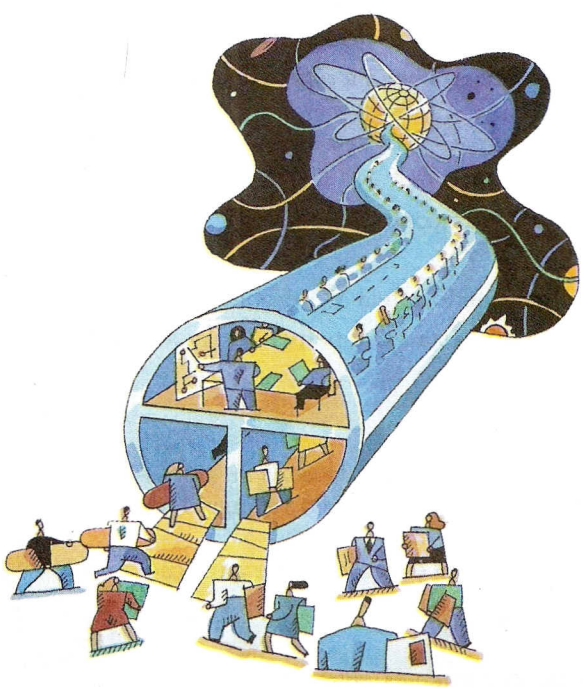
2 Foi servido a uma criança um copo cilíndrico — inadvertidamente cheio até a borda — com água. Percebido o deslize, a mãe da criança procura reparar o erro colocando o copo em outro recipiente, igualmente cilíndrico, completamente vazio.

A criança deixa cair no copo, sem querer, uma peça de brinquedo, a qual provoca transbordamento da água do copo.

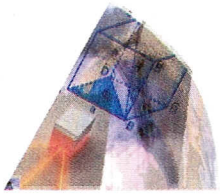
Sabendo que a altura da coluna d'água no recipiente externo é 5 mm, determine o volume da peça de brinquedo.

Dados: raio do copo: 3 cm
raio do recipiente: 6 cm





Robin Jareaux/Artville/Getty Images

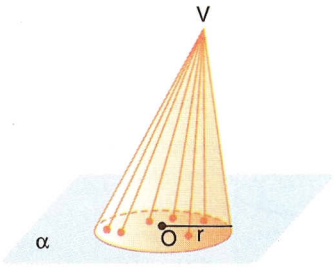


CONE

32

1 ○ Conceito

Consideremos um círculo de centro O e raio r, situado num plano α, e um ponto V fora de α. Chama-se *cone circular*, ou *cone*, a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra em um ponto do círculo.

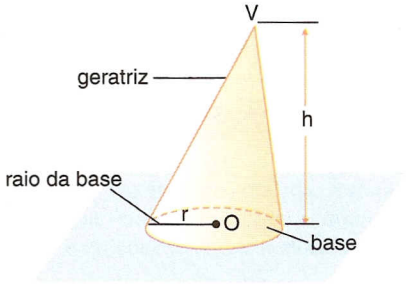


Fernando Lemos/Abril Imagens

2 ○ Elementos

Considerando o cone representado ao lado, temos:

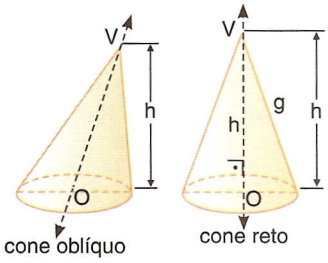
- o ponto V é o *vértice* do cone;
- o círculo de raio r é a *base* do cone;
- os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base são as *geratrizes* do cone;
- a distância do vértice ao plano da base é a *altura* do cone.



3 ○ Classificação

Um cone pode ser classificado conforme a inclinação da reta $\overleftrightarrow{VO}$ em relação ao plano da base:

- o cone circular é oblíquo quando a reta $\overleftrightarrow{VO}$ é oblíqua à base;
- o cone circular é reto quando a reta $\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular à base.



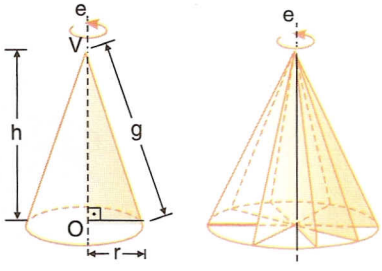
Cone de revolução

O cone circular reto é também chamado *cone de revolução*. Ele é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

No cone de revolução a reta $\overleftrightarrow{VO}$ é o *eixo*, e vale a relação:

$$r^2 + h^2 = g^2$$

Todas as geratrizes são congruentes entre si.



4 ○ Áreas e volume

Área da base: A_b

A *área da base* de um cone é a área de um círculo de raio r.

$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral: A_ℓ

A superfície lateral de um cone é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície é chamada *área lateral* e é indicada por A_ℓ.

A superfície lateral de um cone circular reto, de geratriz g e raio da base r, planificada, é um setor circular cujo raio é g (geratriz do cone) e cujo comprimento do arco é $2\pi r$ (perímetro da base).

O raio do setor é g e o comprimento do arco do setor é $2\pi r$.

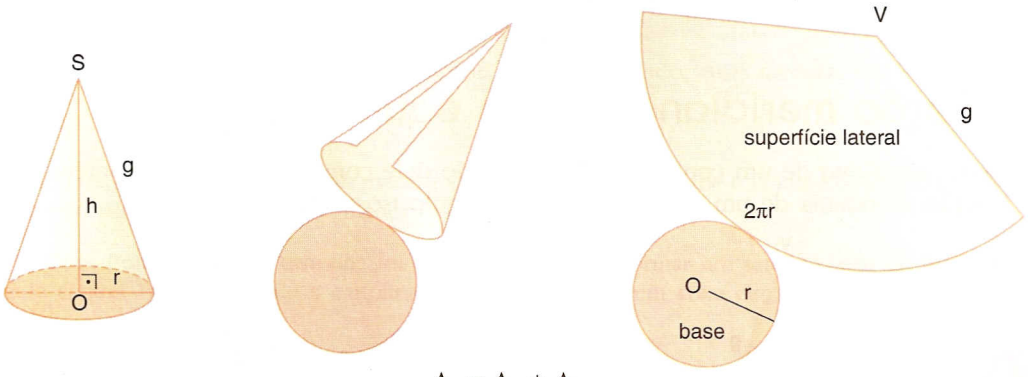
Assim, podemos estabelecer a regra de três:

comprimento do arco		área do setor
$2\pi g$	———	πg^2
$2\pi r$	———	A_ℓ

$$\frac{g}{r} = \frac{\pi g^2}{A_\ell} \Rightarrow \quad A_\ell = \pi r g$$

Área total: A_t

A superfície total de um cone é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. A área dessa superfície é chamada *área total* e é indicada por A_t.



$$A_t = A_\ell + A_b$$

Substituindo-se $A_\ell = \pi r g$ e $A_b = \pi r^2$, vem: $A_t = \pi r(g + r)$

Volume: *V*

O *volume* de um cone é obtido da mesma forma que se obtém o volume da pirâmide:

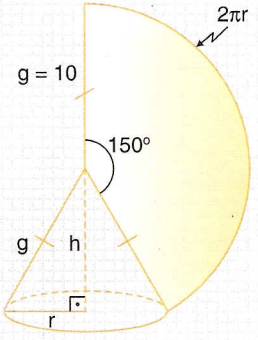
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Substituindo A_b por πr^2, temos: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

Exemplo 1

O raio de um setor circular de 150°, em papel, mede 10 cm; o setor vai ser utilizado na confecção de um cone.

Vamos determinar a área lateral, a área total e o volume desse cone.



- *Área lateral*

A área lateral é a área do setor circular.

360° —— $\pi \cdot 10^2$
150° —— A_ℓ

$$A_\ell = \frac{150^\circ \cdot \pi \cdot 100}{360^\circ} \Rightarrow A_\ell = \frac{125\pi}{3} \text{ cm}^2$$

- *Área total*

Devemos determinar a área da base. Para tanto:

$$\left.\begin{array}{l} A_\ell = \pi rg = \dfrac{125\pi}{3} \\ g = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{125}{3} = 10r \Rightarrow r = \frac{25}{6} \text{ cm}$$

Assim: $A_b = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{25}{6}\right)^2 = \frac{625\pi}{36} \Rightarrow A_b = \frac{625\pi}{36} \text{ cm}^2$

Vem: $A_t = \frac{625}{36}\pi + \frac{125}{3}\pi \Rightarrow A_t = \frac{2125}{36}\pi \text{ cm}^2$

- *Volume*

É necessário determinar a altura do cone:

$$h^2 + r^2 = g^2 \Rightarrow h^2 = 10^2 - \left(\frac{25}{6}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{119} \text{ cm}$$

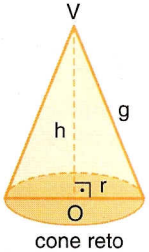
Daí:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{625\pi}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \sqrt{119} \Rightarrow V = \frac{3125\sqrt{119}}{648}\pi \text{ cm}^3$$

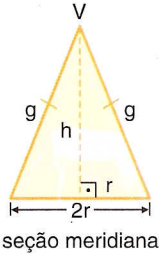
5 ○ Seção meridiana e cone eqüilátero

Seção meridiana de um cone reto é a interseção dele com um plano que contém o eixo.

A seção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles.

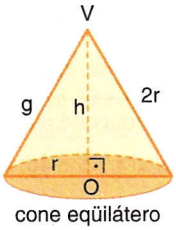


cone reto

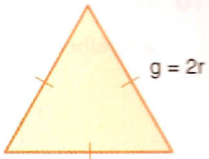


seção meridiana

Cone eqüilátero é um cone cuja seção meridiana é um triângulo eqüilátero.



cone eqüilátero



seção meridiana

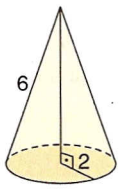
Para obtenção da área lateral, área total e volume de um cone eqüilátero, procedendo às adaptações e substituições, deduzimos:

$$A_\ell = 2\pi r^2 \qquad A_t = 3\pi r^2 \qquad V = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$$

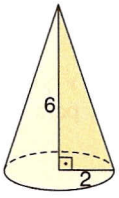
Exercícios

1 Determine, em cada caso, a área total e o volume do cone reto, cujas medidas estão indicadas em centímetros.

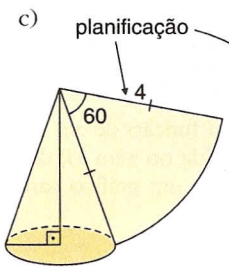
a)



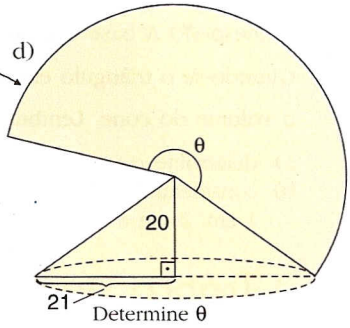
b)



c)



d)

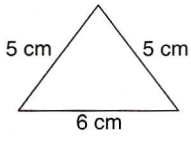


2 (UA-AM) Calcule o volume e a área lateral de um cone eqüilátero cujo raio da base é igual a 6 cm.

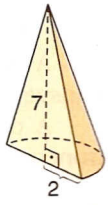
3 Determine o ângulo formado entre uma geratriz e a altura de um cone eqüilátero de raio r.

4 A área da base de um cone eqüilátero vale 4π m^2; com relação ao cone, determine sua área total, seu volume e a área da seção meridiana.

5 (UF-PB) A figura ao lado representa uma seção meridiana de um cone circular reto. Calcule o volume desse cone.



6 Determine a área total e o volume do semicone da figura ao lado, cujas medidas estão dadas em centímetros.



7 (PUC-RS) Os catetos de um triângulo medem $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{5}$ cm. Determine o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo em torno do menor cateto.

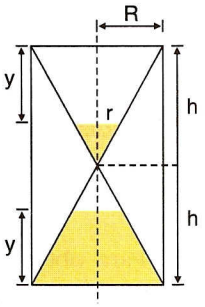
8 (U. F. Ouro Preto-MG) Uma cartolina foi cortada de modo a formar um setor circular de área 3π m^2 e ângulo central 120°. Dobrando a cartolina de modo a formar um cone circular reto, determine:

a) a geratriz do cone;

b) o raio do cone.

9 (EEM-SP) Um cilindro circular reto de altura h e raio r da base está inscrito em um cone circular reto de altura H e raio R da base. Sendo R = 2r, determine a relação entre os seus volumes.

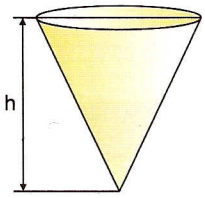
10 (UF-RN) A figura ao lado registra o momento em que $\frac{7}{8}$ do volume de areia da ampulheta encontram-se na parte inferior.



> O volume de um cone circular reto é dado por $V = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$, sendo R o raio e h a altura do cone.

Calcule o valor da fração numérica que representa a proporção entre y e h nesse momento.
(Sugestão: expresse o valor da altura y em função de h.)

11 (UF-RJ) Um recipiente em forma de cone circular reto de altura h é colocado com vértice para baixo e com eixo na vertical, como na figura. O recipiente, quando cheio até a borda, comporta 400 ml.



Determine o volume de líquido quando o nível está em $\frac{h}{2}$.

12 (Vunesp-SP) A base e a altura de um triângulo isósceles medem x e $\frac{12}{\pi}$ centímetros, respectivamente. Girando-se o triângulo em torno da altura, obtém-se um cone cuja base é um círculo de área A. Seja y o volume do cone. Lembrando que $y = \frac{A \cdot h}{3}$, em que h denota a altura do cone:

a) determine o volume y em função de x;
b) considerando a função obtida no item a), determine os valores de y quando atribuímos a x os valores 1 cm, 2 cm e 3 cm. Esboce um gráfico cartesiano desta função, para todo $x \geqslant 0$.

6 ○ Tronco de cone

Conceito

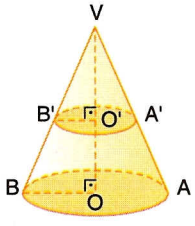
Seção transversal de um cone é a interseção do cone com um plano paralelo à base. A seção transversal de um cone é um círculo.

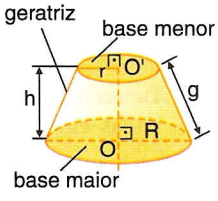
Tronco de cone de bases paralelas é a reunião da base de um cone com uma seção transversal e com o conjunto dos pontos do cone compreendidos entre os planos da base e da seção transversal.

Elementos

A base do cone é a *base maior* do tronco, e a seção transversal é a *base menor*.

A distância entre os planos das bases é a *altura* do tronco.





Áreas e volume

Áreas das bases: A_B e A_b

A *área da base maior* é a área de um círculo de raio R. Logo:

$$A_B = \pi R^2$$

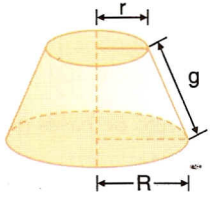
A *área da base menor* é a área de outro círculo, de raio r. Logo:

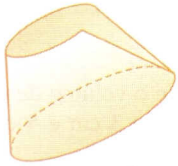
$$A_b = \pi r^2$$

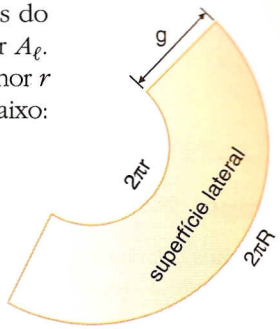
Área lateral: A_ℓ

A superfície lateral de um tronco de cone é a reunião das geratrizes do tronco. A área dessa superfície é chamada *área lateral* e é indicada por A_ℓ.

A superfície lateral de um tronco de cone reto de raio maior R, raio menor r e geratriz g, desenvolvida num plano (planificada), tem a forma indicada abaixo:







A superfície lateral de um tronco de cone reto de raios r e R, e geratriz g, é equivalente a um trapézio de bases $2\pi r$ e $2\pi R$, e altura g.

Calculamos a área dessa figura como se calcula a área de um trapézio, em que:

- a base maior é o comprimento da circunferência de raio R, isto é, $2\pi R$;
- a base menor é o comprimento da circunferência de raio r, isto é, $2\pi r$;
- a altura é g.

$$A_\ell = \text{área de um trapézio}$$

$$A_\ell = \frac{1}{2}\,(\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot (\text{altura})$$

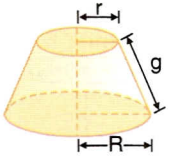
$$A_\ell = \frac{1}{2}\,(2\pi R + 2\pi r)g$$

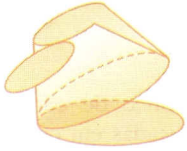
$$A_\ell = \pi(R + r)g$$

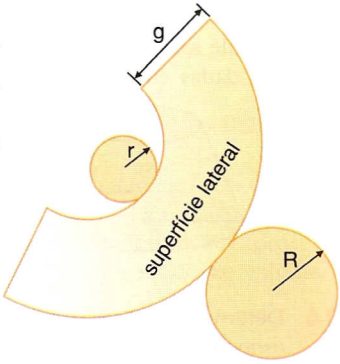
Área total: A_t

A superfície total de um tronco de cone é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases. A área dessa superfície é chamada *área total* e é indicada por A_t.

Desenvolvendo num plano a superfície total de um tronco de cone reto de raio maior R, raio menor r e geratriz g, temos a forma abaixo:







A área total de um tronco de cone é a soma da área lateral com a área da base maior e com a área da base menor:

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b \quad ,$$

sendo $A_\ell = \pi(R + r)g$, $A_B = \pi R^2$ e $A_b = \pi r^2$.

Volume: V

O *volume* de um tronco de cone de bases paralelas é obtido pela diferença dos volumes de dois cones, de modo análogo ao volume do tronco de pirâmide de bases paralelas.

Assim, a fórmula que dá o volume de um tronco de cone é uma adaptação da fórmula que fornece o volume de um tronco de pirâmide:

$$V = \frac{h}{3}\left[A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right]$$

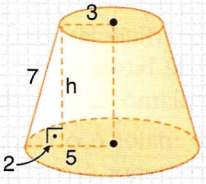
Substituindo $A_B = \pi R^2$ e $A_b = \pi r^2$, temos:

$$V = \frac{h}{3}\left[\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2\right] \Rightarrow V = \frac{h}{3}[\pi R^2 + \pi rR + \pi r^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2]$$

Exemplo 2

Vamos calcular a área lateral, a área total e o volume de um tronco de cone reto de bases paralelas, cuja geratriz mede 7 cm, e os raios das bases medem 3 cm e 5 cm.



- *Área lateral*

  $A_\ell = \pi(R + r)g \Rightarrow A_\ell = \pi(5 + 3) \cdot 7 \Rightarrow A_\ell = 56\pi \text{ cm}^2$

- *Área total*

  $A_t = A_\ell + A_B + A_b \Rightarrow A_t = 56\pi + 5^2\pi + 3^2\pi \Rightarrow A_t = 90\pi \text{ cm}^2$

- *Volume*

  Para determinar a altura do tronco, vamos observar as medidas indicadas na figura:
  $7^2 = 2^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Rightarrow h = 3\sqrt{5}$ cm

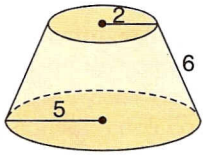
  O volume V é dado por:

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi \cdot 3\sqrt{5}}{3}(5^2 + 5 \cdot 3 + 3^2) \Rightarrow V = 49\sqrt{5}\,\pi \text{ cm}^3$$

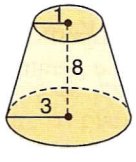
Exercícios

13 Calcule a área lateral e o volume de cada um dos troncos de cone, cujas medidas indicadas nas figuras são dadas em centímetros.

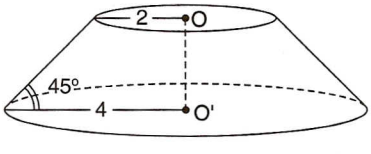
a)



b)



14 Determine a área total e o volume do tronco de cone esquematizado ao lado, com as medidas indicadas em centímetros.



15 Um cone circular reto tem altura h. A que distância de seu vértice deve passar um plano paralelo à base a fim de que o volume do tronco obtido seja 7 vezes o volume do cone obtido pela seção?

16 A geratriz de um tronco de cone é, ao mesmo tempo, 400% maior que um raio do tronco e 25% maior que o outro raio. Sendo a a medida do raio menor, determine a área total e o volume do tronco.

17 (PUC-RJ) Considere um cone de altura 4 cm e um tronco deste cone, de altura 3 cm. Sabendo-se que esse tronco tem volume 21 cm^3, qual o volume do cone?

18 Um plano paralelo à base de um cone intercepta-o a 3 cm do vértice. Se o raio da base do cone mede 4 cm e sua altura, 12 cm, determine:

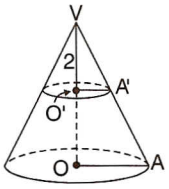
a) a área da seção obtida; b) o volume do cone obtido; c) o volume do tronco de cone obtido.

19 Na figura ao lado, OA = 3 · O'A'. Determine:

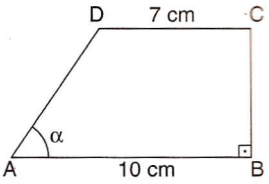
a) a altura do tronco;

b) a razão entre os volumes dos cones de bases de raios $\overline{O'A'}$ e $\overline{OA}$, nessa ordem;

c) O'A' e OA, supondo que a geratriz do tronco meça $4\sqrt{5}$.

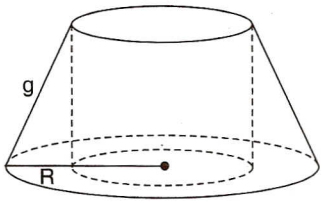


20 (UF-MS) Girando-se o trapézio da figura em torno do lado $\overline{BC}$, obtém-se um tronco de cone cujo volume é V. Sabendo-se que tg $\alpha = 2$, calcular $\frac{V}{6\pi}$ em cm^3.



21 A seção meridiana de um cone eqüilátero tem perímetro 36 cm. Na metade da altura do cone, ele é secionado por um plano paralelo ao da base, gerando um tronco. Calcule a área lateral, a área total e o volume do tronco obtido.

22 A cadelinha Mel, para beber em média 45 ml de água por hora, utiliza uma vasilha cilíndrica de $\frac{30}{\pi}$ cm de altura, a qual, para efeito de sustentação, tem a forma externa de tronco de cone, como mostra a figura. Sabendo que a geratriz g da vasilha mede $\frac{\sqrt{900 + 16\pi^2}}{\pi}$ cm, e que o abastecimento de água é feito uma vez ao dia, determine o raio R da base da vasilha.



23 Formam uma progressão geométrica crescente, de soma 14, nessa ordem, a diferença entre os raios, o raio menor e a geratriz de um tronco de cone reto. Sabendo que a geratriz do tronco mede o dobro do raio menor, determine o volume do tronco e sua área lateral.

Testes de vestibulares

1 (U. F. Ouro Preto-MG) Num cone circular reto de volume $V = 3\pi\ cm^3$ e área da base $A_b = 9\pi\ cm^2$, podemos afirmar que o produto do raio pela altura desse cone, em cm^2, vale:

a) $\frac{2}{3}$ c) 2 e) 3

b) 1 d) $\frac{9}{4}$

2 (ESPM-SP) Em Ribeirão Preto, um copo de chope com formato cônico custa R$ 1,50. Em São Paulo, um copo de chope com formato cilíndrico custa 3,60. Considerando-se que os dois chopes são da mesma marca e que os dois copos têm a mesma altura e bocas com o mesmo diâmetro, pode-se concluir que o preço do chope de São Paulo, em relação ao chope de Ribeirão Preto, está:

a) 60% mais caro. d) 20% mais barato.

b) 40% mais caro. e) 25% mais barato.

c) 14% mais caro.

3 (UTP-PR) Um triângulo retângulo tem 6 cm^2 de área e um de seus catetos mede 2 cm. Pela rotação de 360° desse triângulo, em torno do outro cateto, obtém-se um sólido de volume:

a) $8\pi\ cm^3$ c) $16\pi\ cm^3$ e) n.d.a.

b) $12\pi\ cm^3$ d) $18\pi\ cm^3$

4 (UF-SE) Um copo de papel, em forma de cone circular reto, tem em seu interior 200 mℓ de chá-mate, ocupando $\frac{2}{3}$ de sua altura, conforme mostra a figura abaixo.

A capacidade desse copo, em mililitros, é:

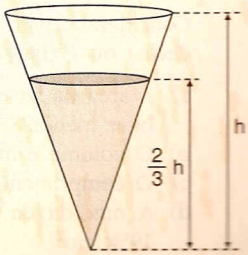
a) 600

b) 625

c) 650

d) 675

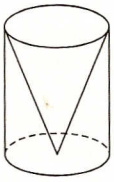
e) 700



5 (Unopar-PR) Um cilindro reto de altura 10 está cheio de água. Coloca-se dentro do cilindro um cone maciço reto de mesma altura, conforme a figura. Sendo os raios da base do cilindro e do cone iguais a r, e sendo 20π o volume de água que sobrou dentro do cilindro, o valor de r é:

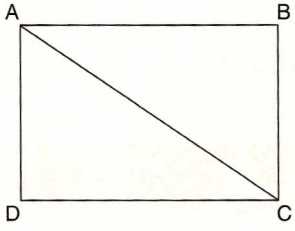
Dados: $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $V_{cilindro} = \pi r^2 h$; h = altura; r = raio da base.

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) 2
d) $\sqrt{6}$
e) 3



6 (Mackenzie-SP) O retângulo ABCD da figura faz uma rotação completa em torno de $\overline{BC}$. A razão entre os volumes dos sólidos gerados pelos triângulos ABC e ADC é:

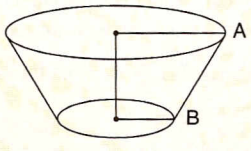
a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{1}{4}$
d) 1
e) $\frac{1}{2}$



7 (UF-PE) Um cone reto tem altura $12\sqrt[3]{2}$ cm e está cheio de sorvete. Dois amigos vão dividir o sorvete em duas partes de mesmo volume, usando um plano paralelo à base do cone. Qual deverá ser a altura do cone menor assim obtido?

a) 12 cm
b) $12\sqrt{2}$ cm
c) $12\sqrt{3}$ cm
d) $10\sqrt{2}$ cm
e) $10\sqrt{3}$ cm

8 (UF-GO) A figura abaixo representa um tronco de cone, cujas bases são círculos de raios 5 cm e 10 cm, respectivamente, e altura 12 cm.



Considerando-se esse sólido, assinale V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações seguintes:

a) A área da base maior é o dobro da área da base menor.
b) O volume é menor que 2000 cm^3.
c) O comprimento da geratriz AB é 13 cm.
d) A medida da área da superfície lateral é 195π cm^2.

9 (Mackenzie-SP) Um prisma e um cone retos têm bases de mesma área. Se a altura do prisma é $\frac{2}{3}$ da altura do cone, a razão entre o volume do prisma e o volume do cone é:

a) $\frac{5}{3}$
b) 3
c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{5}{2}$
e) 2

10 (UF-PR) O formato interno de um reservatório de água é o de um cone circular reto com o vértice embaixo e o eixo na vertical. A altura e o raio da base do cone medem, respectivamente, 6 m e 8 m. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) as sentenças seguintes:

a) Quando o reservatório contém água até a altura de x metros, o volume da água é $\frac{16}{27}\pi x^3$ metros cúbicos.
b) Quando o nível da água está a 3 m do vértice do cone, a superfície da água forma um círculo de raio igual a 3 m.
c) A geratriz do cone mede 10 m.
d) A capacidade desse reservatório é menor que a de outro cujo formato interno é o de um cubo de 6 m de aresta.

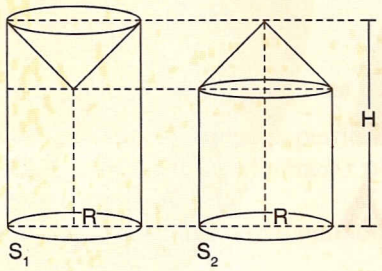
11 (UCDB-MT) Um tronco de cone reto tem os raios das bases medindo 5 cm e 2 cm e a geratriz, 5 cm. O volume do tronco é:

a) 56π cm^3
b) 54π cm^3
c) 52π cm^3
d) 58π cm^3
e) 60π cm^3

12 (Unifor-CE) Dois cones retos, C_1 e C_2, têm alturas iguais e raios da base de medidas r_1 cm e r_2 cm, respectivamente. Se $r_1 = \frac{4}{5} r_2$, então a razão entre os volumes de C_1 e C_2, nessa ordem, é

a) $\frac{24}{25}$
b) $\frac{16}{25}$
c) $\frac{18}{25}$
d) $\frac{4}{5}$
e) $\frac{22}{25}$

13 (UF-RN) Dois sólidos de formatos cilíndricos têm bases de mesmo raio R. De um deles, foi extraída uma parte cônica, que foi colada no outro, conforme mostra a figura. Aos dois sólidos resultantes, de mesma altura H, chamaremos de S_1 e S_2.



Se $V(S_1)$ e $V(S_2)$ denotam, respectivamente, os volumes de S_1 e S_2, pode-se afirmar que:

a) $V(S_1) > V(S_2)$

b) $V(S_1) + V(S_2) = 2\pi R^2 H$

c) $V(S_1) < V(S_2)$

d) $V(S_1) + V(S_2) = \frac{7}{3}\pi R^2 H$

14 (Cefet-MG) Uma pirâmide de base hexagonal é inscrita em um cone, com altura h = 2 dm e base de raio r = 3 dm. O volume da pirâmide, em litros, é igual a:

a) 6π

b) 12

c) $6\sqrt{3}$

d) $9\sqrt{3}$

e) $27\sqrt{3}$

15 (ITA-SP) O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é 128π m^3, temos que o raio da base e a altura do cone medem, respectivamente, em metros:

a) 9 e 8

b) 8 e 6

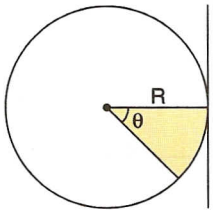
c) 8 e 7

d) 9 e 6

e) 10 e 8

Desafios

1 (Fuvest-SP) Um setor circular, com ângulo central θ ($0 < \theta < 2\pi$), é recortado de um círculo de papel de raio R (ver figura). Utilizando o restante do papel, construímos a superfície lateral de um cone circular reto.

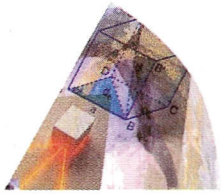


Determine, em função de R e θ:

a) o raio da base do cone;

b) o volume do cone.

2 Um estudante devia construir um cone a pedido do seu professor de Geometria. Para tanto, dispunha de um semicírculo de cartolina, de 20 cm de raio. Entretanto, por um descuido, 25% da superfície da cartolina (justamente um outro semicírculo, concêntrico com o primeiro) danificaram-se. Assim, o estudante só conseguiu construir — ocupando toda a cartolina que sobrou — um tronco de cone, ainda que sem "tampa". Determine o volume do tronco assim construído.

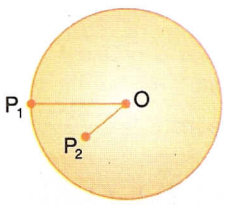


ESFERA

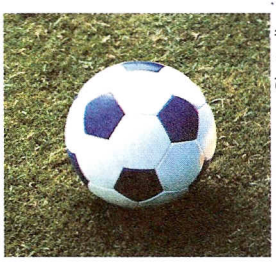
33

1 ○ Conceitos

Esfera



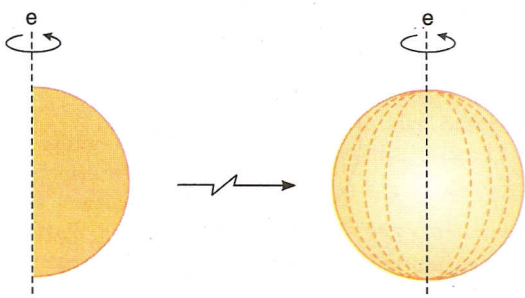
$d_{O,P} \leq r$



Photodisc

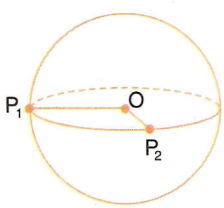
Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se *esfera* de centro O e raio r o conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja menor ou igual a r.

A esfera é o sólido de revolução gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém um diâmetro.

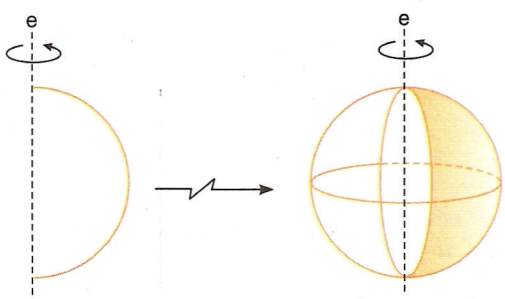


Superfície esférica

Superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do espaço que distam r do ponto O.



$d_{O,P} = r$

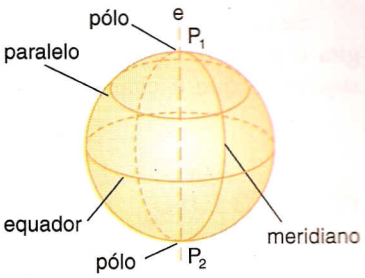


A superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o diâmetro é uma superfície esférica.

2 ○ Elementos

Considerando a superfície de uma esfera de eixo *e*, temos:

- *pólos* são as interseções da superfície com o eixo;
- *equador* é a seção (circunferência) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície;
- *paralelo* é qualquer seção (circunferência) perpendicular ao eixo;
- *meridiano* é qualquer seção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.

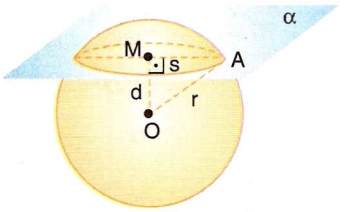


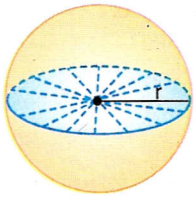
Seção da esfera

Toda seção plana de uma esfera é um círculo.

Sendo *r* o raio da esfera, *d* a distância do plano secante ao centro e *s* o raio da seção, vale a relação:

$$s^2 = r^2 - d^2$$





Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um *círculo máximo* da esfera.

3 ○ Área e volume

Área da esfera

A área de uma superfície esférica de raio *r* é igual a $4\pi r^2$.

$$A = 4\pi r^2$$

Volume da esfera

O volume de uma esfera de raio *r* é igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

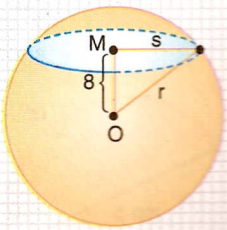
Observação

As deduções das fórmulas apresentadas ao lado não fazem parte do objetivo da obra.

Exemplo 1

Uma esfera é secionada por um plano a 8 cm do centro; a seção obtida tem área 36π cm^2.
Vamos determinar a área da superfície da esfera e seu volume.
Inicialmente devemos considerar a área da seção:

$$36\pi = \pi \cdot s^2 \Rightarrow s = 6 \text{ cm}$$



Mas

$$s^2 = r^2 - d^2 \Rightarrow 6^2 = r^2 - 8^2 \Rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

- *Área da esfera*

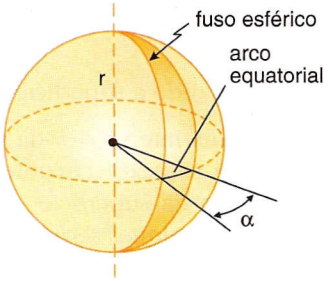
$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 \Rightarrow A = 400\pi \text{ cm}^2$$

- *Volume da esfera*

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \Rightarrow V = \frac{4\,000\pi}{3} \text{ cm}^3$$

4 ○ Fuso esférico

Se uma semicircunferência com as extremidades num eixo gira α graus ($0° < \alpha \leq 360°$) em torno do eixo, ela gera uma superfície que é chamada *fuso esférico*.



Área do fuso

Note que, quanto maior for o ângulo α, maior será o fuso correspondente; a área do fuso é diretamente proporcional a α.

Assim, podemos estabelecer as seguintes regras de três simples:

Para α em graus:

$360° \text{ ——— } 4\pi r^2$ ⟵ esfera ⟶ $2\pi \text{ rad ——— } 4\pi r^2$

$\alpha° \text{ ——— } A_{fuso}$ $\qquad\qquad$ $\alpha \text{ rad ——— } A_{fuso}$

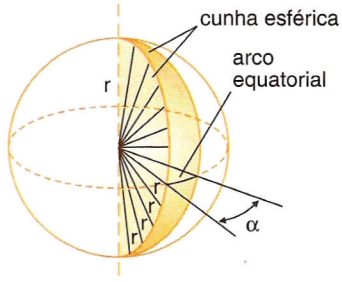
$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$A_{fuso} = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{90}$ $\qquad\qquad$ $A_{fuso} = 2r^2\alpha$

Para α em radianos:

5 ○ Cunha esférica

Se um semicírculo com o diâmetro num eixo gira α graus ($0° < \alpha \leq 360°$) em torno do eixo, ele gera um sólido que é chamado *cunha esférica*.



Volume da cunha

Note que, quanto maior for o ângulo α, maior será o volume da cunha correspondente; o volume da cunha é diretamente proporcional a α.

Assim, podemos estabelecer as seguintes regras de três simples:

Para α em graus:

$360° \text{ ——— } \dfrac{4}{3}\pi r^3$ ⟵ esfera ⟶ $2\pi \text{ rad ——— } \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$\alpha° \text{ ——— } V_{cunha}$ $\qquad\qquad$ $\alpha \text{ rad ——— } V_{cunha}$

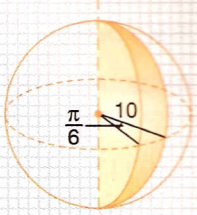
$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$V_{cunha} = \dfrac{\pi r^3 \alpha}{270}$ $\qquad\qquad$ $V_{cunha} = \dfrac{2r^3\alpha}{3}$

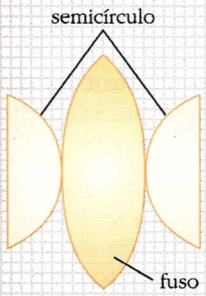
Para α em radianos:

Exemplo 2

Vamos calcular a área total e o volume de uma cunha esférica de $\frac{\pi}{6}$ radianos, de uma esfera de 10 cm de raio.



- *Área total da cunha*



$A_{t_{cunha}} = A_{fuso} + A_{círculo}$

Cálculo da área do fuso:

2π rad ——— $4\pi \cdot 10^2$

$\frac{\pi}{6}$ rad ——— A_{fuso}

$A_{fuso} = \frac{\pi}{6} \cdot 4\pi \cdot 100 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{100\pi}{3}$ cm²

$A_t = \frac{100\pi}{3} + \pi \cdot 10^2 \Rightarrow A_t = \frac{400\pi}{3}$ cm²

- *Volume da cunha*

2π rad ——— $\frac{4}{3}\pi \cdot 10^3$

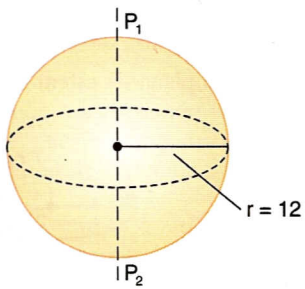
$\frac{\pi}{6}$ rad ——— V

$\Rightarrow V = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2\pi} \Rightarrow V = \frac{1\,000\pi}{9}$ cm³

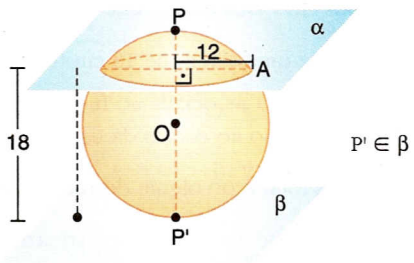
Exercícios

1 Em cada caso, determine a área e o volume da esfera, cujas medidas estão dadas em centímetros.

a)



b)



2 Calcule a área da parte visível (semi-esfera) de um sorvete de massa servido numa casquinha cônica de volume 36π cm³ e altura 12 cm.

3 Uma esfera de círculo máximo com área 36π cm² é secionada, a 3 cm do centro, por um plano. Calcule a área da seção determinada pelo plano.

4 Determine a área de uma esfera, sendo 972π cm³ o seu volume.

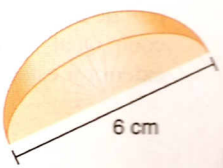
5 Determine a área de um fuso esférico de 60° de uma esfera de raio 60 cm e o volume da respectiva cunha.

6 O que ocorre com a área e o volume de uma esfera se o raio:

a) dobrar?

b) aumentar em 20%?

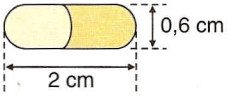
7 Calcule a área total e o volume do sólido da figura ao lado, que representa um dos gomos de uma tangerina esférica, dentre os dez únicos, todos exatamente do mesmo tamanho.

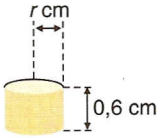


8 (UF-SC) Determine, em cm^3, o volume de um cubo circunscrito a uma esfera de $16\pi\ cm^2$ de área.

9 (FGV-SP) Um cubo maciço de metal, com 5 cm de aresta, é fundido para formar uma esfera também maciça. Qual é o raio da esfera? Use $\pi = 3$.

10 (UF-MT) Um medicamento é produzido nas formas farmacêuticas de cápsulas e de comprimidos. Suponha que o comprimido tenha forma de um cilindro circular reto e que a cápsula tenha a mesma forma cilíndrica do comprimido, tendo, entretanto, uma semi-esfera em cada extremidade. Considere que o raio de cada semi-esfera seja igual ao raio da parte cilíndrica da cápsula.
As figuras abaixo mostram os esboços da cápsula e do comprimido, com suas respectivas dimensões.





Com base nessas informações, julgue como verdadeiro ou falso cada item.

a) Se a área total da cápsula é o dobro da área lateral do comprimido, então r é um número racional.

b) Se a soma dos volumes das semi-esferas da cápsula é igual ao volume do comprimido, então r é um número irracional.

11 (U. F. Juiz de Fora-MG) Deseja-se fabricar 21 000 bolinhas esféricas maciças de chocolate, de 0,8 cm de raio cada uma, derretendo barras de chocolate, também maciças, em forma de blocos retangulares de 32 cm de comprimento, 8 cm de largura e π cm de altura cada uma. Considerando que não há perda de chocolate durante a fabricação das bolinhas, determine o número mínimo de barras que devem ser utilizadas.

12 Um joalheiro que necessita confeccionar uma esfera de ouro com 3 cm de raio dispõe de algumas pequenas esferas do mesmo material, porém com 2 cm de raio cada uma.

a) Determine o número mínimo de esferas pequenas a serem fundidas para suprir o material necessário.

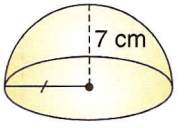
b) A sobra de ouro, no caso de se adotar a hipótese explicitada no item *a*, será vendida à razão de R$ 18,00 por cm^3. Determine, em reais, o valor apurado com a venda. Adote $\pi = 3{,}15$.

13 Um fuso de 15° de uma esfera de 10 cm de raio é equivalente a uma seção plana da esfera. Determine:

a) o volume da cunha associada ao fuso.

b) a distância da seção ao centro da esfera.

14 Determine a área total e o volume do recipiente fechado da figura ao lado.



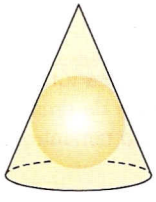
15 (FGV-SP) Um depósito de grãos num armazém tem o formato de um cilindro reto encimado por um hemisfério.

a) Se o raio da base do cilindro for 2 m e o volume do recipiente for de $50\pi\ m^3$, qual será a altura do cilindro?

b) Se o volume do recipiente for $\left(\frac{47}{3}\right)\pi\ m^3$ e o cilindro tiver 15 m de altura, qual será o raio da base do cilindro (que é o mesmo do hemisfério)?

16 (UF-CE) Um silo tem a forma de um cilindro circular reto (com fundo) encimado por uma semi-esfera, como na figura ao lado. Determine o volume e a área da superfície desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2 m e que a altura do silo mede 8 m.

17 (Covest-PE) A figura ao lado ilustra a esfera de maior raio contida no cone reto de raio da base igual a 6 e altura igual a 8, tangente ao plano da base do cone. Qual o inteiro mais próximo da metade do volume da região do cone exterior à esfera?

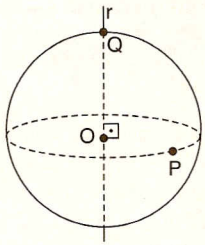


Testes de vestibulares

1 (UCDB-MT) Uma secção feita numa esfera a 2 cm do centro tem 5π cm^2 de área. Então a área da superfície esférica é igual a:

a) 38π cm^2 d) 40π cm^2
b) 30π cm^2 e) 36π cm^2
c) 32π cm^2

2 (UF-AL) Na figura abaixo tem-se uma esfera de raio 2 cm e centro O. O ponto P pertence a um círculo máximo dessa esfera e o ponto Q é a intersecção da esfera com a reta r, que é perpendicular a esse círculo pelo seu centro.



A medida do segmento $\overline{PQ}$, em centímetros, é igual a:

a) $\sqrt{2}$ c) 2 e) 4
b) $2\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$

3 (UA-AM) Um plano secciona uma esfera determinando um círculo de 16π cm^2 de área, sabendo-se que o plano dista 3 cm do centro da esfera, então o volume da esfera é igual a:

a) $\frac{100\pi}{3}$ cm^3 d) $\frac{500\pi}{3}$ cm^3
b) $\frac{125\pi}{3}$ cm^3 e) 200π cm^3
c) 150π cm^3

4 (UF-RS) O volume de uma esfera A é $\frac{1}{8}$ do volume de uma esfera B. Se o raio da esfera B mede 10, então o raio da esfera A mede:

a) 5 c) 2,5 e) 1,25
b) 4 d) 2

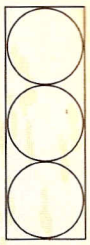
5 (Unifor-CE) Reduzindo-se a medida do raio de uma esfera em 20% de seu valor, o volume será reduzido em:

a) 48,8% c) 62,8% e) 54,6%
b) 51,2% d) 56,4%

6 (PUC-PR) Tem-se um recipiente cilíndrico, de raio 3 cm, com água. Se mergulharmos inteiramente uma bolinha esférica nesse recipiente, o nível da água sobe cerca de 1,2 cm.
Sabe-se, então, que o raio da bolinha vale aproximadamente:

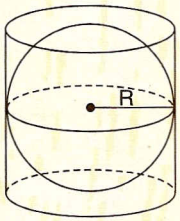
a) 1 cm c) 2 cm e) 3 cm
b) 1,5 cm d) 2,5 cm

7 (Mackenzie-SP) Bolas de tênis, normalmente, são vendidas em embalagens cilíndricas contendo três unidades, que tangenciam as paredes internas da embalagem. Numa dessas embalagens, se o volume não ocupado pelas bolas é 2π, o volume da embalagem é:



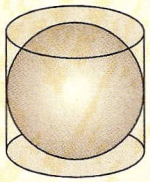
a) 6π c) 10π e) 4π
b) 8π d) 12π

8 (UF-RS) A figura ao lado representa um cilindro circunscrito a uma esfera. Se V_1 é o volume da esfera e V_2 é o volume do cilindro, então a razão $\frac{V_1}{V_2 - V_1}$ é:



a) $\frac{1}{3}$ c) 1 e) 3
b) $\frac{1}{2}$ d) 2

9 (UCDB-MT)



Um cilindro eqüilátero de volume V m^3 encontra-se cheio de água, quando uma esfera, cujo raio coincide com o raio da base do cilindro, é mergulhada completamente no cilindro fazendo transbordar certa quantidade de água.
Nessas condições, o volume, em m^3, de água restante no cilindro é igual a:

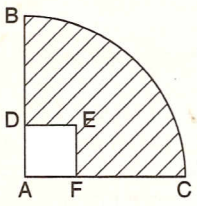
a) 0 c) $\frac{V}{3}$ e) $\frac{3V}{4}$
b) $\frac{V}{4}$ d) $\frac{V}{2}$

10 (UF-SE) Cada vértice de um cubo de aresta x é centro de uma esfera de raio $\frac{x}{2}$. O volume da parte comum ao cubo e às esferas é:

a) $\frac{\pi}{12}x^3$ c) $\frac{\pi}{6}x^3$ e) $\frac{\pi}{2}x^3$

b) $\frac{\pi}{8}x^3$ d) $\frac{\pi}{4}x^3$

11 (UF-MG)



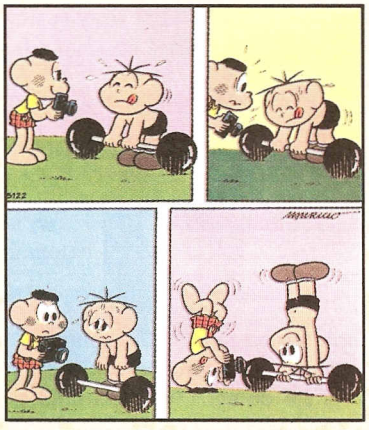
Na figura, ABC é um quadrante de círculo de raio 3 cm e ADEF é um quadrado, cujo lado mede 1 cm.
Considere o sólido gerado pela rotação de 360°, em torno da reta $\overleftrightarrow{AB}$, da região hachurada na figura.
Esse sólido tem um volume de:

a) 14π cm^3 c) 16π cm^3

b) 15π cm^3 d) 17π cm^3

12 (PUC-SP) A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.

TURMA DA MÔNICA/Maurício de Sousa



© Maurício de Sousa Produções

Suponha que cada esfera tenha 10,5 cm de diâmetro e que o bastão tenha 50 cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4 cm. Se a densidade do ferro é 7,8 g/cm^3, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? $\left(\text{Use: } \pi = \frac{22}{7}.\right)$

a) 18 c) 15 e) 10

b) 16 d) 12

13 (PUC-RS) Uma pirâmide quadrangular regular é inscrita numa esfera de raio $\sqrt{2}$ cm. Se a altura da pirâmide é igual ao raio da esfera, então o apótema da pirâmide, em cm, mede:

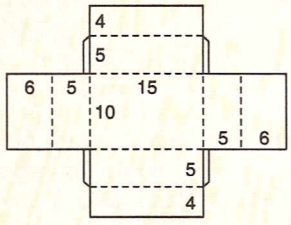
a) $\sqrt{2}$ c) 2 e) $\sqrt{6}$

b) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{5}$

14 (U. F. Juiz de Fora-MG) Dois cubos de metal, de arestas π cm e 2π cm, fundem-se para formar uma esfera.
O comprimento do raio dessa esfera, em cm, é:

a) 3π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\sqrt[3]{9\pi^2}$ d) $3 \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi^2}{4}}$

15 (Enem-MEC) Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Os sólidos são fabricados nas formas de:

I. Um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm;

II. um cubo de aresta 2 cm;

III. uma esfera de raio 1,5 cm;

IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm;

V. um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos:

a) I, II e III. d) II, III, IV e V.

b) I, II e V. e) III, IV e V.

c) I, II, IV e V.

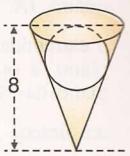
Desafios

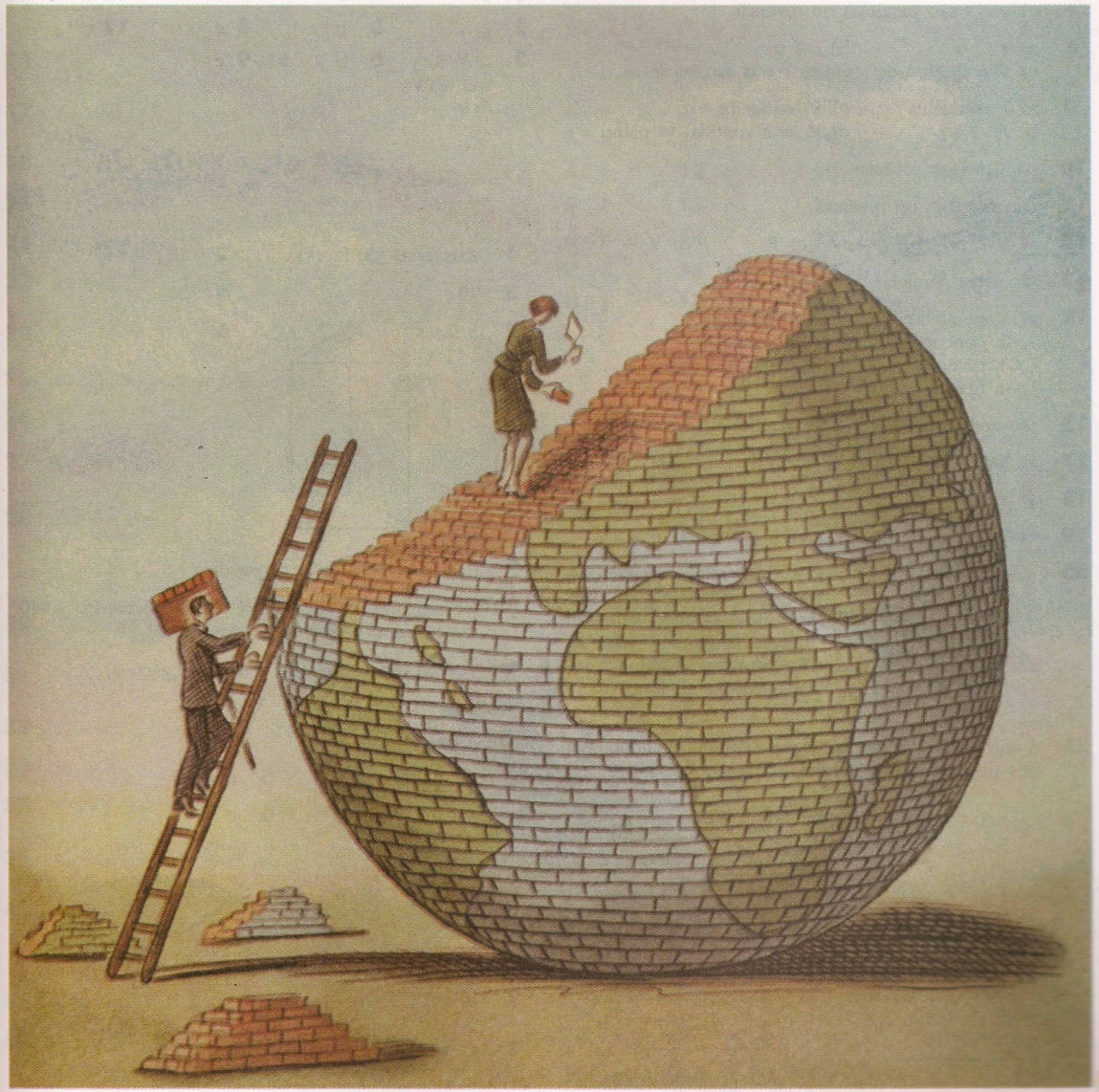
1 (PUC-SP) Deseja-se confeccionar caixas na forma de paralelepípedo para embalar 16 bolas de bilhar, todas com mesmo diâmetro. Cada bola tangencia a tampa e o fundo da caixa e cada bola tangencia também uma outra bola que lhe é vizinha, ou uma parede da caixa.

a) Quais devem ser as dimensões da caixa para que se use o mínimo de material possível na sua confecção?

b) Qual é o volume, no interior da caixa, que não é ocupado pelas bolas?

2 (Mackenzie-SP) Num recipiente cônico, completamente cheio com água, foi introduzida uma esfera maciça de raio 3, como mostra a figura.
Determine o volume de água que permaneceu no recipiente.





Peter Till/Getty Images

26 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

EXERCÍCIOS

1 a) F b) V c) V d) V e) V f) V g) F h) V

2 quatro; (A, B, C), (A, B, D), (A, C, D), (B, C, D)

3 3 extremidades de pés, necessariamente, formam um plano, a outra extremidade pode não pertencer ao plano das 3 primeiras.

4 um único **5** um ou três

6 a) V b) F c) V d) F

7 a) r e s são concorrentes.
b) r, s e t coincidem.
c) r e s são paralelas ou reversas.

8 a) $r \subset \alpha$ b) $r \parallel \alpha$
c) P é o traço de r em α; r e α são secantes.

9 a) V; secantes b) F c) V; paralelos d) V; reta contida no plano

10 paralelas ou reversas

11 concorrentes ou reversas

12 a) V b) V c) F d) V

13 são retas paralelas

14 a) 1. paralelas 2. concorrentes 3. reversas 4. reversas 5. secantes 6. paralelas 7. paralelas

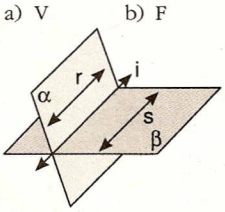
15 são concorrentes **16** paralelas ou reversas

17 a) V b) F c) V

18 a) V b) F c) V

19 a) V b) F c) F d) F

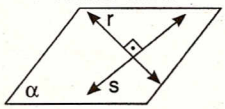
20



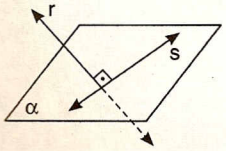
"Se duas retas paralelas estão contidas em planos secantes — cada reta em um único plano — as retas são paralelas também à interseção dos planos."

21 A afirmação é *falsa*, pois r pode assumir qualquer das três posições em relação a α:

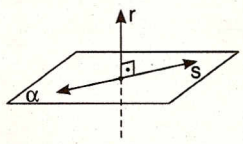
r contida em α



r oblíqua a α



r perpendicular a α



22 a) F b) F c) F d) V

23 dois pontos distintos ou duas retas paralelas ou duas retas coincidentes.

24 a) perpendiculares
b) é igual à medida do diâmetro do círculo maior.

25 $AC = d_{A, C}$; $BC = d_{B, C} = d_{C, \overleftrightarrow{AB}} = d_{r, \overleftrightarrow{AB}}$;
$AB = d_{A, B} = d_{A, \pi} = d_{A, \overleftrightarrow{BC}}$

26 a) F b) F c) F d) V e) F f) V

TESTES DE VESTIBULARES

1 e **2** e **3** a) V b) F c) V d) V e) V **4** e **5** b **6** b **7** c **8** e **9** e **10** d **11** c

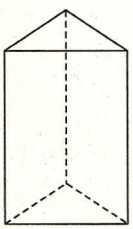
27 POLIEDROS

EXERCÍCIOS

1 icosaedro (20 faces) **2** 10

3 10 **4** 20

5 5 faces **6** 6



7 tetraedro, octaedro e icosaedro

8 tetraedro: 720°; hexaedro: 2 160°; octaedro 1 440°; dodecaedro: 6 480°; icosaedro: 3 600°

9 V = 60 (60 átomos); A = 90 (90 ligações)

TESTES DE VESTIBULARES

1 c **2** d **3** d **4** e **5** a **6** b

28 ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

EXERCÍCIOS

1 a) $2\sqrt{5}$ cm² b) 8 cm² c) 12 cm²

2 10 cm e 4 cm

3 a) $10\sqrt{21}$ cm² b) 128 m² c) $\frac{117\sqrt{3}}{2}$ m²

4 48 m

5 a) $4x^2$ b) $\frac{x^2}{4}$ c) $2x^2$

6 a) 8 cm² b) 3,2 cm²

7 a) 16 cm e 32 cm b) 16 cm² e 64 cm²

8 O retângulo e o paralelogramo possuem a mesma área: 43,2 cm².

9 84 cm²

10 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{6}$

11 $\frac{10\sqrt{55}}{11}$ cm

12 a) 12 cm² d) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm²
b) $7\sqrt{15}$ cm² e) $825\sqrt{2}$ cm²
c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m² f) $10\sqrt{3}$ dm²

13 $\frac{1155}{16}$ cm²

14 $\frac{27}{4}\sqrt{15}$ cm²

15 8 cm

16 4

17 a) 16% b) $\frac{21}{4}$

18 $x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 6$

19 4 cm²

20 a) $r^2 \operatorname{sen} 2\beta$ b) 45°

21 $x \in \mathbb{R} \mid x > 4$

22 a) $4\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$

23 $\frac{8}{5}$

24 $\frac{2}{3}$ cm

25 a) 53,5%, aproximadamente b) 100%

26 4

27 a) $36\sqrt{3}$ cm² b) $\frac{252}{5}$ cm²

28 a) $\frac{125}{2}$ cm² c) 24 cm² e) $6\sqrt{3}$ cm²
b) $\frac{17\sqrt{55}}{4}$ cm² d) 7,5 cm²

29 $75\sqrt{3}$ cm²

30 64 m

31 $\frac{15\sqrt{6}}{2}$ cm²

32 12 m

33 120 dm²

34 45 cm²

35 18 m

36 a) V b) V

37 $676\sqrt{3}$ cm²

38 2,5 ℓa

39 $A_H = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ell^2 > \frac{9}{4}\ell^2 = A_Q$

40 a) 36π dm² c) 4π cm²
b) $\frac{36}{\pi}$ dm² d) 100π cm²

41 3,38 cm

42 $2\pi^3$ cm³

43 a) 6π cm² c) 5π cm² e) 9π cm²
b) 3π cm² d) 12π cm²

44 a) $\frac{11\pi}{2}$ cm² d) $2\pi r^2$
b) $8(4 - \pi)$ cm² e) $\frac{4 - \pi}{2}a^2$
c) $\frac{9\pi}{2}$ cm² f) $(2\pi - 4\sqrt{2})$cm²

45 20π

46 8π cm²

47 $\frac{1}{2}$ ou 2

48 $64\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ cm²

49 Ambas as áreas são iguais a $\pi(R^2 - r^2)$.

50 99

51 5 m

52 a) $\pi R^2 - 8R + 16$ b) $\frac{4}{\pi}$ cm

53 $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ cm²

54 a) $8 + \pi$
b) $8 - \pi$

55 a) V b) V c) V

TESTES DE VESTIBULARES

1	b	**9**	b	**17**	d	**25**	a
2	d	**10**	d	**18**	c	**26**	a
3	e	**11**	c	**19**	b	**27**	b
4	b	**12**	d	**20**	a	**28**	b
5	c	**13**	e	**21**	e	**29**	b
6	b	**14**	d	**22**	c	**30**	e
7	d	**15**	b	**23**	b	**31**	d
8	a	**16**	d	**24**	e		

29 PRISMA

EXERCÍCIOS

1 a) hexagonal c) hexagonal
b) triangular d) heptagonal

2 a) $d = 4\sqrt{3}$ cm; S = 96 cm²; V = 64 cm³
b) $d = \sqrt{57}$ cm; S = 112 cm²; V = 80 cm³
c) d = 7 cm; S = 72 cm²; V = 36 cm³

3 a) $d = (x - 1)\sqrt{3}$; $S = 6(x - 1)^2$; $V = (x - 1)^3$
b) $d = a\sqrt{14}$; $S = 22a^2$; $V = 6a^3$
c) $d = \sqrt{3x^2 + 6x + 5}$; $S = 6x^2 + 12x + 4$; $V = x^3 + 3x^2 + 2x$

4 $\sqrt{15}$ m

5 125 m²

6 a) quadruplica b) octuplica

7 $\frac{81}{80}$

8 $216(5 + 2\sqrt{6})$ cm²

9 a) V c) V e) F
b) F d) V

10 a) 340 cm² b) $120\sqrt[3]{20}$ cm²

11 $2 \cdot 5^{\frac{2}{3}}$ m

12 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

13 $\sqrt{30}$ m

14 a) 50 cm b) R$ 8,40

15 80 minutos

16 a) $A_\ell = 120\ cm^2$; $A_t = 168\ cm^2$; $V = 120\ cm^3$
b) $A_\ell = 72\ cm^2$; $A_t = (72 + 12\sqrt{3})\ cm^2$; $V = 36\sqrt{3}\ cm^3$
c) $A_\ell = 24\sqrt{3}\ cm^2$; $A_t = (8 + 24\sqrt{3})\ cm^2$; $V = 12\sqrt{3}\ cm^3$

17 $A_t = 75(4 + \sqrt{3})\ cm^2$; $V = 375\sqrt{3}\ cm^3$

18 $4\sqrt{11}\ cm^3$ **19** $18\sqrt{5}\ m^2$; $15\sqrt{3}\ m^3$

20 a) $1\,287\ cm^3$ b) $658{,}944\ cm^3$

21 $V = 36\ \ell$; $A_\ell = 6\,000\ cm^2$

22 $\frac{h}{2}$ **23** $512\sqrt{3}\ cm^3$

24 a) $A_\ell = 9a^2$; $A_t = \left(9 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$; $V = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$

b) $A_\ell = 18x^2$; $A_t = (18 + 3\sqrt{3})x^2$; $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^3$

c) $A_\ell = 8k^2$; $A_t = (8 + \sqrt{2})k^2$; $V = \sqrt{2}\,k^3$

26 60

27 $A_\ell = 120\ cm^2$; $A_t = (120 + 48\sqrt{3})\ cm^2$; $V = 120\sqrt{3}\ cm^3$

28 a) EI = 5 m; HI = 4 m

b) $104\ m^2$; R$ 416,00

29 $\frac{15(8 + \sqrt{7})}{2}\ cm^3$ **30** $(8 - 2\sqrt{3})\ cm$

TESTES DE VESTIBULARES

1	a	**6**	d	**11**	c	**16**	e
2	b	**7**	c	**12**	c	**17**	d
3	b	**8**	c	**13**	d	**18**	c
4	d	**9**	c	**14**	a	**19**	c
5	a	**10**	d	**15**	a		

30 PIRÂMIDE

EXERCÍCIOS

1 a) pentagonal c) heptagonal
b) hexagonal d) pentagonal

2 $16(1 + \sqrt{3})\ cm^2$; $\frac{32\sqrt{2}}{3}\ cm^3$

3 $36\sqrt{3}\ cm^2$; $18\sqrt{2}\ cm^3$

4 a) 14 b) 1 **5** a) V b) 18%

6 a) $9(3 + \sqrt{3})\ m^2$ b) $3\sqrt{2}\ m$

7 $48\ cm^3$ **8** $72\sqrt{91}\ m^2$; $1152\sqrt{3}\ m^3$

9 20 m

10 $36(1 + \sqrt{17})\ cm^2$; $144\ cm^3$ **11** $350\,000\ \ell$

12 a) $10\sqrt[6]{72}\ cm \cong 20{,}4\ cm$
b) $10\sqrt[6]{4{,}5}\ cm \cong 12{,}8\ cm$

13 $1152\ cm^3$ **14** $96\ cm^2$; $\frac{64\sqrt{6}}{3}\ cm^3$

15 $2a^2(2 + \sqrt{13})$

16 a) $A_t = 2a^2\sqrt{3}$; $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

b) $A_t = (1 + \sqrt{15})a^2$; $V = \frac{\sqrt{14}}{6}a^3$

c) $A_t = 3a^2\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $V = \frac{\sqrt{39}}{4}a^3$

17 $1\,000\sqrt{6}\ cm^3$

18 a) $\frac{1}{2}$ ou 2 b) 4 cm

c) $3(3 + \sqrt{73})\ cm^2$; $12(3 + \sqrt{73})\ cm^2$; 4 ou $\frac{1}{4}$

d) 8 ou $\frac{1}{8}$

19 $\frac{\sqrt{5}}{2}\ cm$; $\frac{25}{2}\ cm^2$ **20** $\frac{7\sqrt{11}}{30}\ m^3$

21 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

22 $\frac{75}{2}(13\sqrt{3} + 5\sqrt{67})\ cm^2$; $4750\sqrt{3}\ cm^3$

23 $16a^2\sqrt{3}$; $\frac{13\sqrt{11}}{4}a^3$ **24** $222\sqrt{7}\ cm^3$

25 $16(25 + 7\sqrt{15})\ cm^2$; $\frac{1184\sqrt{14}}{3}\ cm^3$

26 $63\sqrt{3}\ dm^3$ **27** $18\sqrt{3}\ cm^2$; $9\sqrt{2}\ cm^3$

TESTES DE VESTIBULARES

1	b			**5**	a	**9**	c	**13**	c
2	d			**6**	e	**10**	c	**14**	d
3	d			**7**	a	**11**	b		
4	a) F	c) V		**8**	a	**12**	d		
	b) V	d) F							

31 CILINDRO

EXERCÍCIOS

1 $56\pi\ cm^2$; $48\pi\ cm^3$

2 $\frac{16}{\pi}(2 + 3\pi)\ cm^2$ ou $\frac{6}{\pi}(8\pi + 3)\ cm^2$

3 $54\pi\ cm^2$; $54\pi\ cm^3$

4 a) $\pi r^2 h$ e $\frac{\pi r^2 h}{9}$ b) 9 **5** R$ 7400,00

6 a) $\frac{3\sqrt{5}}{2}(3\sqrt{5} + 12)\ cm^2$; $\frac{135\pi}{2}\ cm^3$
b) $(28 + 18\pi)\ cm^2$; $14\pi\ cm^3$

7 $5\sqrt{2}\ cm$ **8** $9\pi\ m^3$

9 a) $432\pi\ m^3$ b) R$ 6782,40

10 a) aproximadamente 36 130 000 toras
b) 5 161 000 toras; 6 709 000 toras
c) 5,949 milhões de m^3

11 4 **12** $V_2 = 2V_1$

13 $\frac{d}{2}$ **14** 6,5 cm, aproximadamente

15 R$ 0,21, aproximadamente

16 $\frac{9\pi}{5}$ **17** 15π cm³

TESTES DE VESTIBULARES

1	b	**6**	d	**11**	c	**13**	b
2	c	**7**	d	**12**	a) F	**14**	e
3	c	**8**	b		b) F	**15**	1) b
4	e	**9**	b		c) V		2) c
5	d	**10**	b		d) V	**16**	d

32 CONE

EXERCÍCIOS

1 a) 16π cm²; $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ cm³

b) $4\pi(1 + \sqrt{10})$ cm²; 8π cm³

c) $\frac{28\pi}{9}$ cm²; $\frac{8\pi\sqrt{35}}{81}$ cm³

d) 1050π cm²; 2940π cm³; $\theta \cong 260°$

2 $72\pi\sqrt{3}$ cm³; 72π cm² **3** 30°

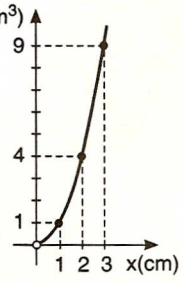
4 12π m²; $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ m³; $4\sqrt{3}$ m² **5** 12π cm³

6 $[14 + (2 + \sqrt{53})\pi]$ cm²; $\frac{14\pi}{3}$ cm³

7 $\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³ **8** a) 3 m b) 1 m

9 $\frac{V_{cilindro}}{V_{cone}} = \frac{3}{8}$ **10** $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ **11** 50 mℓ

12 a) $y = x^2$ b)



13 a) 42π cm²; $39\sqrt{3}\pi$ cm³

b) $8\sqrt{17}\pi$ cm²; $\frac{104\pi}{3}$ cm³

14 $4(5 + 3\sqrt{2})\pi$ cm²; $\frac{56\pi}{3}$ cm³

15 $\frac{h}{2}$ **16** $42\pi a^2$; $28\pi a^3$

17 $\frac{64\pi}{3}$ cm³ **18** a) π cm² c) 63π cm³

b) π cm³

19 a) 4 b) $\frac{1}{27}$ c) 4 e 12

20 73 cm³

21 $A_\ell = 54\pi$ cm²; $A_t = 99\pi$ cm²; $V = 63\pi\sqrt{3}$ cm³

22 10 cm **23** $\frac{152\sqrt{15}}{3}\pi$ cm³; 80π cm²

TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**7**	a	**10**	a) V	**13**	a
2	d	**8**	a) F		b) F	**14**	d
3	a		b) F		c) V	**15**	b
4	d		c) V		d) F		
5	b		d) V	**11**	c		
6	e	**9**	e	**12**	b		

33 ESFERA

EXERCÍCIOS

1 a) 576π cm²; 2304π cm³

b) 676π cm²; $\frac{8788\pi}{3}$ cm³

2 18π cm² **3** 27π cm²

4 324π cm² **5** 2400π cm²; 48000π cm³

6 a) A área quadruplica e o volume octuplica.

b) A área aumenta 44% e o volume, 72,8%.

7 $\frac{63\pi}{5}$ cm²; $\frac{18\pi}{5}$ cm³ **8** 64 cm³

9 $\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}$ cm **10** a) V; 1

b) V; $\frac{\sqrt{6}}{10}$

11 56 **12** a) 4 b) R$ 378,00

13 a) $\frac{500\pi}{9}$ cm³ b) $\frac{5\sqrt{30}}{3}$ cm

14 147π cm²; $\frac{686\pi}{3}$ cm³

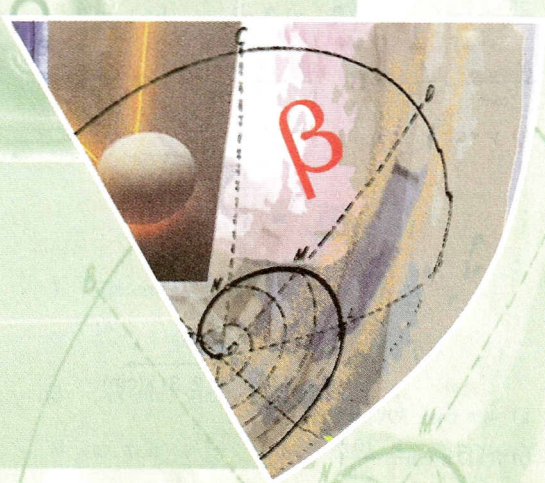
15 a) $\frac{67}{6}$ cm b) 1 m

16 $\frac{88\pi}{3}$ m³; 36π m² **17** 94

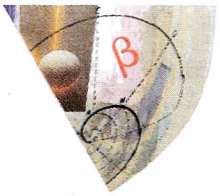
TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**4**	a	**7**	a	**10**	c	**13**	b
2	b	**5**	a	**8**	d	**11**	d	**14**	d
3	d	**6**	c	**9**	c	**12**	e	**15**	c

• GEOMETRIA ANALÍTICA •



Parte 7



O PONTO

34

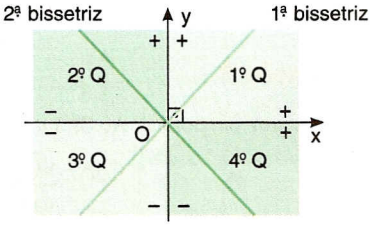
1 ○ Introdução

A Geometria Analítica tem por objetivo conciliar os fatos geométricos com as relações algébricas. Permite, assim, que a Álgebra e a Geometria se relacionem, o que possibilita um estudo sistemático das figuras geométricas, bem como, reciprocamente, a interpretação geométrica das relações algébricas.

Estudaremos, nos próximos quatro capítulos, a Geometria Analítica *plana*, em que os entes geométricos, a começar pelo ponto, estarão relacionados ao plano cartesiano, que designa o sistema de coordenadas ortogonais, já plenamente caracterizado no estudo das funções, no capítulo 2.

2 ○ O plano cartesiano

A cada ponto P do plano cartesiano corresponde um par ordenado (x, y) de números reais e, inversamente, cada par (x, y) tem como seu correspondente um ponto P do plano; escrevemos P(x, y) para indicar esses fatos.



Dois eixos orientados (x e y) são dispostos ortogonalmente, dando origem à divisão do plano em quatro partes, cada uma das quais denominada quadrante. Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti-horário, como mostra a figura, e os eixos e a interseção entre eles são denominados, respectivamente, eixo das abscissas (x), eixo das ordenadas (y) e origem (O) do sistema de coordenadas.

A reta que divide ao meio os quadrantes ímpares é chamada *primeira bissetriz* e a que divide os quadrantes pares é a *segunda bissetriz*.

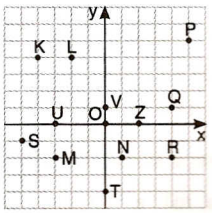
Também são mostrados os sinais das coordenadas em cada quadrante.

Exercícios

1 Situe no mesmo sistema de eixos cartesianos os pontos A(3, 4), B(–2, 3), C(2, 0), D(0, –3), E(2, –3), $F\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$, G(–1, 1) e H(1, –1).

Escreva, a seguir, o quadrante ou eixo a que pertence cada um dos pontos.

2 Dê as coordenadas de cada ponto marcado no plano cartesiano.



3 Situe no sistema de eixos ortogonais cinco pontos que tenham a abscissa como o dobro da respectiva ordenada.

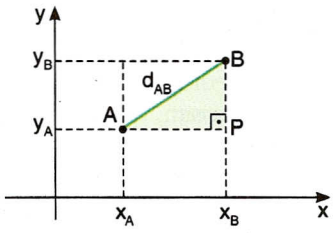
4 Como podem ser representadas, de forma geral, as coordenadas de um ponto que esteja:

a) 3 unidades à esquerda do eixo y?
b) 4 unidades acima do eixo x?
c) 5 unidades abaixo do eixo das abscissas?
d) 2 unidades à direita do eixo das ordenadas?

5 Os pontos (2, 5), (–4, –1) e (–4, 5) são vértices de um triângulo; classifique-o.

6 Sabendo que o ponto $P(1 - k^2, 3k - 2)$ pertence ao quarto quadrante, determine os possíveis valores de k.

3 Distância entre dois pontos



Dados dois pontos distintos do plano cartesiano, chama-se *distância* entre eles a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades.

Determinemos a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, a qual indicaremos por d_{AB}.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AP} \text{ é horizontal} \\ \overline{BP} \text{ é vertical}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle APB \text{ é retângulo em P} \Rightarrow d_{AB}^2 = PA^2 + PB^2$$

Mas $PA = x_B - x_A$ e $PB = y_B - y_A$.
Assim, $d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ e

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \text{ com } d_{AB} \geqslant 0$$

Exemplo 1

Sejam os pontos A(–3, 1) e B(4, 3). A distância entre eles é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{\underbrace{(-3 - 4)^2}_{\substack{\text{quadrado da} \\ \text{variação de } x}} + \underbrace{(1 - 3)^2}_{\substack{\text{quadrado da} \\ \text{variação de } y}}} = \sqrt{53} \text{ unidades de comprimento}$$

Observação

Doravante será omitida a expressão unidades de comprimento quando se tratar de distâncias.

Exercícios

7 Encontre, em cada caso, a distância entre os dois pontos dados.

a) (–3, 2) e (1, 0)
b) (–2, –4) e (2, 3)
c) (3, –1) e (–1, 3)
d) (3, 4) e (0, 0)
e) (1, 1) e (2, 2)

8 Determine a distância entre os pontos em cada caso.

a) P(2m, m) e Q(m, 2m), com $m > 0$
b) R(m, –2m) e S(2m, 3m), com $m < 0$

9 Mostre que o triângulo de vértices (3, 7), (2, 1) e (8, 2) é isósceles; calcule, a seguir, seu perímetro.

10 Determine os valores de m para os quais a distância entre A(m – 1, 3) e B(2, –m) é 6.

11 (UFF-RJ) Considere os pontos A(3, 2) e B(8, 6). Determine as coordenadas do ponto P, pertencente ao eixo x, de modo que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tenham o mesmo comprimento.

12 Determine os dois pontos que estão sobre os eixos cartesianos e que pertencem à mediatriz do segmento de extremidades A(1, 3) e B(–2, 5).

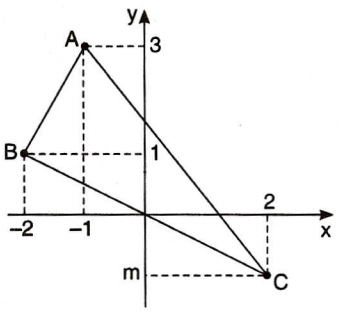
13 (Unifesp-SP) Um ponto do plano cartesiano é representado pelas coordenadas (x + 3y, –x – y) e também por (4 + y, 2x + y), em relação ao mesmo sistema de coordenadas. Determine x^y.

14 Qual é a condição, entre x e y, para que o ponto P(x, y) seja eqüidistante de A(1, 4) e B(–3, –2)?

15 $\overline{AC}$ é a hipotenusa do triângulo da figura abaixo. Determine:

a) o valor de m.

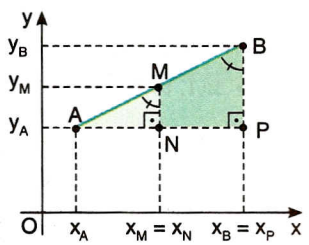
b) a área do triângulo ABC, em unidades de área.



4 ○ Ponto médio de um segmento

Há muitas situações em Geometria Analítica que envolvem mediatrizes de segmentos, medianas e mediatrizes de triângulos e outros assuntos relacionados ao ponto médio de um segmento.

Seja M o ponto médio do segmento com extremidades $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Notemos que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, pois possuem os três ângulos respectivamente congruentes. Assim:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP}$$

Mas AB = 2 · (AM), pois M é ponto médio de AB.

Logo, $\frac{AM}{2 \cdot AM} = \frac{AN}{AP} \Rightarrow \frac{AN}{AP} = \frac{1}{2}$, donde AP = 2 · (AN).

Assim, temos:

$$x_P - x_A = 2(x_N - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2(x_M - x_A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B - x_A = 2x_M - 2x_A \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Mediante procedimento análogo, prova-se que $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Portanto, sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exemplo 2

O ponto médio M do segmento $\overline{PQ}$, com $P\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e $Q\left(\frac{1}{4}, -1\right)$, tem as coordenadas dadas por:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_P + x_Q}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{2} = \dfrac{\frac{3}{4}}{2} = \dfrac{3}{8} \\ \text{e} \\ y_M = \dfrac{y_P + y_Q}{2} = \dfrac{2 + (-1)}{2} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$$

Exercícios

16 Determine, em cada caso, as coordenadas do ponto médio do segmento com extremidades nos pontos:

a) A(–5, 2) e B(3, –2)

b) C(–2, 2) e D(4, –4)

c) $E\left(0, \frac{7}{3}\right)$ e $F\left(\frac{5}{3}, -1\right)$

d) $G(1 + \sqrt{2}, 2)$ e $H(1 - \sqrt{2}, -1)$

17 Seja o segmento $\overline{AB}$, cujo ponto médio M tem coordenadas $x_M = 3$ e $y_M = 4$. Se $x_A = 2$ e $y_A = -2$, encontre as coordenadas de B.

18 Os pontos P(2, 6) e Q(–4, –1) são extremidades de um diâmetro da circunferência λ. Ache as coordenadas do centro e o raio de λ.

19 Ache o valor de x de modo que M(2, 3) seja o ponto médio entre A(x, 5) e B(3, x).

20 (EEM-SP) Determine as coordenadas dos vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são M(–2, 1), N(5, 2) e P(2, –3).

21 Os pontos (3, –9), (7, –5) e (–4, –2) são vértices de um retângulo. Determine as coordenadas do quarto vértice desse retângulo.

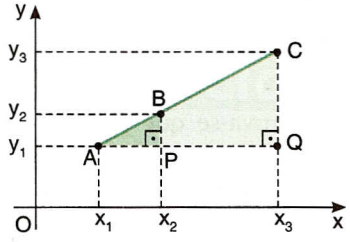
22 De um triângulo ABC são dados:

- B(1, 0)
- $d_{AC}^2 = 45$
- $d_{BC}^2 = 89$
- $M\left(-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ é ponto médio de $\overline{AB}$

Determine as coordenadas de C, sabendo que estas são números inteiros.

5 ○ Condição de alinhamento de três pontos

Para apresentar a condição a que as coordenadas de três pontos do plano, distintos dois a dois, devem obedecer para que eles estejam alinhados, vamos supor que os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estejam na mesma linha, como na figura:



Prolongando a reta horizontal que passa por A, obtemos os pontos P e Q, os quais formam os triângulos retângulos ABP e ACQ, que são semelhantes.

Decorre a proporção $\frac{AQ}{AP} = \frac{CQ}{BP}$, que pode ser escrita como $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$.

Desenvolvendo essa expressão, obtemos:

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) = 0,$$

que pode apresentar a forma $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Assim, para constatar a colinearidade de três pontos, basta calcular um determinante de terceira ordem que contenha em cada linha a abscissa de um dos pontos dados, a respectiva ordenada e o número 1, mantida essa ordem. Se tal determinante for nulo, e só nesse caso, os pontos estarão alinhados.

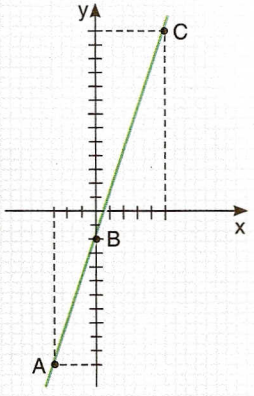
Exemplo 3

Para verificar se os pontos A(–3, –11), B(0, –2) e C(5, 13) são colineares, construímos o determinante $D = \begin{vmatrix} -3 & -11 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 13 & 1 \end{vmatrix}$.

Calculando, temos:

$$D = 6 - 55 + 0 + 10 + 39 + 0 \Rightarrow D = 0$$

Assim, os pontos dados estão alinhados.



Exercícios

23 Verifique, em cada caso, se os três pontos estão alinhados ou não.

a) (5, 0), $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ e (0, 2)

b) (–4, 0), (–1, –2) e (0, 6)

c) (1, 2), (–1, –4) e (4, 11)

d) (2, 5), (–1, –1) e (–5, –9)

e) (3, 9), (–1, –7) e (1, 4)

24 Verifique se os pontos (1, –1), $\left(2, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ e $\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$ estão alinhados.

25 Determine os valores de p para os quais os pontos (–1, 1), (p, p + 1) e (2, 3) são vértices de um triângulo.

26 (FEI-SP) Os pontos A(0, 1), B(1, 0) e C(p, q) estão numa mesma reta. Nessas condições, calcule o valor de p em função de q.

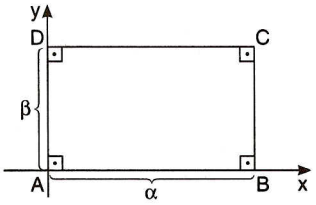
27 O ponto $\left(-\frac{2}{5}, m\right)$ pertence à reta que passa pela origem do sistema cartesiano e pelo ponto (3, 5). Determine o valor de m.

28 Quais são os valores de k para os quais os pontos (2, k), (14, –3) e (k, 3) são colineares?

29 (PUC-MG) Calcule o valor de t, sabendo que os pontos $A\left(\frac{1}{2}, t\right)$, $B\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ e C(–1, 6) são colineares.

30 Os pontos (2, 3) e (3, 5) determinam a reta r que intercepta, em P, a reta s, determinada pelos pontos (0, 3) e (3, –3). Encontre as coordenadas do ponto P.

31 Na figura, ABCD é um retângulo cujos lados medem α e β.



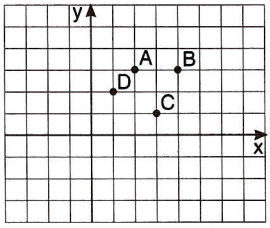
a) Escreva as coordenadas dos pontos A, B, C e D.

b) Obtenha o ponto de encontro das diagonais.

c) Prove que um ponto P(x, y), qualquer, está alinhado com A e C quando $-\beta x + \alpha y = 0$.

32 Prove, analiticamente, que as diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio.

33 Ache as coordenadas dos pontos de interseção das retas determinadas pelos pontos assinalados na figura.



Testes de vestibulares

1 (Fuvest-SP) Se (m + 2n, m – 4) e (2 – m, 2n) representam o mesmo ponto do plano cartesiano, então m^n é igual a:

a) –2 c) $\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{2}$

b) 0 d) 1

2 (FEI-SP) Num sistema de coordenadas cartesianas são dados os pontos A(0, 0) e P(3, h). Assinale a alternativa cuja expressão representa a distância do ponto P ao ponto A em função de h.

a) $d = \sqrt{9 + h^2}$ d) $d = \sqrt{9 + 6h + h^2}$

b) $d = h + 3$ e) $d = 9 + h$

c) $d = 3h$

3 (UCDB-MS) Um triângulo tem vértices A(15, 10), B(6, 0) e C(0, 10). Então a mediana $\overline{AM}$ mede:

a) 10 u.c. c) 11 u.c. e) 9 u.c.

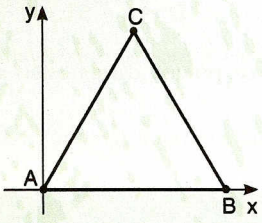
b) 12 u.c. d) 13 u.c.

4 (FEI-SP) Os pontos X, Y e Z possuem, respectivamente, as seguintes coordenadas no plano cartesiano: (0, 0), (m, 8), (n, n + 3).
Se Z é o ponto médio do segmento $\overline{XY}$, então:

a) m = 2 c) n = 3 e) n = 2

b) m = 1 d) m = 5

5 (Ucsal-BA) Na figura, o triângulo ABC é eqüilátero, sendo A e B, respectivamente, os pontos (0, 0) e (4, 0).



As coordenadas do ponto C são:

a) (2, 1) c) $(2, 2\sqrt{3})$ e) (3, 2)

b) (2 ,2) d) $(3, \sqrt{3})$

6 (U. F. Uberlândia-MG) Considere, no plano cartesiano com origem O, um triângulo cujos vértices A, B e C têm coordenadas (–1, 0), (0, 4) e (2, 0), respectivamente. Se M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, a área do triângulo OMN será igual a:

a) $\frac{5}{3}$ u.a. c) 1 u.a.

b) $\frac{8}{5}$ u.a. d) $\frac{3}{2}$ u.a.

7 (Unifesp-SP) No triângulo QPP′ do plano cartesiano, temos Q(a, 0), com $a < 0$, P(4, 2) e P' sendo o simétrico de P em relação ao eixo x.
Sabendo que a área desse triângulo é 16, o valor de a é:

a) –5 c) –3 e) –1

b) –4 d) –2

8 (UF-ES) O quadrado ABCD do plano cartesiano tem os vértices consecutivos A(0, 7) e B(3, 0). Se C e D estão no primeiro quadrante, então o ponto médio do lado $\overline{CD}$ é:

a) (8, 7)
b) (7, 8)
c) $\left(\frac{15}{2}, \frac{17}{2}\right)$
d) $\left(\frac{17}{2}, \frac{13}{2}\right)$
e) $\left(\frac{15}{2}, \frac{13}{2}\right)$

9 (FMU/Fiam/Faam-SP) Os pontos A(0, 0), B(1, 3), C(10, 0) são vértices de um retângulo. O quarto vértice do retângulo é o ponto:

a) D(3, –9)
b) D(–3, 9)
c) D(–9, 3)
d) D(9, –3)
e) D(8, –1)

10 (Cefet-MG) Uma das diagonais de um quadrado tem extremidades em A(1, 1) e B(3, 3). As coordenadas dos outros dois vértices são:

a) (2, 3) e (3, 2)
b) (3, 0) e (1, 4)
c) (5, 2) e (4, 1)
d) (3, 1) e (1, 3)
e) (4, 2) e (2, 4)

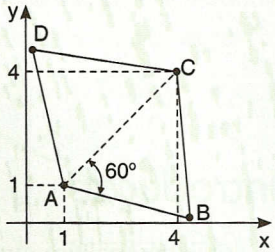
11 (PUC-RJ) Os pontos (0, 8), (3, 1) e (1, y) do plano são colineares. O valor de y é igual a:

a) 5
b) 6
c) $\frac{17}{3}$
d) $\frac{11}{2}$
e) 5,3

12 (UCDB-MT) O ponto A pertence ao eixo dos y e o triângulo ABC é retângulo em A. Dados B(2, 3) e C(–4, 1), obtenha as coordenadas de A.

a) (0, –5) ou (0, 1)
b) (0, 5) ou (0, –1)
c) (0, –5) ou (0, –4)
d) (0, 5) ou (0, 1)
e) (0, –5) ou (0, –1)

13 (UF-AL) Na figura a seguir tem-se o losango ABCD, com A(1, 1) e C(4, 4), e cuja diagonal $\overline{AC}$ forma ângulo de medida 60° com o lado $\overline{AB}$.

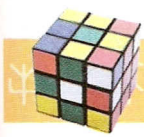


O perímetro desse losango é:

a) $3\sqrt{2}$
b) 6
c) $12\sqrt{2}$
d) $24\sqrt{2}$
e) 48

14 (Fuvest-SP) Os vértices de um triângulo ABC, no plano cartesiano, são: A(1, 0), B(0, 1) e C(0, $\sqrt{3}$). Então, o ângulo $B\hat{A}C$ mede:

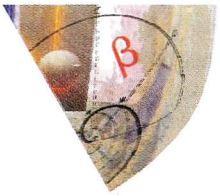
a) 60°
b) 45°
c) 30°
d) 18°
e) 15°



Desafios

1 Uma partícula A parte da origem do sistema de coordenadas cartesianas e percorre, no primeiro quadrante, com velocidade constante, uma semi-reta. Outra partícula, B, parte ao mesmo tempo do ponto (2, 1) e percorre, no mesmo quadrante e com velocidade constante, outra semi-reta. Se, após algum tempo, A e B encontram-se no ponto P(1, 4), qual é a partícula mais rápida? Justifique.

2 O triângulo de vértices (4, 1), (6, 4) e (2, p) é isósceles. Determine os valores de p.



A RETA

35

1 ○ Introdução

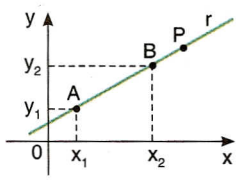
Em Geometria Analítica, uma reta é representada por uma equação, a qual estabelece a relação entre as coordenadas dos pontos dessa reta.

Há diferentes maneiras para apresentar a equação de uma mesma reta. Neste capítulo daremos ênfase às duas mais utilizadas: a forma geral (pela qual iniciaremos) e a forma reduzida da equação da reta.

2 ○ A equação geral da reta

Consideremos a reta r, caracterizada por dois de seus pontos, $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico de r, os pontos A, B e P estão alinhados e suas coordenadas respeitam a condição de alinhamento:



$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante:

$$x_1y_2 + xy_1 + x_2y - xy_2 - x_2y_1 - x_1y = 0 \quad \text{e}$$

$$x\underbrace{(y_1 - y_2)} + y\underbrace{(x_2 - x_1)} + \underbrace{(x_1y_2 - x_2y_1)} = 0$$

Lembrando que x_1, x_2, y_1 e y_2 são valores reais fixos, podemos fazer:

$$y_1 - y_2 = a, \quad x_2 - x_1 = b \quad \text{e} \quad x_1y_2 - x_2y_1 = c$$

Assim, teremos:

$$ax + by + c = 0 ,$$

chamada *forma geral* da equação da reta.

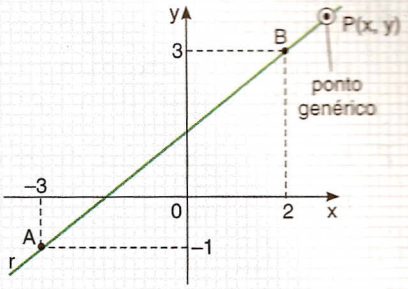
Por extensão, dizemos que qualquer equação do 1º grau com duas variáveis, do tipo $ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, representa a equação de uma reta, sendo x e y as coordenadas de um ponto genérico da reta.

Exemplo 1

Obter a equação geral da reta r, que passa pelos pontos A(–3, –1) e B(2, 3), equivale a relacionar as coordenadas dos pontos de r a partir da igualdade

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que é a condição de alinhamento de A, B e P, ponto genérico de r (ponto variável que pode percorrer a reta r).

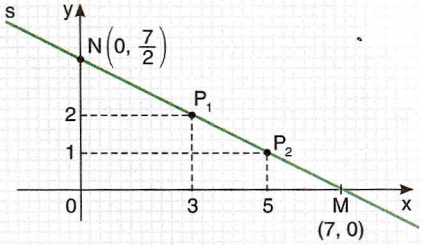


Temos $-9 - x + 2y - 3x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow -4x + 5y - 7 = 0$, que equivale a r: $4x - 5y + 7 = 0$ (equação geral de r).

Exemplo 2

A reta s tem equação s: $x + 2y - 7 = 0$. Para representá-la no plano cartesiano construímos uma tabela atribuindo valores arbitrários a x e calculando os correspondentes valores de y:

x	y	
3	2	—— P_1
5	1	—— P_2



- O ponto (1, 3) pertence a s, pois $1 + 2 \cdot 3 - 7 = 0$; já (2, 6) não é ponto de s, pois $2 + 2 \cdot 6 - 7 \neq 0$.
- Para obter as coordenadas de M, ponto em que s intercepta o eixo das abscissas, basta fazer $y = 0$ e obter x:

$$x + 2 \cdot 0 - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow M(7, 0)$$

- Por outro lado, na determinação de N, ponto em que s intercepta o eixo das ordenadas, fazemos $x = 0$ e obtemos y:

$$0 + 2 \cdot y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{2} \Rightarrow N\left(0, \frac{7}{2}\right)$$

Exercícios

1 Obtenha a equação geral da reta que passa pela origem e pelo ponto (6, 5).

2 Encontre, em cada caso, a forma geral da equação da reta que passa pelos pontos dados.

a) (2, 2) e (–5, 3)
b) (–2, –3) e (4, –1)
c) (10, 1) e (1, 10)
d) (–3, –4) e (0, 1)

3 Verifique se a reta r: $5x - y - 8 = 0$ passa pelos pontos:

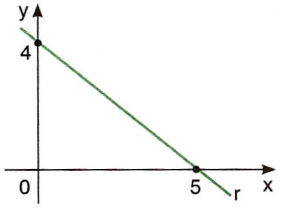
a) (1, 1) b) (2, 2) c) (3, 7) d) (4, 11) e) (0, 8)

4 Determine, em cada caso, as coordenadas dos pontos em que a reta r intercepta os eixos coordenados.

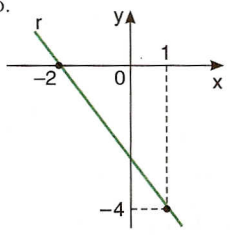
a) $3x + 2y - 6 = 0$
b) $x + y + 16 = 0$
c) $5x - 4y + 1 = 0$

5 Dê a forma geral da equação da reta r em cada caso.

a)



b)



6 Dados os pontos A(–1, –1), B(1, 2) e C(3, 5), ache a equação geral da reta r que passa por A e C. A seguir:

a) verifique se a reta r passa por B.

b) defina a posição relativa entre os pontos A, B e C.

7 Encontre a equação geral da reta r, que passa por A(13, 3) e pelo ponto médio do segmento $\overline{BC}$, sendo B(–1, –3) e C(2, –9). A reta r passa pela origem? E pelo ponto $\left(\frac{17}{9}, -5\right)$?

3 A equação reduzida da reta

Dada a equação geral da reta não vertical r: $ax + by + c = 0$, com a, b e c como no item 2, ao isolar y obtemos $y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{m}x \underbrace{-\frac{c}{b}}_{n}$.

Chamando, simplesmente, $-\frac{a}{b}$ de m e $-\frac{c}{b}$ de n, aparece

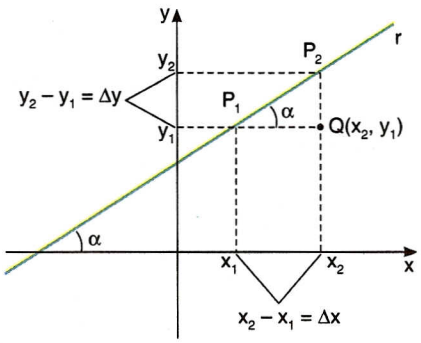
$$r: y = mx + n \quad ,$$

denominada *forma reduzida* da equação da reta r.

Vamos entender o significado das constantes m e n.

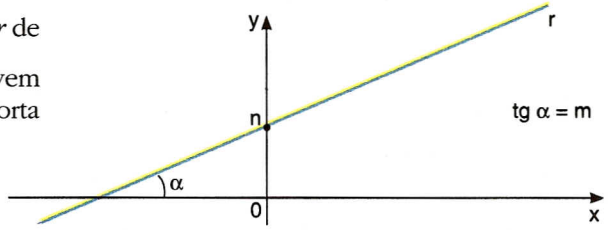
Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, dois pontos de r, e α o ângulo formado entre r e o eixo das abscissas, no seu sentido positivo, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_2Q}{P_1Q} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{x_2 - x_1} = \frac{-a}{b} = m$$



$m = \operatorname{tg}\alpha$ é o *coeficiente angular* da reta r, também denominado *declividade* da reta r.

Além disso, $\frac{-c}{b} = n$ é o *coeficiente linear* de de r. Na equação $y = mx + n$, fazendo $x = 0$, vem $y = n$, ou seja, (0, n) é o ponto em que r corta o eixo das ordenadas.

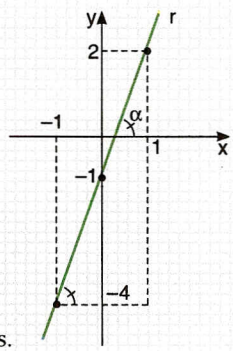


Exemplo 3

Sendo r a reta de equação $y = \underbrace{3}_{m}x \underbrace{-1}_{n}$, temos:

x	y
1	2
–1	–4

- $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (-4)}{1 - (-1)} = 3$
- $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow n = -1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow (0, -1)$ é o ponto em que r intercepta o eixo das ordenadas.

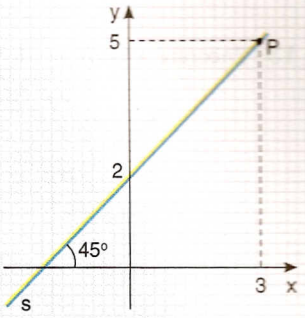


Exemplo 4

Para obter a equação reduzida da reta s, que forma 45° com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo, e que passa por P(3, 5), fazemos:

- $\text{tg } 45^\circ = 1 = m \Rightarrow s: y = 1x + n$
- s passa por $P \Rightarrow 5 = 1 \cdot 3 + n \Rightarrow n = 2$

$\Rightarrow s: y = x + 2$

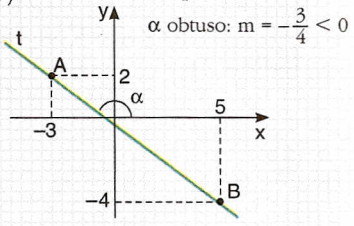


Exemplo 5

Na determinação da equação reduzida $y = mx + n$ da reta t, que passa pelos pontos A(–3, 2) e B(5, –4), resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} A(-3, 2): & 2 = -3m + n \\ B(5, -4): & -4 = 5m + n \end{cases} \Rightarrow -6 = 8m \Rightarrow m = -\frac{3}{4} \Rightarrow 2 = -3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + n \Rightarrow n = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

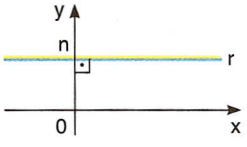
$$\Rightarrow t: \underbrace{y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}}_{\text{reduzida}} \Rightarrow 4y = -3x - 1 \Rightarrow t: \underbrace{3x + 4y + 1 = 0}_{\text{geral}}$$



α obtuso: $m = -\frac{3}{4} < 0$

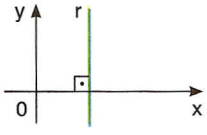
Observações

1ª) Se a reta r é horizontal, ela forma ângulo nulo com o eixo das abscissas; assim, $m = \text{tg } 0^\circ = 0$ e a equação reduzida da reta torna-se simplesmente $y = n$.



equação geral: $by + c = 0$

2ª) Se a reta r é vertical, ela forma ângulo reto com o eixo das abscissas; como não existe tg 90°, é impossível escrever a forma reduzida da equação de qualquer reta vertical.



equação geral: $ax + c = 0$

Exercícios

8 Determine o coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos (0, 2) e (5, 1). A seguir, determine a equação reduzida de r.

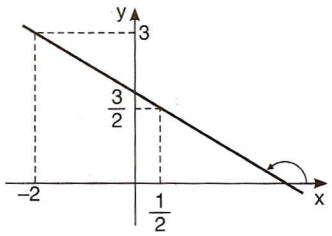
9 Obtenha a equação reduzida da reta s, que possui coeficiente linear –2 e coeficiente angular –3. P(5, 0) é ponto de s?

10 Uma reta t, que passa pelo ponto $(-5, \sqrt{3})$, forma ângulo de 60° com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo. Obtenha a equação reduzida de t.

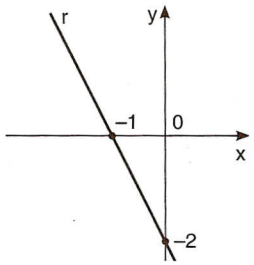
11 A reta u passa pela origem do sistema de coordenadas e pelo ponto $\left(\frac{7}{2}, 1\right)$. Determine as formas reduzida e geral da equação de reta u.

12 Determine os coeficientes linear e angular da reta de equação $3x + 4y - 12 = 0$.

13 Encontre a tangente do ângulo assinalado.



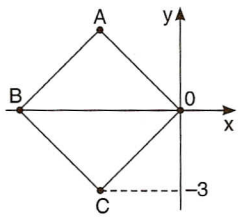
14 (Mackenzie-SP) Qual é a equação da reta r da figura?



15 (Fuvest-SP) Determine a equação da reta que passa pelo ponto P(2, 3) e pelo ponto Q, simétrico de P em relação à origem.

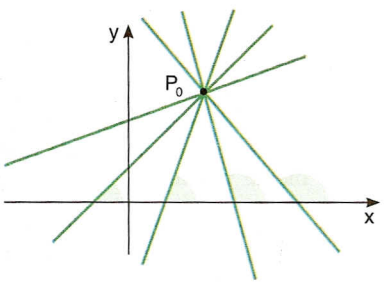
16 Obtenha a equação geral da reta que passa pelo ponto médio de $\overline{BC}$ e tem declividade $\frac{3}{2}$; são dados: B(–3, –9) e C(–4, 2).

17 Seja o quadrado OABC da figura; determine as equações de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, na forma reduzida, e a área do quadrado.



4 Retas que passam por um ponto dado

Seja $P_0(x_0, y_0)$ um ponto do plano cartesiano, pelo qual passam infinitas retas. Excetuando-se a reta vertical e a horizontal que passam por P_0, cada uma das outras possui um único coeficiente angular m, não nulo, isto é, forma ângulo (agudo ou obtuso) com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo.



Tomemos uma reta r qualquer, dentre essas, e um ponto P de r, distinto de P_0. Sendo P(x, y), temos, para r:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Daí, $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Quanto às duas exceções consideradas:

- **1ª** r horizontal:

$m_r = 0 \Rightarrow y - y_0 = 0 \Rightarrow y = \underbrace{y_0}_{n}$ é a equação reduzida de r.

- **2ª** r vertical:

$\alpha = 90° \Rightarrow \nexists$ tg $\alpha \Rightarrow \nexists$ m $\Rightarrow$ r não possui equação reduzida.

Resumo

As retas não verticais que passam por $P_0(x_0, y_0)$ são dadas pelas equações:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{ou} \quad y = y_0$$

Exemplo 6

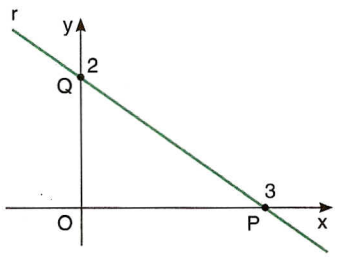
A equação $y - 3 = m(x + 2)$ representa as retas que passam por $P_o(-2, 3)$.

A cada valor real da declividade m corresponde uma reta do feixe:

- $m = 1 \Rightarrow y - 3 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 5$
- $m = 2 \Rightarrow y - 3 = 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x + 7$
- $m = -1 \Rightarrow y - 3 = -1(x + 2) \Rightarrow y = -x + 1$
- $m = 0 \Rightarrow y - 3 = 0(x + 2) \Rightarrow y = 3$ (reta horizontal)

5 ○ Outras formas de equação da reta

Uma reta pode ser representada também de outras formas. Apresentaremos essas modalidades de equações de reta valendo-nos apenas da reta r, representada na figura.



Forma segmentária

Essa equação apresenta diretamente as coordenadas dos pontos em que a reta corta os eixos coordenados.

Vamos determinar inicialmente a forma geral:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 6 = 0$$

Transpomos o termo livre para o segundo membro e, a seguir, dividimos ambos os membros por esse número:

$$2x + 3y = 6 \Rightarrow \frac{2x + 3y}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow \frac{2x}{6} + \frac{3y}{6} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

- $\frac{x}{3}$: abscissa do ponto de interseção com o eixo x
- $\frac{y}{2}$: ordenada do ponto de interseção com o eixo y
- 1: 2º membro unitário

Esta última é denominada *forma segmentária* da equação de r.

Equações paramétricas

São estabelecidas duas equações em função de uma outra variável; no caso de r:

$$2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 - 3y \Rightarrow x = 3 - \frac{3}{2}y \Rightarrow x = 3\left(1 - \frac{y}{2}\right)$$

Fazendo, *arbitrariamente*, $1 - \frac{y}{2} = t$, temos:

$$x = 3t \quad e \quad y = 2 - 2t \ ,$$

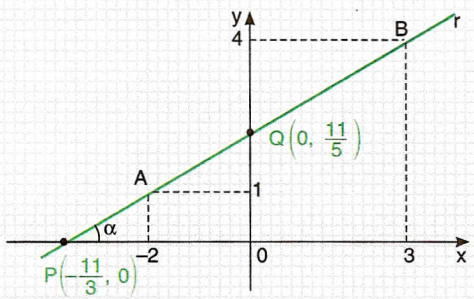
chamadas *equações paramétricas* de *r*.

Com a variação de *t* podemos obter os pontos de *r*.

t	x	y	ponto
0	0	2	Q(0, 2)
1	3	0	P(3, 0)
–1	–3	4	(–3, 4)
⋮			⋮

Exemplo 7

Seja a reta *r*, que passa pelos pontos A(–2, 1) e B(3, 4).



Vamos determinar, para *r*, as quatro equações apresentadas.

- *geral*

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8 + x + 3y - 4x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow 3x - 5y + 11 = 0$$

- *reduzida*

$$3x - 5y + 11 = 0 \Rightarrow 5y = 3x + 11 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{5}$$

- *segmentária*

$$3x - 5y + 11 = 0 \Rightarrow 3x - 5y = -11 \Rightarrow \frac{3x}{-11} - \frac{5y}{-11} = \frac{-11}{-11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{-11}{3}} + \frac{y}{\frac{11}{5}} = 1$$

interseção com os eixos

$$P\left(-\frac{11}{3}, 0\right); \ Q\left(0, \frac{11}{5}\right)$$

- *paramétricas*

Escolha arbitrária: $3x + 11 = t$.

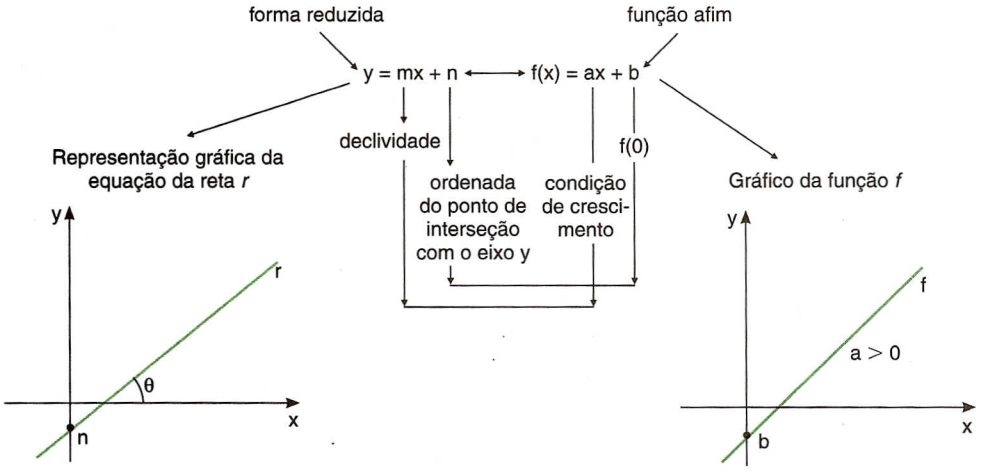
$$y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5} = \frac{3x + 11}{5} \Rightarrow y = \frac{t}{5}$$

$$3x = t - 11 \Rightarrow x = \frac{t - 11}{3}$$

Assim, $y = \frac{t}{5}$ e $x = \frac{t - 11}{3}$ podem ser equações paramétricas de *r* (há outras!).

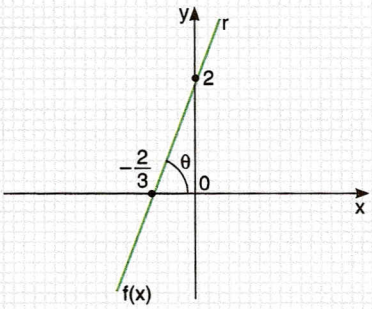
6 ○ Analogia com a função afim

É possível estabelecer um paralelo entre a *forma reduzida* da equação da reta e a *função afim*, que você estudou no capítulo 3 deste livro.



Exemplo 8

A reta de equação reduzida r: y = 3x + 2 e a função afim f(x) = 3x + 2 possuem a mesma representação gráfica:



	x	y	
	0	2	(coeficiente linear)
(raiz)	$-\frac{2}{3}$	0	
	x	f(x)	

À medida que x varia em $\mathbb{R}$, obtêm-se, em correspondência, os demais valores de y ou os demais valores de f(x).

No caso, a declividade m da reta é positiva ($0 < \theta < 90^\circ$) e a função afim é crescente ($a > 0$).

Exercícios

18 Utilizando os pontos A(1, 3), B(2, 5), C(0, –1) e D(–1, –1), determine:

a) a equação reduzida da reta que passa por A e B.
b) a equação geral da reta que passa por B e D.
c) a posição relativa entre A, B e D.
d) um par de equações paramétricas da reta $\overleftrightarrow{AC}$.

19 Qual é a reta dada pelas equações $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t - 1 \end{cases}$?

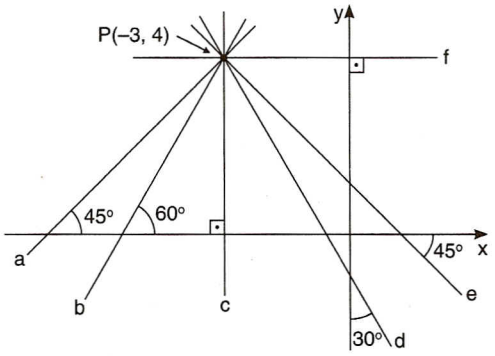
20 Escreva as equações geral, reduzida, segmentária e paramétricas (com t = x + 1) da reta r, que passa pelos pontos A(–3, –4) e B(2, 6).

21 (UF-CE) A reta $2x + 3y = 5$, ao interceptar os dois eixos coordenados, forma com estes um triângulo retângulo. Calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

22 Em cada caso, obtenha a equação da reta que passa por P e tem declividade m.

a) P(2, 3); $m = 2$ b) P(–2, 1); $m = -2$ c) P(4, 0); $m = \frac{1}{2}$

23 Obtenha as equações das retas a, b, c, d, e e f da figura.

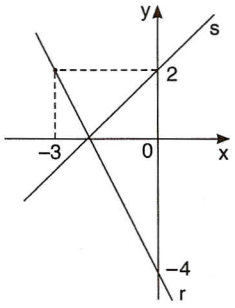


24 Em certa cidade, a bandeirada de táxi custa R$ 4,00 e, a cada quilômetro rodado, o passageiro desembolsa R$ 0,90. Determine:

a) o valor mínimo de uma corrida.
b) o preço de uma corrida de 8 quilômetros.
c) a quantidade de quilômetros rodados em uma corrida de R$ 13,00.
d) Faça a representação gráfica do problema e ache a tangente do ângulo que a reta que representa a função forma com a horizontal.

25 O coeficiente angular da reta de equação r: $(p + 1)x + (p - 1)y + 1 = 0$ vale 2. Escreva a equação segmentária de r.

26 Determine a equação geral da reta s da figura ao lado.



7 ○ Interseção de retas

O ponto $P(x_p, y_p)$ de interseção de duas retas concorrentes r e s pertence evidentemente a cada uma das retas e assim, por isso mesmo, suas coordenadas devem satisfazer as equações de ambas as retas, ao mesmo tempo.

Sejam as retas r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, dadas na forma geral. Substituindo simultaneamente as coordenadas x_p e y_p nas duas equações, temos:

$$\begin{cases} a_1x_p + b_1y_p + c_1 = 0 \\ a_2x_p + b_2y_p + c_2 = 0 \end{cases}$$

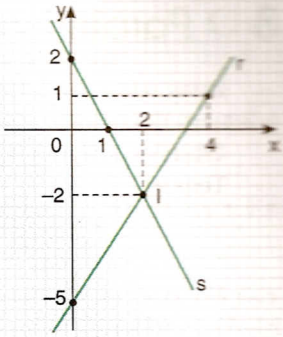
que constitui um sistema de duas equações lineares a duas incógnitas (x_p e y_p), o qual, resolvido, fornece as coordenadas do ponto de interseção.

Exemplo 9

Para achar o ponto I, de interseção entre as retas r: $3x - 2y - 10 = 0$ e s: $2x + y - 2 = 0$, devemos simplesmente resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x_I - 2y_I - 10 = 0 \\ 2x_I + y_I - 2 = 0 \end{cases},$$

o qual fornece $x_I = 2$ e $y_I = -2$, ou seja, $I(2, -2)$.



Exemplo 10

As retas r e s, dadas na forma reduzida como r: $y = 2x - 6$ e s: $y = 3x + 2$, têm o ponto I de interseção obtido do mesmo modo:

$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow 2x - 6 = 3x + 2 \Rightarrow x = -8 \Rightarrow y = -22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(-8, -22)$$

Exercícios

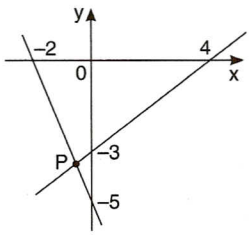
27 Obtenha o ponto de interseção entre as retas r: $2x + 5y - 9 = 0$ e s: $y = -2x - 3$.

28 As retas de equações $x - 3y - 2 = 0$ e $y = x - 2k$ interceptam-se no ponto $(k + 1, k - 1)$. Determine o valor de k e as coordenadas do ponto de interseção das retas.

29 (UF-CE) Encontre o número real m de modo que as retas $x + y = 8$, $2x - 3y = 6$ e $5x + my = 3$ passem por um mesmo ponto.

30 (Fuvest-SP) As retas de equações $x + y - 1 = 0$, $kx + y - 2 = 0$ e $x + ky - 3 = 0$, concorrem num mesmo ponto. Nessas condições, calcule o valor de k.

31 Encontre as coordenadas do ponto P indicado na figura ao lado.



32 (PUC-SP) As equações das retas suportes dos lados de um triângulo são $x + 3y - 3 = 0$, $x - 3y - 3 = 0$ e $x = -1$. Classifique o triângulo.

33 (UFF-RJ) Considere as retas r, s e t cujas equações são, respectivamente, $\frac{x}{p} + y = 1$, $x - py = p$ e $2x + 3y = 6$, com $p \neq 0$. Determine:

a) o valor de p para o qual r, s e t interceptam-se em um único ponto M.

b) as coordenadas do ponto de interseção M.

34 (PUC-RS) Um triângulo ABC tem como vértices os pontos A(2, 1), B(0, 3) e C(–1, 1). Determine as coordenadas do baricentro (ponto de encontro das medianas) desse triângulo.

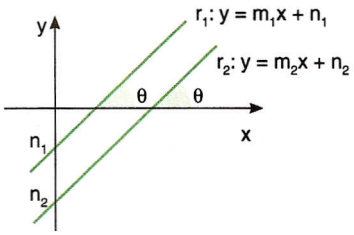
35 Os pontos A(2, –3), B(–2, 3), C(1, 1) e D(–4, –1) são vértices de um quadrilátero. Determine as coordenadas do ponto de encontro das diagonais desse quadrilátero.

36 Encontre o ponto de interseção entre as retas de equações $4x + 2y - 10 = 0$ e $y = -2x + 3$.

8 ○ Paralelismo

Duas retas paralelas formam com o eixo das abscissas ângulos congruentes; assim, se ambas possuem coeficientes angulares, estes são iguais.

Observe a figura, que mostra duas retas não verticais.



Temos:

$$r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = m_1 = m_2 = m$$

No caso de r_1 e r_2 serem verticais, evidentemente $r_1 \parallel r_2$, embora não existam m_1 e m_2.

Exemplo 11

Para verificar a posição relativa entre as retas r: $3x + 6y + 2 = 0$ e s: $x + 2y - 1 = 0$, devemos inicialmente determinar seus coeficientes angulares m_r e m_s:

$$m_r = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2} \quad \text{e} \quad m_s = \frac{-1}{2}$$

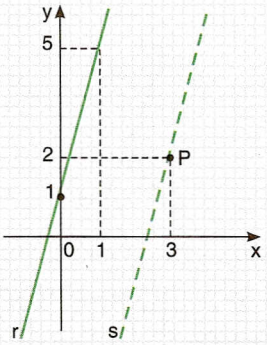
Como $m_r = m_s$, apuramos que r e s são paralelas. Temos também:

$$\left.\begin{array}{l} r:\ 6y = -3x - 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \\ s:\ 2y = -x + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{array}\right\rangle\ n_r \neq n_s$$

Assim, r e s são paralelas e distintas.

Exemplo 12

Dado o ponto P(3, 2), podemos passar, por ele, uma paralela à reta r: $4x - y + 1 = 0$.



$P \notin r$

$$s: \left\{\begin{array}{l} s \parallel r \Rightarrow m_s = m_r = 4 \Rightarrow y = 4x + n \\ P \in s \Rightarrow 2 = 4 \cdot 3 + n \Rightarrow n = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow s:\ y = 4x - 10$$

Exercícios

37 Qual é a posição relativa entre as retas de equações r: $8x - 2y + 7 = 0$ e s: $y = 4x + 7$?

38 Ache a equação geral da reta que passa por $(-3, -1)$ e é paralela à primeira bissetriz.

39 A reta s corta o eixo das abscissas à distância 5 da origem; além disso, $s \parallel r$, sendo r: $2x - 5y + 7 = 0$. Determine a equação de s.

40 Para que valores de p as retas $(p - 1)x + y - 3 = 0$ e $2x + 2y - 1 = 0$ são:

a) paralelas e distintas? b) coincidentes? c) concorrentes?

41 (Faap-SP) Determine os valores de m para que as retas ℓ_1 e ℓ_2, de equações $(1 - m)x - 10y + 3 = 0$ e $(m + 2)x + 4y - 11m - 18 = 0$, sejam concorrentes.

42 (UA-AM) Determine a equação da reta que passa pela interseção das retas $x + y - 5 = 0$ e $4x - y = 0$ e é paralela à reta $2x - y + 3 = 0$.

43 (Fuvest-SP) Qual deve ser a relação de igualdade que se pode estabelecer entre as coordenadas a e b para que a reta r, de equação $x - 3y + 15 = 0$, seja paralela à reta s, determinada pelos pontos $P_1(a, b)$ e $P_2(1, 2)$?

44 $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são lados opostos do retângulo ABCD. Sendo A(1, 1) e B(4, 5), determine a equação geral da reta suporte de $\overline{CD}$.

45 As retas suportes de três lados de um paralelogramo são r: $3x + 2y - 12 = 0$, s: $y = \frac{x}{2} - 1$ e t: $x - 2y + 6 = 0$, e um dos vértices do paralelogramo é (2, 0). Determine:

a) os outros vértices do paralelogramo. b) o perímetro do paralelogramo.

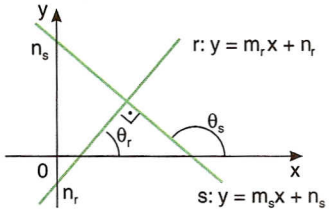
9 Perpendicularidade

A fim de estabelecermos a condição para que duas retas sejam perpendiculares entre si, tomemos inicialmente uma reta oblíqua r que forme ângulo θ_r com o eixo das abscissas.

Seja $s \perp r$ tal que s forme ângulo θ_s com o eixo das abscissas, também no seu sentido positivo.

Temos $\theta_s = 90^\circ + \theta_r$ e

$m_s = \text{tg}\ \theta_s = \text{tg}(90^\circ + \theta_r)$.



Mas $\text{tg}(90^\circ + \theta_r) = -\text{cotg}\ \theta_r = -\frac{1}{\text{tg}\theta_r} = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$.

Assim, $m_r \cdot m_s = -1$ é a condição de perpendicularidade entre duas retas r e s, oblíquas ao eixo x.

A aplicação de $m_r \cdot m_s = -1$ é condicionada ao fato de r e s serem oblíquas ao eixo dos x, pois não é definida a declividade no caso de uma delas ser vertical.

Entretanto, se uma reta é vertical, independentemente da condição estabelecida, uma perpendicular a ela é horizontal, e vice-versa.

Exemplo 13

Pelo ponto P(–3, 4) passa uma única reta s perpendicular a r: $2x - y + 3 = 0$; determinemos sua equação.

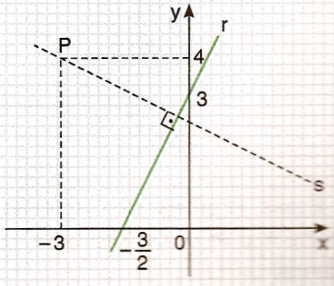
Temos, para r:

$$y = 2x + 3 \Rightarrow m_r = 2$$

Daí, $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{2}$

$$s: \begin{cases} m_s = -\frac{1}{2} \\ s \text{ passa por } (-3, 4) \end{cases} \Rightarrow s: y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$



Exercícios

46 Determine a equação da reta r, que passa por $(-3, -2)$ e é perpendicular a s: $3x - 4y - 8 = 0$.

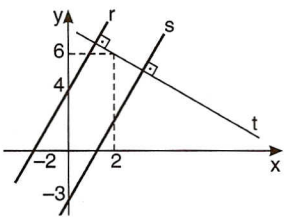
47 (UF-PA) Dados os pontos A(2, 6) e B(4, 3), determine a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

48 (FGV-SP) Considere no plano cartesiano, uma reta r de equação $2x + 3y - 1 = 0$ e um ponto P de coordenadas (2, 5).

a) Obtenha o ponto de intersecção, com o eixo y, da reta que passa por P e é paralela a r.

b) Obtenha o ponto de intersecção da reta r com a reta que passa por P e é perpendicular a r.

49 (UF-MS) Sejam r, s e t as retas definidas no plano cartesiano da figura. Se P(a, b) é o ponto de interseção das retas s e t, calcule $10a + 2b$.



50 (Faap-SP) São dados os pontos A(1, –2), B(3, 4) e C(c, –1). Calcule a abscissa c para que as retas suportes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sejam perpendiculares.

51 ABCD é um quadrado e A(1, 2) e B(3, 5) são vértices consecutivos. Determine as equações das retas suportes dos lados adjacentes a $\overline{AB}$.

52 Estabeleça a condição, sobre p, para que as retas de equações $3x - 5y + 1 = 0$ e $(p - 2)x + py - 3 = 0$ cortem-se, porém não perpendicularmente.

53 (UF-GO) Considere o triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C, sendo que suas coordenadas, no plano cartesiano, são dadas por (4, 0), (1, 6) e (7, 4), respectivamente. Sendo $\overline{PC}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, calcule as coordenadas do ponto P.

54 Prove que o triângulo de vértices A(0, 9), B(3, 2) e C(–4, –1) é retângulo em B; a seguir, determine sua área.

55 (FEI-SP) Determine o ponto P', simétrico do ponto P(2, 1) em relação à reta s, de equação $y = 2x$.

56 (U. F. São Carlos-SP) Considere a reta r: $(a + 1)^2x + (a^2 - a)y - 4a^2 + a - 1 = 0$.

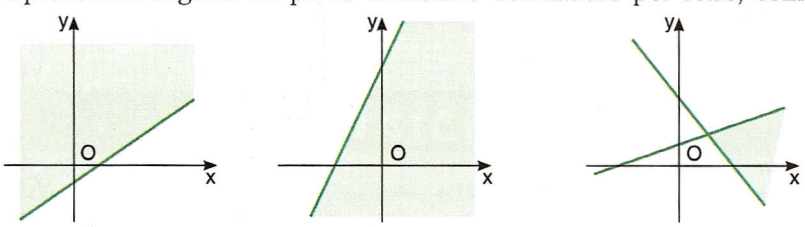
a) Mostre que essa reta passa por um ponto cujas coordenadas não dependem do parâmetro a.

b) Determine a de modo que r seja perpendicular à reta s: $x - 1 = 0$.

57 (UF-RN) Uma formiga desloca-se num plano, ao longo de uma reta. Passa pelo ponto (1, –2) e percorre a menor distância até interceptar a trajetória retilínea de outra formiga, nesse mesmo plano, descrita pela equação $y + 2x = 8$.
Determine a equação da reta que representa a trajetória da primeira formiga.

10 ○ Inequações do 1º grau com duas variáveis

É comum aparecerem regiões do plano cartesiano delimitadas por retas, como nas figuras:

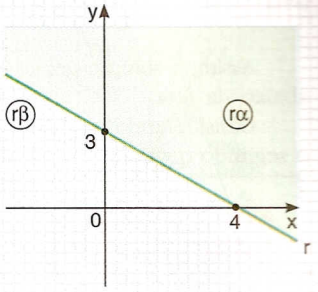


Essas regiões são associadas geralmente a expressões do tipo $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c \geqslant 0$, ou similares, as quais constituem as chamadas inequações do 1º grau com duas variáveis.

Exemplo 14

A região sombreada da figura abaixo, a qual é delimitada pela reta r: $3x + 4y - 12 = 0$, pode ser expressa por meio da inequação:

$$3x + 4y - 12 > 0$$



Com efeito, a reta *r* divide o plano em *dois* semiplanos opostos.

Como os pontos (x_0, y_0) de um mesmo semiplano, relativamente à reta $ax + by + c = 0$, conferem à expressão $ax_0 + by_0 + c$ o mesmo sinal, resta apenas a dúvida: "qual desigualdade, entre $3x + 4y - 12 > 0$ e $3x + 4y - 12 < 0$, escolher?".

Tal escolha passa, simplesmente, pela "experimentação" das coordenadas de um ponto *P qualquer*, $P \notin r$, na equação da reta delimitadora dos semiplanos.

Seja P(0, 0); fazendo $E = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 12$, obtemos $E = -12 < 0$.

(x_p, y_p)

Como a origem, no caso, não está contida na região sombreada, é de se supor que, para qualquer ponto da região sombreada, ocorra a outra hipótese, isto é, $E > 0$.

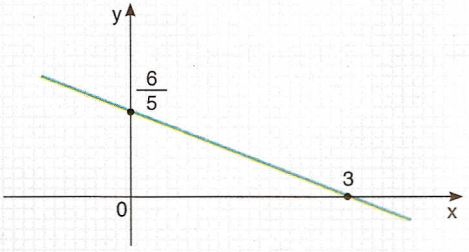
(sinal escolhido)

Assim, $3x + 4y - 12 > 0$ é a inequação que expressa a região assinalada.

Exemplo 15

A inequação $2x + 5y \leq 6$ pode ser resolvida graficamente tomando-se a equação s: $2x + 5y - 6 = 0$.

x	y
0	$\frac{6}{5}$
3	0

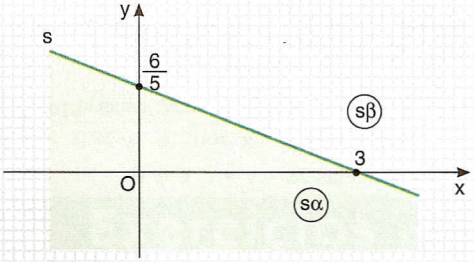


Novamente, na equação de *s*, devemos "testar" as coordenadas de um ponto fora de *s*.

Adotando a origem, vem:

$$E = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

O sinal da desigualdade coincide com o requerido pela inequação inicial; portanto, o ponto *O* e outros do mesmo semiplano preenchem a condição, e a região escolhida é a que está "abaixo" da reta *s*. Assim:



No caso, a reta *s* é marcada *continuamente* (veja o sinal ≤).

Embora esse tipo de inequação apresente *exclusivamente* solução gráfica, uma resposta algébrica também pode ser apresentada. No nosso caso, é possível apresentar:

"semiplano $s\alpha$ (incluindo *s*)"

Exemplo 16

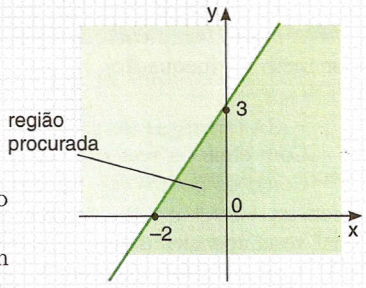
Seja o sistema de inequações simultâneas $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ 3x - 2y + 6 > 0 \end{cases}$ 2º quadrante

Adotando o mesmo processo:

$$E = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$$

Assim, a solução gráfica da inequação $3x - 2y + 6 > 0$ é o semiplano abaixo da reta.

Considerando também que as inequações $x < 0$ e $y > 0$ representam o segundo quadrante, a região interna ao triângulo é a solução do sistema.



Observação

Nos três exemplos apresentados foi possível, para facilitar os cálculos, utilizar a origem do ponto de verificação. Isso porque a origem não pertence a nenhuma das três retas delimitadoras de regiões. Caso apareça alguma reta que passe pela origem, devemos escolher outro ponto qualquer do plano.

Exercícios

58 Resolva graficamente as inequações:

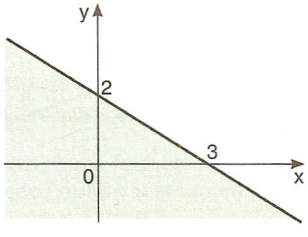
a) $x + 3y \geqslant 4$ b) $2x - 5y \leqslant 10$ c) $3x + 2y > 5$ d) $\frac{2x - 3}{4} < \frac{y - 1}{2}$

59 Determine o conjunto de pontos P(x, y) do plano cujas coordenadas, em cada caso, seguem a condição imposta:

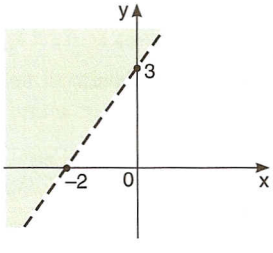
a) $\frac{5 - x}{3} - \frac{2 - y}{4} \leqslant 0$ b) $1 - x < 3 - y$

60 Em cada figura, determine a inequação que expressa a região representada:

a)



b)



61 Determine a área da região delimitada pelas retas de equações $x = 0$, $y = 0$ e $x + y - 6 = 0$.

62 Seja D a região do plano cujos pontos têm as coordenadas satisfazendo as condições $0 \leqslant x \leqslant 2$, $y \geqslant 2x$ e $y \leqslant 2x + 2$. Determine a área de D.

63 (FGV-SP) Considere a região H do plano cartesiano determinada pelas relações simultâneas:

$$2x + y \leqslant 8; \quad x \geqslant 0 \quad \text{e} \quad y \geqslant 0$$

Considere ainda o feixe de retas paralelas $2x - y = c$, $c \in \mathbb{R}$.

a) Represente graficamente a região H.

b) Obtenha a reta do feixe, com maior valor de c, que intercepte a região H.

64 (FGV-SP) No plano cartesiano:

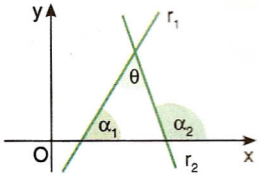
a) Represente graficamente os pontos (x, y) que satisfazem a relação $x + 2y \leqslant 6$.

b) Ache a área do polígono determinado pelas relações simultâneas:

$$x - y \geqslant 0; \quad 2x + y \leqslant 18; \quad x \leqslant 8 \quad \text{e} \quad y \geqslant 0$$

11 ○ Ângulos entre retas

Sejam duas retas concorrentes, r_1 e r_2, ambas oblíquas aos eixos coordenados e não perpendiculares entre si. Elas determinam dois pares de ângulos congruentes (por serem opostos pelo vértice). Dois desses ângulos são agudos e dois, obtusos; concentraremos nossa atenção no ângulo agudo θ indicado na figura.



Sendo α_1 e α_2 os ângulos formados pelas retas r_1 e r_2 com o eixo x no sentido positivo, temos $\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$, pois α_2 é ângulo externo do triângulo.

Daí, $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ e $\operatorname{tg}\theta = |\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)|$, pois θ é agudo e $\operatorname{tg}\theta > 0$.

Temos, então, $\operatorname{tg}\theta = \left|\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}\right|$.

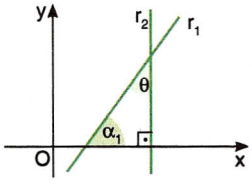
Como $\operatorname{tg}\alpha_1 = m_1$ e $\operatorname{tg}\alpha_2 = m_2$, podemos escrever:

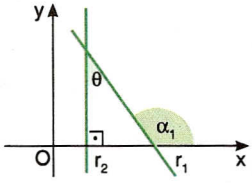
$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right|$$

Podem ocorrer três casos particulares:

- $r_1 \parallel r_2$; temos $m_1 = m_2$ e $\theta = 0°$.
- $r_1 \perp r_2$; temos $m_1 \cdot m_2 = -1$ e $\theta = 90°$.
- r_2 é vertical e r_1 é oblíqua aos eixos.

Neste último caso, há duas possibilidades:





Em ambos os casos:

$$\theta = \left|\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = |\operatorname{cotg}\alpha_1| = \left|\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}\right| \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_1}\right|$$

Exemplo 17

Seja θ o ângulo agudo formado entre as retas r: $y = 2x - 3$ e s: $y = -3x + 1$.

Os coeficientes angulares são $m_r = 2$ e $m_s = -3$; assim:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)}\right| = \left|\frac{2 + 3}{1 - 6}\right| = |-1| = 1$$

Como θ é *agudo* e $\operatorname{tg}\theta = 1$, vem: $\theta = 45°$.

Exercícios

65 São dadas as equações das retas r e s; em cada caso, determine $\operatorname{tg}\theta$, sendo θ ângulo agudo formado pelas retas:

a) r: $y = 5 - x$ e s: $y = 3x + 5$

b) r: $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ e s: $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$

c) r: $3x + 2y + 5 = 0$ e s: $4x - 5y + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$

66 Determine o ângulo agudo formado pelas retas:

a) $x = 5$ e $y = x - 2$ b) $y = x + 1$ e $x + y = 1$

67 Qual é o ângulo agudo formado entre a reta r, que passa por P(1, 2) e pela origem, e a reta s, que encontra r sobre o eixo das abscissas e passa por Q(3, –1)?

68 (UF-PI) Determine o ângulo agudo formado pelas retas $3x + y - 10 = 0$ e $-2x + y - 15 = 0$.

69 São dados os pontos P(1, 2), Q(4, 5) e R(–3, 6), vértices de um triângulo. Disponha em ordem crescente as medidas dos ângulos internos desse triângulo.

70 (ESPM-SP) Qual é a medida do maior ângulo, em radianos, formado pelas diagonais do quadrilátero ABCD?
Dados: A(5, 5); B(5, –4); C(2, –4); D(2, 2).

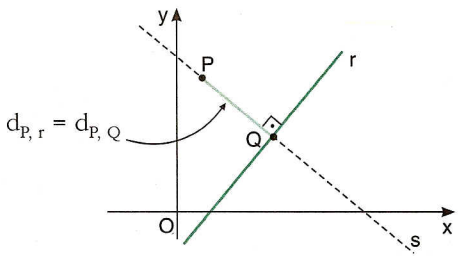
71 Determine a equação geral da reta que passa por (5, –2) e forma ângulo de 45° com a reta $y = -3x + 2$.

12 Distância entre ponto e reta

A busca da distância entre um ponto e uma reta é a primeira aplicação importante da perpendicularidade.

A distância entre um ponto e uma reta nada mais é que uma distância entre dois pontos: o ponto dado e o pé da perpendicular à reta dada, conduzida pelo ponto dado.

Assim, observe P e r na figura ao lado.



De posse da equação de r é possível encontrar a equação de s ⊥ r, s passando por P.

Interceptando r e s, obtemos Q; basta encontrar a distância entre P e Q, e o problema se resolve.

Adotando r: $ax + by + c = 0$ e $P(x_0, y_0)$ como a reta e o ponto em questão e seguindo o processo descrito acima, chegamos a $d_{P, r} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $d_{P, r} \geqslant 0$.

Exemplo 18

Para determinar a distância entre o ponto P(5, 3) e a reta r: $2x - 4y + 7 = 0$, basta substituir as coordenadas de P e os coeficientes da equação da reta na fórmula apresentada:

$$d_{P, r} = \frac{|2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

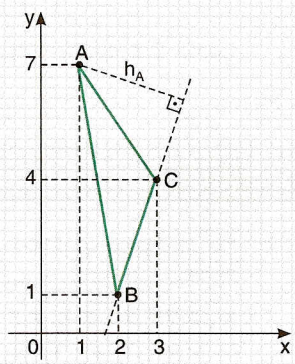
Exemplo 19

Seja o triângulo ABC, do qual queremos determinar a altura h_A, relativa ao lado $\overline{BC}$.

Sendo A(1, 7), B(2, 1) e C(3, 4), temos:

$$\overleftrightarrow{BC}: \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \overleftrightarrow{BC}: 3x - y - 5 = 0$$

$$h_A = d_{A, \overleftrightarrow{BC}} = \frac{|3 \cdot 1 - 7 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \Rightarrow h_A = \frac{9\sqrt{10}}{10}$$



72 Encontre a distância entre o ponto P e a reta r, em cada caso.

a) P(1, 2) e r: $3x + 4y - 1 = 0$

b) P(0, 3) e r: $y = 2x - 2$

c) P(7, 2) e r: $2x + 3y - 5 = 0$

d) P(–3, –2) e r: $4x - y - 7 = 0$

73 (PUC-SP) Determine a distância do ponto P(1, 1) à reta t, cuja equação é $x + y - 3 = 0$.

74 Determine a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, sendo A(–1, 2), B(3, 4) e C(–2, –3).

75 (UF-CE) Considere o triângulo cujos vértices são os pontos A(2, 0), B(0, 4) e C($2\sqrt{5}$, $4 + \sqrt{5}$). Determine a altura relativa do lado $\overline{AB}$.

76 Obtenha uma reta paralela a r: $3x - y - 2 = 0$ e distante 3 unidades do ponto A(1, 4).

77 (Cesgranrio-RJ, adaptado) O ponto A(–1, –2) é vértice de um triângulo eqüilátero ABC, cujo lado $\overline{BC}$ está sobre a reta de equação $x + 2y - 5 = 0$. Determine a medida ℓ do lado desse triângulo.

78 Determine a distância entre as retas de equações $y = 2x - 3$ e $y = 2x + 2$.

79 (Fuvest-SP) Seja r a reta que passa pelo ponto P(3, 2) e é perpendicular à reta s, de equação $y = -x + 1$. Qual é a distância entre o ponto A(3, 0) e a reta r?

80 (FGV-SP) No plano cartesiano, considere os pontos A(1, 3) e B(–5, 4). Considere também a reta r, de equação $2x + 3y = 7$.

a) Obtenha a equação da reta s, que é paralela a r e passa por A.

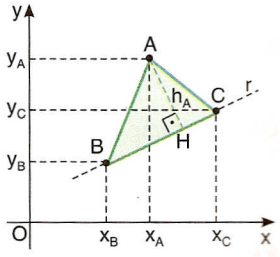
b) Obtenha a equação da reta t, que é perpendicular a r e passa por A.

c) Sendo P o ponto em que a reta r intercepta o eixo x, obtenha a distância entre P e B.

d) Obtenha a distância do ponto B à reta r.

13 ○ Área de um triângulo

Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos não alinhados do plano cartesiano. Para calcular a área do triângulo ABC, devemos fazer:



$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

Note que a base pode ser tomada como a distância entre os pontos B e C, e a altura correspondente será $h_A = d_{A, r}$. Para achar essa altura devemos inicialmente obter a equação da reta r, que passa por B e C.

Façamos $D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy_B + x_Cy + x_By_C - x_Cy_B - xy_C - x_By = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(y_B - y_C)}_{a}x + \underbrace{(x_C - x_B)}_{b}y + \underbrace{(x_By_C - x_Cy_B)}_{c} = 0 \ (*).$$

Assim, temos: $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot d_{BC} \cdot d_{A, r} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}} \cdot \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + (x_By_C - x_Cy_B)|}{\cancel{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}}$$

Notando a analogia entre a expressão que aparece em módulo e a assinalada anteriormente com (*), podemos deduzir finalmente:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|D|, \text{ sendo } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo 20

Para calcular a área do triângulo de vértices A(1, 3), B(2, 5) e C(–2, 4), iniciamos pelo cálculo do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 + 8 + 10 - 4 - 6 = 7$$

A seguir temos:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|7| = \frac{7}{2} \text{ unidades de área}$$

Exercícios

81 Determine, em cada caso, a área do triângulo de vértices:

a) (2, –4), (–3, 2) e (–1, –1)

b) (1, 1), (–17, 3) e (8, –5)

c) (12, 12), (4, 3) e (–3, 4)

82 (Puccamp-SP) Qual é a área do triângulo cujos vértices são a origem do sistema e os pontos de interseção da reta de equação $x + y - 2 = 0$ com os eixos coordenados?

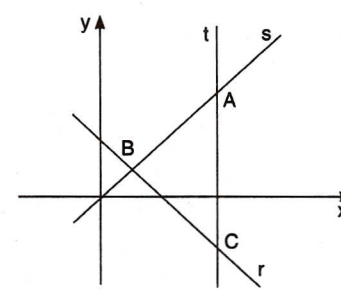
83 (Cesgranrio-RJ) As retas de equações $x = 2$, $y = x$ e $x + 2y = 12$ determinam um triângulo. Qual é a área desse triângulo?

84 (Unicamp-SP) Considere, no plano xy, as retas $y = 1$, $y = 2x - 5$ e $x - 2y + 5 = 0$.

a) Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo ABC formado por essas retas?

b) Qual é a área do triângulo ABC?

85 (Facs-BA) Considere, na figura, as retas r: $x + y = 2$; s: $y = x$, t: $x = 4$ e os pontos *A*, *B* e *C*. Calcule, em unidades de área, a área do triângulo ABC.



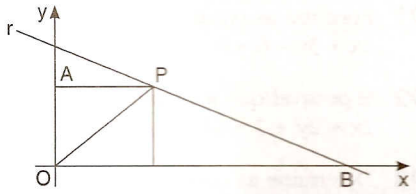
86 (UF-RN) Considere, no plano cartesiano, a reta de equação $3x - 4y = 12$. Sejam *P* e *Q*, respectivamente, os pontos de interseção dessa reta com os eixos das abscissas e das ordenadas. Utilizando esses dados, determine:

a) as coordenadas de *P* e *Q*.

b) um ponto R(a, b) sobre a reta de equação $2x - 5y = -4$, com $a \leq 0$, $b \geq 0$, de modo que o triângulo PQR tenha área máxima.

87 (UF-RS) O ponto A, de interseção das retas r e s, de equações $x - y - 4 = 0$ e $x + y + 2 = 0$, respectivamente, e os pontos B e C, de interseção das mesmas retas com o eixo x, são os vértices do triângulo ABC. Qual é a área desse triângulo?

88 (U. F. Ouro Preto-MG) Na figura ao lado O(0, 0), A(0, 5), B(10, 0) e P(a, b).



a) Determine a equação da reta r.

b) Determine as coordenadas a e b, de modo que a área do triângulo OPB seja igual a 15.

89 (Fuvest-SP) A hipotenusa de um triângulo retângulo está contida na reta r: $y = 5x - 13$, e um de seus catetos está contido na reta s: $y = x - 1$. Se o vértice onde está o ângulo reto é um ponto da forma (k, 5) sobre a reta s, determine:

a) todos os vértices do triângulo.

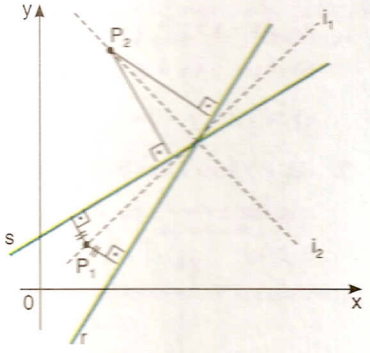
b) a área do triângulo.

90 Obtenha uma reta que passa por P(1, 2) e define com os eixos coordenados, no primeiro quadrante, um triângulo de área 5.

14 ○ Bissetrizes dos ângulos de duas retas

Outra aplicação direta da fórmula de distância de ponto a reta é a obtenção das bissetrizes dos ângulos formados entre duas retas concorrentes.

Sejam as retas concorrentes r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ e P(x, y) um ponto genérico de qualquer das bissetrizes i_1 e i_2, cujas equações queremos determinar. Como P é eqüidistante de r e s, temos:



$$d_{P,\,r} = d_{P,\,s} = \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$$

Essa igualdade representa as bissetrizes dos ângulos formados entre r e s.

Exemplo 21

Para encontrar as equações das bissetrizes dos ângulos entre r: $2x + 3y - 6 = 0$ e s: $6x + 4y - 5 = 0$, podemos escrever:

$$\frac{2x + 3y - 6}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \pm \frac{6x + 4y - 5}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2x + 3y - 6}{\sqrt{13}} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{6x + 4y - 5}{\sqrt{13}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 6y - 12 \pm (6x + 4y - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y - 12 + 6x + 4y - 5 = 0 \\ \text{ou} \\ 4x + 6y - 12 - 6x - 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 10y - 17 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

Assim, as equações das bissetrizes de r e s são:

$$i_1: 10x + 10y - 17 = 0 \quad \text{e} \quad i_2: 2x - 2y + 7 = 0$$

Como as bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são perpendiculares entre si, é aconselhável verificar a condição de perpendicularidade entre as bissetrizes encontradas; no caso, temos $m_1 = -1$, $m_2 = 1$ e $m_1 \cdot m_2 = -1$, o que comprova a perpendicularidade.

Exercícios

91 Encontre as equações das bissetrizes dos ângulos formados entre as retas de equações $3x - 2y + 1 = 0$ e $2x + 3y - 6 = 0$.

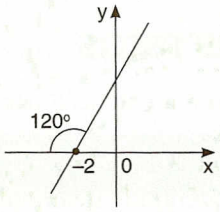
92 É possível que tenhamos como bissetrizes dos ângulos formados entre duas retas o par $2x + 4y - 5 = 0$ e $2x + 2y + 7 = 0$? Por quê?

93 Determine as coordenadas do incentro do triângulo ABC, sendo A(2, –3), B(4, –3) e C(2, 3). (Incentro é o ponto de interseção das bissetrizes internas de um triângulo.)

94 Dados A(0, 0), B(3, 4) e C(12, –5), calcule o comprimento da bissetriz interna $\overline{AP}$ do triângulo ABC.

Testes de vestibulares

1 (Unirio-RJ)



A equação geral da reta acima representada é:

a) $3x - \sqrt{3}\,y + 6 = 0$

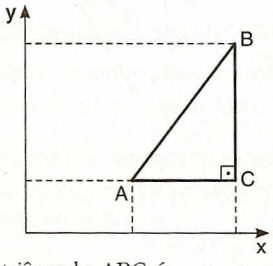
b) $3x + \sqrt{3}\,y + 6 = 0$

c) $\sqrt{3}\,x - y - 2 = 0$

d) $y = \sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$

2 (U. F. Ouro Preto-MG) A área r com coeficiente angular $m = \frac{3}{2}$ passa pelos pontos $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e B(2, k).



A área do triângulo ABC é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2}$

e) 2

3 (Unifor-CE) Se as retas de equações $y = -5x + 4$ e $y = 2x + 5m$ são concorrentes em um ponto do eixo das abscissas, então o valor de m é:

a) $-\frac{8}{25}$

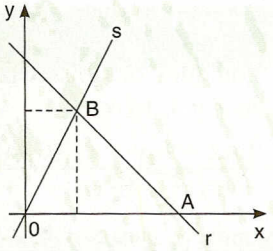
b) $-\frac{8}{5}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{4}{5}$

e) 1

4 (Fatec-SP) Na figura abaixo, a reta r tem equação $x + 3y - 6 = 0$, e a reta s passa pela origem e tem coeficiente angular $\frac{2}{3}$.



A área do triângulo OAB, em unidades de área, é igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

5 (UF-MG) A reta r passa pelo ponto (16, 11) e *não* intercepta a reta de equação $y = \frac{x}{2} - 5$.

Considerando-se os seguintes pontos, o *único* que pertence à reta r é:

a) (7, 6)

b) $\left(7, \frac{13}{2}\right)$

c) (7, 7)

d) $\left(7, \frac{15}{2}\right)$

6 (UF-PI) A reta que passa pelos pontos (1, 1) e (3, 0) intercepta o eixo y no ponto (0, b). A medida da área do triângulo formado pelos pontos (3, 0), (0, b) e a origem é:

a) $\frac{8}{3}$

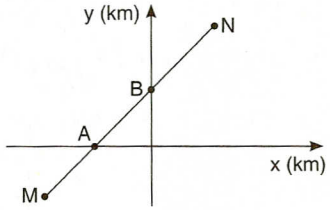
b) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{7}$

e) $\frac{9}{2}$

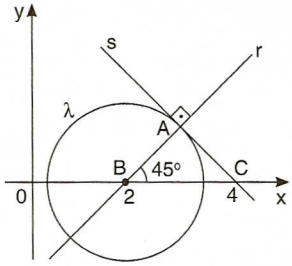
7 (Puccamp-SP) Na figura abaixo tem-se representada, em um sistema de eixos cartesianos ortogonais, a rota de uma aeronave de uma cidade M a uma cidade N, passando sobre as pequenas cidades A e B.



Se os quatro pontos pertencem à reta de equação $4x - 3y + 1200 = 0$, a distância entre as cidades A e B, em quilômetros, é de aproximadamente:

a) 50 c) 800 e) 8000
b) 500 d) 5000

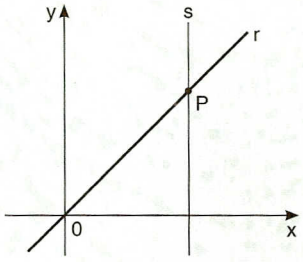
8 (UF-SE, adaptado)



Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) nas afirmações seguintes:

a) A equação a reta s é: $x + y - 4 = 0$.
b) O ponto médio do segmento $\overline{AC}$ é $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
c) A área do triângulo ABC é numericamente igual a 1.

9 (UFF-RJ) Na figura a seguir estão representadas as retas r e s.



Sabendo que a equação da reta s é $x = 3$ e que $d_{OP} = 5$, a equação de r é:

a) $y = \frac{3}{4}x$ c) $y = \frac{5}{3}x$ e) $y = 5x$
b) $y = \frac{4}{3}x$ d) $y = 3x$

10 (UF-SC) São dados, num sistema de coordenadas cartesianas, os pontos A(4, 1), B(1, 1), C(4, 5) e a reta r representada pela equação $x + y - 2 = 0$. Classifique em V (verdadeiro) ou F (falso) as afirmações seguintes:

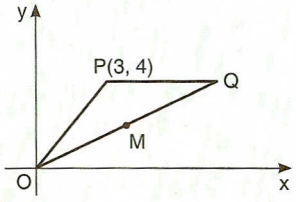
a) O ponto médio do lado $\overline{BC}$ é o ponto M de coordenadas $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.
b) A distância do ponto C à origem do sistema de coordenadas cartesianas é de 6 unidades.
c) A equação da reta que passa pelos pontos A e B é $y - 1 = 0$.
d) A reta s de equação $-5x + 5y - 13 = 0$ e a reta r são perpendiculares.
e) O ponto A pertence à reta r.

11 (UF-RN) Considere a região S dos pontos (x, y) do plano cartesiano tais que $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ e $|y| \leqslant \frac{1}{2}$. A área de S é igual a:

a) 1 u.a.
b) 2 u.a.
c) $2\sqrt{2}$ u.a.
d) $\sqrt{2}$ u.a.

u.a. = unidade de área

12 (UF-BA) No triângulo OPQ, representado na figura abaixo, OP = PQ e $\overline{PQ}$ é paralela ao eixo Ox.

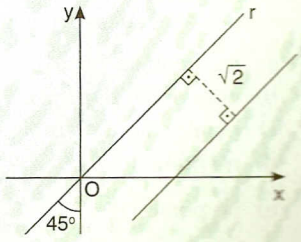


Nessas condições, classifique em V (verdadeiro) ou F (falso) as afirmativas:

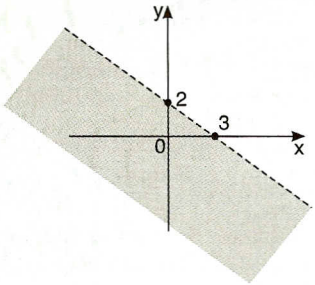
a) As coordenadas de Q são (8, 4).
b) O ponto médio de $\overline{OQ}$ é M(4, 2).
c) A reta paralela ao eixo Ox que passa por P é $x = 3$.
d) A reta perpendicular a OP que passa pelo ponto P tem por equação $3x + 4y - 25 = 0$.
e) A área do triângulo OPQ é igual a 32 u.a.

13 (Mackenzie-SP) Na figura, as retas r e s são paralelas. Se (x, y) é um ponto de s, então $x - y$ vale:

a) 2
b) $2\sqrt{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\sqrt{2}$
e) 1



14 (Unifor-CE) Analise o gráfico abaixo.

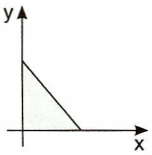


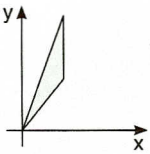
Nele, a região sombreada pode ser definida como o conjunto dos pares (x, y) de números reais tais que:

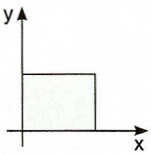
a) $2x + 3y - 6 > 0$
b) $2x + 3y + 6 < 0$
c) $3x + 2y - 6 > 0$
d) $3x + 2y + 6 < 0$
e) $2x + 3y - 6 < 0$

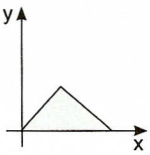
15 (FEI-SP) Assinale a alternativa cujo gráfico seja a representação do conjunto de restrições:

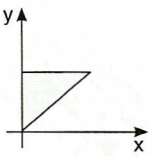
$$\begin{cases} x \leq 2y \\ y \leq 3x \\ x \leq 15 \end{cases}.$$

a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

16 (UF-SE) O ângulo agudo formado pelas retas de equações $x - y + 2 = 0$ e $5x + y - 20 = 0$ tem sua medida, em graus, compreendida entre:

a) 0° e 30°
b) 30° e 45°
c) 45° e 60°
d) 60° e 75°
e) 75° e 90°

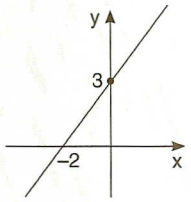
17 (PUC-RJ) A retas dadas pelas equações $x + 3y = 3$ e $2x + y = 1$ se interceptam:

a) em nenhum ponto.
b) num ponto da reta $x = 0$.
c) num ponto da reta $y = 0$.
d) no ponto (3, 0).
e) no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

18 (UF-SE) Na figura abaixo tem-se o gráfico da função do primeiro grau definida por $y = ax + b$.

O valor de $\frac{a}{b}$ é igual a:

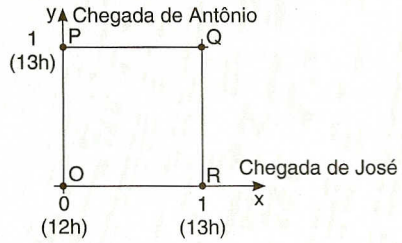
a) 3
b) 2
c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{1}{2}$



Para responder às questões 19 e 20, use o texto a seguir como base.

José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com a intenção de seguirem viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, aonde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho.

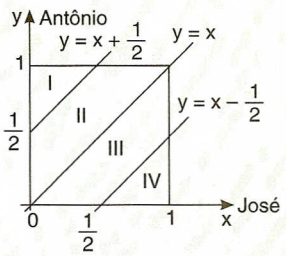
Chamando de x o horário de chegada de José e de y o horário de chegada de Antônio, e representando os pares (x, y) em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR abaixo indicada corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par (x, y):



19 (Enem-MEC) Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde:

a) à diagonal OQ.
b) à diagonal PR.
c) ao lado PQ.
d) ao lado QR.
e) ao lado OR.

20 (Enem-MEC) Segundo o combinado, para que José e Antônio viajem juntos, é necessário que $y - x \leq \frac{1}{2}$ ou que $x - y \leq \frac{1}{2}$.



De acordo com o gráfico e nas condições combinadas, as chances de José e Antônio viajarem juntos são de:

a) 0% c) 50% e) 100%
b) 25% d) 75%

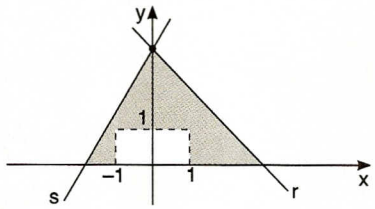
21 (UF-MG) Um triângulo isósceles ABC tem como vértices da base os pontos A(4, 0) e B(0, 6). O vértice C está sobre a reta $y = x - 4$.
Assim sendo, a inclinação da reta que passa pelo vértices B e C é:

a) $\frac{7}{17}$ b) $\frac{10}{23}$ c) $\frac{8}{20}$ d) $\frac{12}{25}$

22 (PUC-RJ) A área delimitada pelos eixos $x = 0$, $y = 0$ e pelas duas retas $x + y = 1$ e $2x + y = 4$ é:

a) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{3}$ e) 3
b) 2 d) $\frac{7}{2}$

23 (U. F. Juiz de Fora-MG) Sejam r e s as retas cujas equações são, respectivamente, $y = -x + 3$ e $y = \frac{3}{2}x + 3$. A área sombreada na figura abaixo, em unidades de área, é:



a) 5,5 b) 3,5 c) 11 d) 7

24 (UF-PI) A medida do ângulo agudo formado pelas retas $3x + y - 10 = 0$ e $-2x + y - 15 = 0$ é:

a) 15° c) 45° e) 75°
b) 30° d) 60°

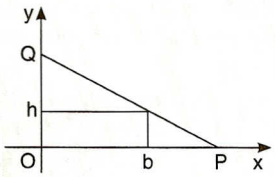
25 (Ucsal-BA) Seja o feixe de retas paralelas de equação $y = 2x + k$, com $k \in \mathbb{R}$. Uma das retas do feixe intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 3) e outra contém o ponto (2, 1). Qual a distância entre os pontos em que essas duas retas cortam o eixo das abscissas?

a) $-\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ e) 3
b) $-\frac{1}{2}$ d) 2

26 (U. F. Juiz de Fora-MG) Consideremos a reta $y = -2x + 2$. Se $P_0 = (x_0, y_0)$ é o ponto dessa reta mais próximo da origem dos eixos coordenados, então podemos afirmar que:

a) $x_0 = \frac{2}{5}$ c) $x_0^2 + y_0^2 = \frac{2}{5}$
b) $y_0 = \frac{4}{5}$ d) $x_0^2 + y_0^2 = \frac{4}{5}$

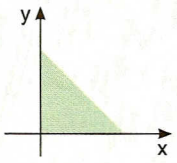
27 (UF-RS) Considere o retângulo de base b e altura h inscrito no triângulo OPQ.



Se $d = OP - b$, uma equação cartesiana da reta que passa por P e Q é:

a) $y = \frac{h}{b}x$ d) $y = \frac{h}{d}(d - x)$
b) $y = \frac{h}{d}x$ e) $y = \frac{h}{d}(b + d - x)$
c) $y = \frac{h}{b}(d - x)$

28 (FEI-SP) Assinale a alternativa cujo conjunto de restrições seja representado pelo gráfico:



a) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x - y \geqslant 4 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y > 0 \\ x + y \geqslant 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \geqslant 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \leqslant 0 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases}$

29 (Covest-PE) Qual a área da região, no plano cartesiano, determinada pelas seguintes desigualdades:

$$y \geqslant 0$$
$$x + y \leqslant 10$$
$$3x - y \geqslant 6?$$

a) 24 c) 31 e) 60
b) 30 d) 35

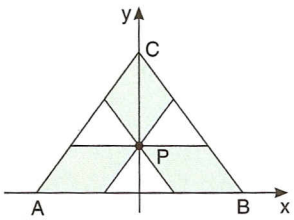
Desafios

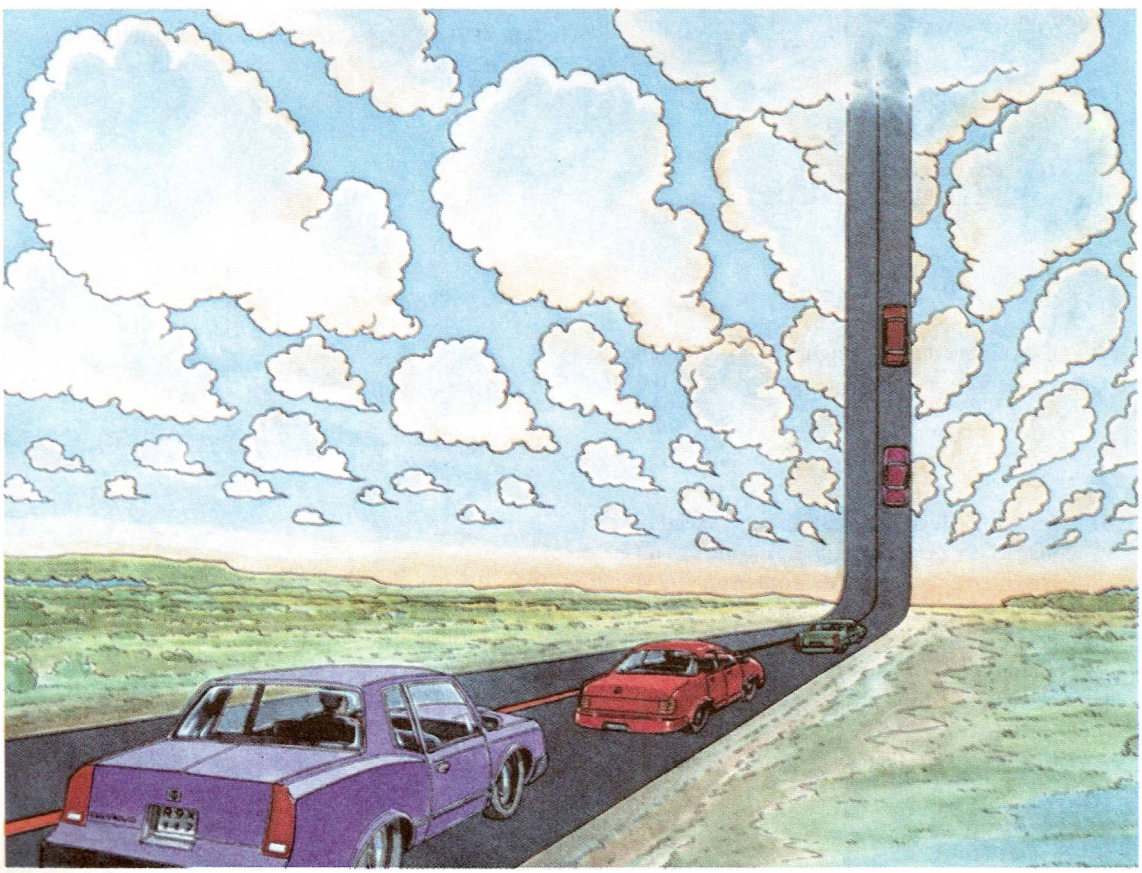
1 (UF-RJ) Sejam O(0, 0), P(5, 2) e P′(2, 5).
Girando em torno de O, no sentido trigonométrico (anti-horário), o segmento OP de um certo ângulo θ, o ponto P transforma-se no ponto P'.
Determine cos θ.

2 (Vunesp-SP) Seja r uma reta que passa pelo ponto (0, –2). Por dois pontos do eixo das abscissas, distantes uma unidade um do outro, traçam-se perpendiculares a esse eixo. Se estas perpendiculares interceptam r em dois pontos do primeiro quadrante cuja distância é $\sqrt{10}$ unidades, estabeleça a equação de r.

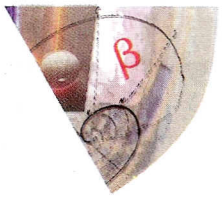
3 (Fuvest-SP) Considere os pontos A(–2, 0), B(2, 0), C(0, 3) e P(0, α), com $0 < \alpha < 3$. Pelo ponto P, traçamos as três retas paralelas aos lados do triângulo ABC.

a) Determine, em função de α, a área da região sombreada na figura.
b) Para que valor de α essa área é máxima?





Bruno Budrovic/Stock Photos



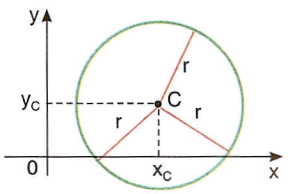
36 A CIRCUNFERÊNCIA

1 A equação reduzida da circunferência

Uma circunferência com centro $C(x_c, y_c)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos P(x, y) do plano que distam r de C:

$$d_{PC} = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r$$

Elevando membro a membro ao quadrado, temos:



$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, chamada *equação reduzida da circunferência*, em que:

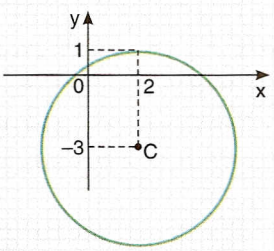
- x_C e y_C são as coordenadas do centro C da circunferência;
- r é o raio da circunferência;
- x e y são as coordenadas do ponto genérico P — um ponto que pode ocupar o lugar de qualquer ponto da circunferência, sempre distando r de C.

Exemplo 1

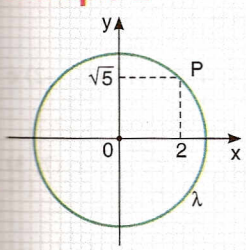
A equação $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ é a equação reduzida da circunferência de centro C(2, –3) e raio 4.

Note, por exemplo, que o ponto P(2, 1) pertence à circunferência, pois $(2 - 2)^2 + (1 + 3)^2 = 16$.

Por outro lado, a origem não é ponto da circunferência, pois $(0 - 2)^2 + (0 + 3)^2 \neq 16$.



Exemplo 2



A circunferência mostrada tem centro na origem: $x_C = y_C = 0$ e equação (provisória) $x^2 + y^2 = r^2$.

Como ela passa por P(2, $\sqrt{5}$), temos:

$$2^2 + \sqrt{5}^2 = r^2 \Rightarrow r = 3$$

λ: $x^2 + y^2 = 9$ é a equação reduzida da circunferência.

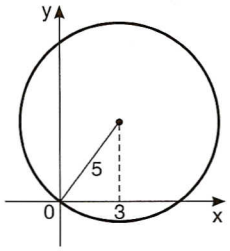
Exercícios

1 Encontre, em cada caso, a equação reduzida da circunferência de centro C e raio r:

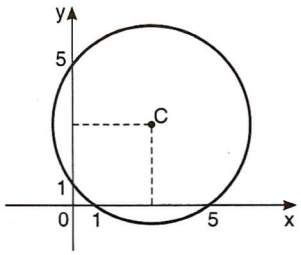
a) C(–1, 2) e r = 1 b) C(–2, –3) e r = 4 c) C(0, 0) e r = 11 d) C(2, 1) e r = $\sqrt{2}$

2 Escreva a equação reduzida da circunferência em cada caso.

a)



b)



3 Obtenha a equação reduzida da circunferência que tem um diâmetro com extremidades (1, 3) e (5, 7). Essa circunferência passa pela origem?

4 (FEI-SP) Determine a equação da circunferência com centro no ponto C(2, 1) e que passa pelo ponto A(1, 1).

5 Encontre a equação reduzida da circunferência que passa pela origem e possui centro (–3, 2).

6 (UF-PI) Uma circunferência no segundo quadrante, tangente a ambos os eixos, toca o eixo y no ponto (0, 3). Qual é o centro dessa circunferência?

7 A circunferência λ encontra-se no 3º quadrante e, tendo raio 3, tangencia os eixos coordenados. Qual é sua equação reduzida?

8 Represente graficamente, em cada caso, a circunferência de equação reduzida.

a) $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

b) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 6$

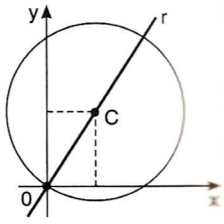
A seguir, forneça os pontos em que a circunferência corta os eixos coordenados.

9 É única a circunferência que passa pelos pontos (2, 5), (1, 6) e (–3, 0). Qual é sua equação reduzida?

10 (U. F. Ouro Preto-MG) Considere a circunferência de centro C(3, 4), passando pela origem, e a reta r passando pelos pontos citados, conforme a figura.

a) Determine a equação da circunferência.

b) Determine a equação da reta r.



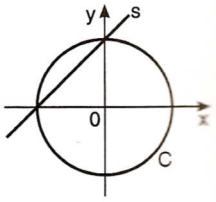
11 Dada a circunferência $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 20$, ache o ponto diametralmente oposto a (–1, 1).

12 A circunferência de centro (2, 1) e raio $\sqrt{6}$ passa por (2, k); determine os valores de k.

13 Determine o valor de k, sabendo que o ponto (5, k) pertence à circunferência que tem centro (1, –2) e passa por (k, 1).

14 O centro de uma circunferência tem coordenadas iguais. Sabendo que os pontos $(3 + \sqrt{15}, 4)$ e (7, 3) pertencem à circunferência, determine sua equação.

15 (UFF-RJ) Na figura estão representadas a reta s e a circunferência C, com centro em (0, 0) e raio 3. Pelo ponto P da reta s, traça-se a reta r, perpendicular a s. Determine a equação de r, sabendo que P tem abscissa –1.



2 ○ A equação geral da circunferência

Retomemos a forma reduzida da equação de uma circunferência $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$ e desenvolvamos os quadrados. Agrupando os termos convenientemente, temos:

$$x^2 - 2xx_C + x_C^2 + y^2 - 2yy_C + y_C^2 = r^2 \quad \text{e}$$

$$x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + (x_C^2 + y_C^2 - r^2) = 0$$

Essa expressão é conhecida como *forma geral da equação da circunferência*, ou *equação geral da circunferência* com centro (x_C, y_C) e raio r.

Por exemplo, a circunferência com centro em $(2, -1)$ e raio 5 tem equação reduzida $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$, que pode ser escrita como $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ na forma geral.

Completando os quadrados

Inversamente, para sabermos qual é a circunferência representada pela equação $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$ (ou mesmo se a equação representa, de fato, uma circunferência), utilizamos um processo prático que consiste em completar os quadrados. Passaremos agora a descrever esse processo.

Agrupando os termos em x e os termos em y, e isolando o termo livre:

$$x^2 - 8x\_\_\_\_ + y^2 - 6y\_\_\_\_ = -24,$$

podemos notar que no primeiro membro "faltam" dois números para completar quadrados de binômios; esses números seriam 16 e 9:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = -24 + 16 + 9.$$

Daí, $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$, equação que representa, de fato, uma circunferência, a de centro $(4, 3)$ e raio 1.

Analisando os coeficientes

Nem sempre, porém, uma equação da forma $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, com coeficientes reais, representa uma circunferência.

Existe um método alternativo à completação dos quadrados; trata-se da análise dos coeficientes da equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, sobre os quais recairão certas condições para que a equação possa representar, de fato, uma circunferência.

Inicialmente, dividamos a equação acima por $A \neq 0$:

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Comparando-a com a anterior $x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + (x_C^2 + y_C^2 - r^2) = 0$, obtemos as relações:

1ª) $\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow A = B \neq 0$

2ª) $\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow C = 0$ (não pode haver termo em xy!)

3ª) $\frac{D}{A} = -2x_C \Rightarrow x_C = \frac{-D}{2A}$

4ª) $\frac{E}{A} = -2y_C \Rightarrow y_C = \frac{-E}{2A}$

5ª) $\frac{F}{A} = x_C^2 + y_C^2 - r^2 \Rightarrow r^2 = x_C^2 + y_C^2 - \frac{F}{A} \Rightarrow r^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{4AF}{4A^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$, com $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

É bom lembrar que *todas* as relações devem ser satisfeitas!

Exemplo 3

Para averiguar se a equação $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 9 = 0$ representa alguma circunferência (e, em caso afirmativo, *qual* circunferência), devemos estudar as condições:

1ª) $A = B = 1 \neq 0$

2ª) $C = 0$ (não há termo xy)

3ª) $x_C = \frac{-D}{2A} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 1} = 6$

4ª) $y_C = \frac{-E}{2A} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

} centro C(6, 2)

5ª) $r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}} = \sqrt{\frac{(-12)^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 1(-9)}{4 \cdot 1^2}} = \sqrt{\frac{196}{4}} = 7$

A equação $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 9 = 0$ representa, portanto, uma circunferência, a de centro (6, 2) e raio 7, de equação reduzida $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 7^2$.

De fato, ao completar os quadrados teríamos:

$$x^2 - 12x + \underbrace{36}_{\left(\frac{12}{2}\right)^2} + y^2 - 4y + \underbrace{4}_{\left(\frac{4}{2}\right)^2} = 9 + \underline{36} + \underline{4},$$

que resulta na equação acima.

Exercícios

16 Verifique se cada uma das equações abaixo representa, ou não, uma circunferência. Em caso afirmativo, forneça o centro e o raio da circunferência representada.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 26 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$

d) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 + 25 = 0$

e) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 - 25 = 0$

f) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 + 6x = 0$

g) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 0$

17 Determine, em cada caso, o centro e o raio da circunferência.

a) $x^2 + y^2 - 10x - 23 = 0$

b) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 2$

c) $x^2 + y^2 - 12x + 6y - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 8x - 2 = 0$

18 (FEI-SP) Qual é o centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2(x - y) + 1$?

19 Qual é a equação geral da circunferência, centrada em (–2, 4), que passa pela origem?

20 Forneça a equação geral da circunferência que contém os pontos (2, 14), (8, 10) e (7, 9).

21 Encontre a equação reduzida da reta que forma ângulo de 30° com o eixo das abscissas, no seu sentido positivo, e passa pelo centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y - k = 0$, com $k > -10$.

22 (Vunesp-SP) Considere o quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$. Determine as equações das retas que contêm as diagonais do quadrado.

23 Entre os pontos da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 14x + 14y + 97 = 0$, qual possui abscissa máxima?

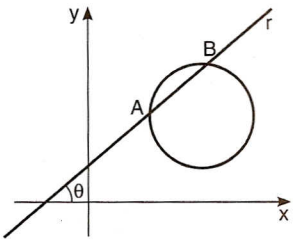
24 (Unicamp-SP) Uma reta intercepta nos pontos A(3, 4) e B(–4, 3) uma circunferência centrada na origem.

a) Qual é o raio dessa circunferência?

b) Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos *A*, *B* e seus simétricos em relação à origem.

25 (FGV-SP) Determine a equação da reta que passa pelo centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ e é paralela à reta de equação $2x + 3y = 0$.

26 (UF-MG) Na figura, a reta *r* determina uma corda $\overline{AB}$, de comprimento $4\sqrt{6}$, na circunferência de equação $x^2 - 18x + y^2 - 16y + 96 = 0$. Além disso, a reta *r* forma com o eixo *x* um ângulo θ, de tangente igual a $\frac{3}{4}$, e intercepta o eixo *y* em um ponto de ordenada positiva. Determine a equação de *r*.



27 (Fuvest-SP) Um quadrado está inscrito numa circunferência de centro (1, 2). Um dos seus vértices é o ponto (–3, –1). Determine os outros três vértices do quadrado.

3 ○ Posições relativas entre ponto e circunferência

Vimos que todos os pontos de uma circunferência distam igualmente do centro e, mais, mantêm distância igual ao raio. Ora, dada uma circunferência de centro *C* e raio *r*, se outro ponto não distar de *C* exatamente o raio *r*, ele não pertencerá à circunferência, ou seja, será interno ou externo a ela.

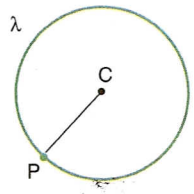
Para uma circunferência de centro $C(x_C, y_C)$ e raio *r* e um ponto *P* qualquer, compararemos d_{PC} com *r*.

Há três casos possíveis:

- **1º** Se $d_{PC} = r$, então *P* pertence à circunferência.
- **2º** Se $d_{PC} > r$, então *P* é externo à circunferência.
- **3º** Se $d_{PC} < r$, então *P* é interno à circunferência.

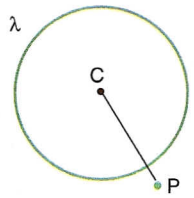
Veja as figuras correspondentes:

1º caso



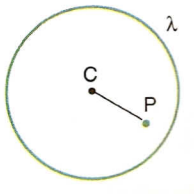
$d_{PC} = r \Rightarrow P \in \lambda$

2º caso



$d_{PC} > r \Rightarrow P$ é externo a λ

3º caso



$d_{PC} < r \Rightarrow P$ é interno a λ

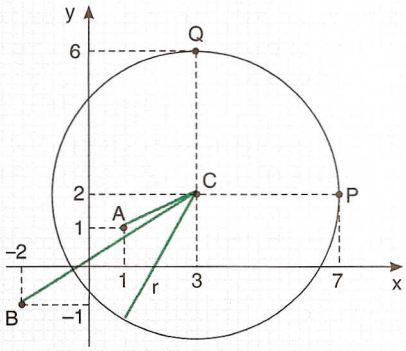
Exemplo 4

Tomemos a circunferência λ de centro C(3, 2) e raio r = 4. Sua equação reduzida é $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

Ela contém o ponto P(7, 2), pois $(7 - 3)^2 + (2 - 2)^2 = 16$; o mesmo ocorre com o ponto Q(3, 6).

Já os pontos A(1, 1) e B(–2, –1) não pertencem à circunferência, pois:

- para *A*: $(1 - 3)^2 + (1 - 2)^2 = 5 < 16$
- para *B*: $(-2 - 3)^2 + (-1 - 2)^2 = 34 > 16$



Observe, comparando as distâncias com o raio:

$$d_{A, C} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5} < 4 = r$$

$$d_{B, C} = \sqrt{(3 + 2)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{34} > 4 = r$$

Assim, temos:

- $P \in \lambda$: $d_{P, C} = 4$
- *A* é interno a λ: $d_{A, C} < 4$
- *B* é externo a λ: $d_{B, C} > 4$

Exemplo 5

Para a circunferência λ, de equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$, e o ponto P(1, 6), podemos fazer:

$$1^2 + 6^2 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 6 - 4 = 7 > 0$$

e concluir que o ponto *P* é externo a λ.

Já o ponto Q(1, 5) pertence à circunferência, pois:

$$1^2 + 5^2 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 5 - 4 = 0$$

e o ponto R(2, 3) é interno pois:

$$2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 4 = -7 < 0$$

Resumindo, dados um ponto P(x, y) e a equação geral $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, com todas as condições para que ela represente uma circunferência satisfeitas, basta substituirmos na equação as coordenadas do ponto dado e obtermos o valor *M* da expressão do 1º membro da equação.

- Se $M = 0$, então *P* é ponto da circunferência.
- Se $M < 0$, então *P* é interno à circunferência.
- Se $M > 0$, então *P* é externo à circunferência.

Exercícios

28 Em relação à circunferência λ, de equação $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$, dê a posição dos pontos A(5, 4); $B\left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$; $C(0, 4 + \sqrt{5})$; D(3, 3) e E(–1, –1).

29 Em relação à circunferência λ, de equação $x^2 + y^2 + 10(x - y + 4) = 0$, dê a posição dos pontos A(–4, 4); B(–5, 5); C(–7, 0); D(–7, 6) e E(–6, 8).

30 Dadas as circunferências de equações λ_1: $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$ e λ_2: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, dê a posição do centro de cada uma delas em relação à outra.

31 Quais são os valores de *p* para os quais os pontos de coordenadas (4, p) são exteriores à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$?

32 Pelo ponto D(–1, –2), conduza uma circunferência λ de tal modo que o ponto diametralmente oposto a *D* seja (3, 2). A seguir, dê a posição relativa entre $P(1 + 2\sqrt{2}, 0)$ e λ.

33 Uma circunferência, no primeiro quadrante, tangencia os dois eixos coordenados.

a) Qual é a posição relativa da origem em relação a ela?

b) Qual é a posição relativa do ponto P(k, k) em relação à circunferência, se o seu raio mede $\frac{k}{2}$?

4 ○ Inequações do 2º grau com duas incógnitas

A principal conseqüência da teoria que acabamos de ver é um método para resolver inequações do 2º grau da forma:

$$f(x, y) > 0 \quad \text{ou} \quad f(x, y) < 0,$$

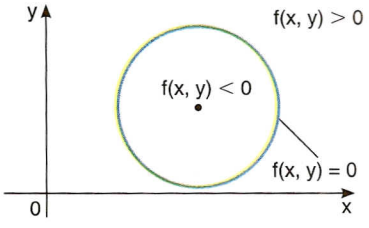
em que $f(x, y) = 0$ é a equação de uma circunferência com coeficiente de x^2 positivo.

Dada a circunferência λ de equação $f(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$, o plano cartesiano fica dividido em três subconjuntos:

a) subconjunto dos pontos (x, y) exteriores a λ, que é a solução para $f(x, y) > 0$;

b) subconjunto dos pontos (x, y) pertencentes a λ, que é a solução para $f(x, y) = 0$;

c) subconjunto dos pontos (x, y) interiores a λ, que é a solução para $f(x, y) < 0$.



Exemplo 6

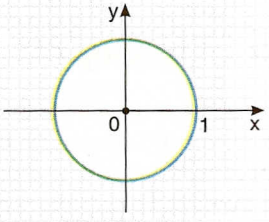
Como resolver a inequação $x^2 + y^2 \leq 1$?

Temos:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \text{ e } f(x, y) = 0$$

é a equação da circunferência λ de centro C(0, 0) e raio r = 1.

O conjunto dos pontos que tornam $f(x, y) \leq 0$ é o conjunto dos pontos de λ reunido com o dos pontos interiores a λ (círculo).



Exemplo 7

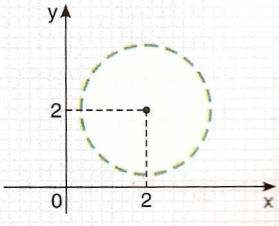
Qual é a solução da inequação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 < 0$?

Temos:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - 3$$

e $f(x, y) = 0$ é a equação da circunferência λ de centro C(2, 2) e raio $r = \sqrt{3}$.

O conjunto dos pontos que tornam $f(x, y) < 0$ é o conjunto dos pontos interiores a λ (círculo aberto ou disco aberto).



Exemplo 8

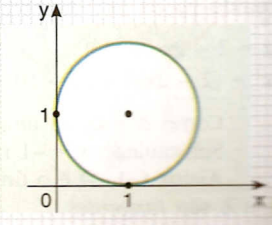
Que pontos satisfazem a condição $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \geq 0$?

Temos:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1$$

e $f(x, y) = 0$ representa uma circunferência λ de centro C(1, 1) e raio r = 1.

O conjunto solução de $f(x, y) \geq 0$ é o plano cartesiano menos o conjunto dos pontos interiores a λ.



Exercícios

34 Resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 + y^2 \leq 16$

b) $x^2 + y^2 \geq 9$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 < 0$

d) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 > 0$

35 Calcule a área do círculo que é a solução de $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 \leq 0$.

36 Resolva o sistema de inequações: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$

37 Que pontos satisfazem o sistema abaixo?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ (x + 1)^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

38 Qual é a representação gráfica de $x^2 + y^2 > 9$ ou $x^2 + y^2 \leq 25$ no plano cartesiano?

39 Ache a região do plano, de pontos P, cujas coordenadas (x, y) satisfaçam as relações $x + y \leq 3$ e $x^2 + y^2 \leq 81$. Faça o gráfico da solução.

40 Resolva o sistema de inequações: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$

41 Resolva o sistema de inequações: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y + 2 > 0 \end{cases}$

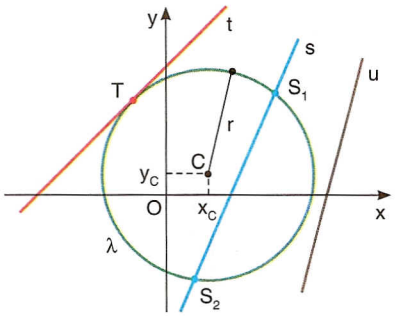
42 Dados os conjuntos $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $B = \{(x, y) \mid x - y \leq k\}$, determine k para que A seja subconjunto de B.

5 Posições relativas entre reta e circunferência

Seja uma circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$ e raio r. Existem, no plano, retas que cortam a circunferência em dois pontos, retas que tocam a circunferência em apenas um ponto e outras que não interceptam a circunferência em ponto algum.

Essas retas são chamadas, respectivamente: secantes, tangentes e externas à circunferência.

Na figura:



- $u \cap \lambda = \varnothing$ e u é externa à circunferência;
- $t \cap \lambda = \{T\}$ e t é tangente à circunferência;
- $s \cap \lambda = \{S_1, S_2\}$ e s é secante à circunferência.

Exemplo 9

Examinaremos a posição relativa entre a reta r: $2x + y - 2 = 0$ e a circunferência λ: $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 5$, procurando as eventuais interseções entre as duas. Isolando y na equação da reta e substituindo na da circunferência, teremos:

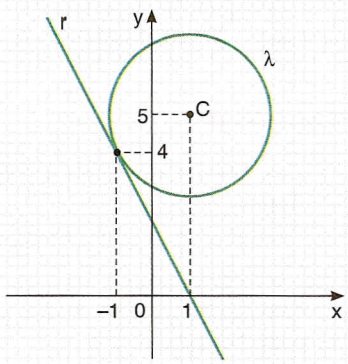
$y = 2 - 2x$ e

$x^2 + (2 - 2x)^2 - 2x - 10 \cdot (2 - 2x) + 21 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

Como $\Delta = 0$, há uma única raiz real, que é -1.

Substituindo $x = -1$ na equação da reta, obtemos $y = 4$.

Assim, $(-1, 4)$ é o único ponto de contato entre r e λ, ou seja, r e λ são *tangentes*.



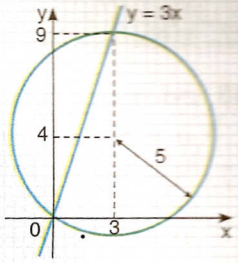
Exemplo 10

Na busca da posição relativa entre a reta r: $3x - y = 0$ e a circunferência λ: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$, procedemos da mesma maneira.

$3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow (x - 3)^2 + (3x - 4)^2 = 25 \Rightarrow 10x^2 - 30x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x - 3) = 0$ (2 raízes reais) $\Rightarrow$ $x = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $x = 3 \Rightarrow y = 9$

Assim, há dois pontos de interseção ((0, 0) e (3, 9)) entre a reta e a circunferência e elas são ditas *secantes*.



Exemplo 11

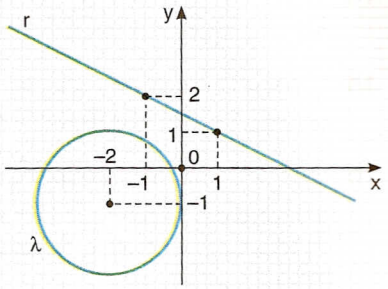
Para determinar os pontos de interseção entre a reta r: $x + 2y - 3 = 0$ e a circunferência λ: $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$, fazemos:

$x = 3 - 2y \Rightarrow (3 - 2y)^2 + y^2 + 4 \cdot (3 - 2y) + 2y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y^2 - 18y + 21 = 0$

Como o discriminante é negativo ($\Delta = -96$), a equação não possui raízes reais.

Assim, não há contato entre a reta e a circunferência, ou seja, a reta é *externa* à circunferência.



Resumo

Se substituirmos o valor de uma das variáveis (isolada na equação da reta) na equação da circunferência, obteremos com certeza uma equação do 2º grau (na outra variável).

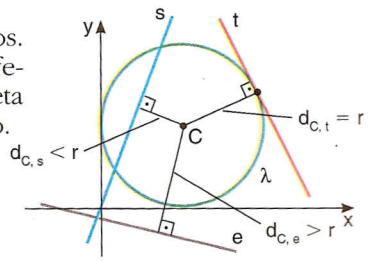
Calculando o discriminante da equação obtida, poderemos ter:

- *1º caso:* $\Delta > 0 \Rightarrow$ a reta e a circunferência são secantes (há dois pontos de interseção).
- *2º caso:* $\Delta = 0 \Rightarrow$ a reta e a circunferência são tangentes (há um único ponto de interseção).
- *3º caso:* $\Delta < 0 \Rightarrow$ a reta e a circunferência são exteriores (não há ponto de interseção).

Método alternativo

Existe outro processo para a obtenção dos mesmos resultados. Consiste este método em, conhecidos o centro e o raio da circunferência, bem como a equação da reta, calcular a distância entre a reta e o centro da circunferência, comparando-a, a seguir, com o raio.

Observemos a figura:

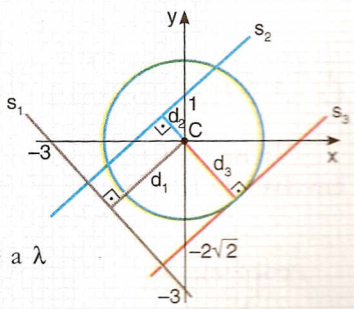


- $d_{C,s} < r \Leftrightarrow s$ é secante a λ.
- $d_{C,t} = r \Leftrightarrow t$ é tangente a λ.
- $d_{C,e} > r \Leftrightarrow e$ é externa a λ.

Exemplo 12

Fixemos a circunferência λ, de equação $x^2 + y^2 = 4$, e tomemos as retas s_1: $x + y + 3 = 0$, s_2: $x - y + 1 = 0$ e s_3: $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 4 = 0$.

Lembrando que $r = 2$ e $C(0, 0)$, fazemos:



- $d_1 = d_{C,s_1} = \dfrac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r \Rightarrow$

  $\Rightarrow s_1$ é externa a λ

- $d_2 = d_{C,s_2} = \dfrac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 2 = r \Rightarrow s_2$ é secante a λ

- $d_3 = d_{C,s_3} = \dfrac{|\sqrt{2} \cdot 0 - \sqrt{2} \cdot 0 - 4|}{\sqrt{\sqrt{2}^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \dfrac{4}{2} = 2 = r \Rightarrow s_3$ é tangente a λ

Exercícios

43 Determine a posição relativa entre reta e circunferência em cada caso.

a) r: $2x - y - 1 = 0$; λ: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

b) r: $3x + y - 3 = 0$; λ: $x^2 + y^2 - 2y = 0$

c) r: $6x - y + 7 = 0$; λ: $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 16 = 0$

d) r: $y + 1 = 0$; λ: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$

e) r: $x + 2 = 0$; λ: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

44 Determine o comprimento da corda determinada pela reta r: $2x + y - 5 = 0$ na circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

45 (UF-BA) Determine o comprimento da corda determinada pela interseção da reta de equação $x + y - 1 = 0$ com a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$.

46 (FGV-SP) Uma circunferência tem equação dada por $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

a) Obtenha o centro e o raio da circunferência.

b) Verifique se a reta de equação $3x + 4y + 1 + 5\sqrt{2} = 0$ é secante, tangente ou exterior à circunferência.

47 Obtenha a interseção entre $x + 2y - 3 = 0$ e $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

48 Calcule os valores de k para que a circunferência $x^2 + y^2 + 5x + 4y + k = 0$ determine no eixo das abscissas uma corda de comprimento 3.

49 Pelo ponto P(–3, 4), conduza uma circunferência λ de tal modo que o ponto diametralmente oposto a P seja (1, 2).
Determine as posições relativas entre Q(2, 5) e λ, e entre r: $2x - 3y - 1 = 0$ e λ.

50 (UFF-RJ) Considere a circunferência C, de equação $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, e a reta r que contém a origem e o centro dessa circunferência.
Encontre a equação de uma reta que seja perpendicular a r e tangente a C.

51 (U. F. Viçosa-MG) Sabendo que o ponto (4, 2) é o ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x - 3)^2 + y^2 = 25$, determine:

a) a equação da reta que contém A e B.

b) as coordenadas dos pontos A e B.

c) a distância entre A e B.

52 (Fuvest-SP) Considere as circunferências que passam pelos pontos (0, 0) e (2, 0), e que são tangentes à reta $y = x + 2$.

a) Determine as coordenadas dos centros dessas circunferências.

b) Determine os raios dessas circunferências.

6 ○ Problemas de tangência

Vamos representar nesta seção, por meio de exemplos, dois problemas típicos de tangência, envolvendo retas e circunferências.

Problema 1

A uma circunferência dada, conduzir as tangentes numa dada direção.

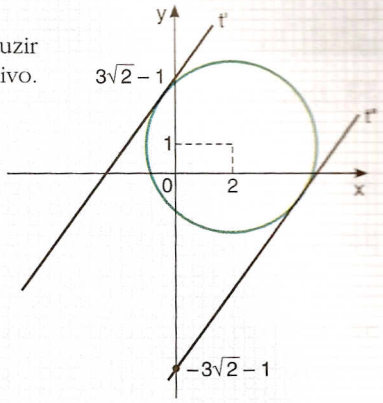
Exemplo 13

À circunferência de equação λ: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ vamos conduzir as tangentes que formam 45° com o eixo das abscissas, no sentido positivo.

Inicialmente vamos obter o centro e o raio de λ:

$$\left.\begin{array}{l} x_C = \dfrac{-D}{2A} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2 \\ y_C = \dfrac{-E}{2A} = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow C(2, 1)$$

$$r = \sqrt{\frac{(-4)^2 + (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}{4 \cdot 1^2}} = \frac{6}{2} = 3$$



Como as tangentes t formam 45° com o eixo das abscissas, elas possuem $m_t = 1$; além disso, distam r = 3 do centro (2, 1). Temos, então, t: $y = x + c \Rightarrow$ t: $x - y + c = 0$. Daí,

$$d_{C,\,t} = \frac{|1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow |c + 1| = 3\sqrt{2} \Rightarrow c + 1 = \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow c = -1 \pm 3\sqrt{2}$$

Assim, t: $x - y + (-1 \pm 3\sqrt{2}) = 0$

Exemplo 14

Vejamos como obter as equações das tangentes à circunferência λ: $x^2 + (y - 3)^2 = 36$, que sejam paralelas à reta de equação r: $3x - y + 1 = 0$.

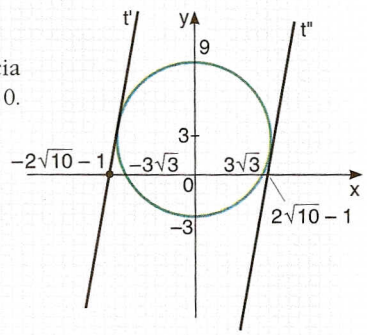
Podemos fazer t: $3x - y + c = 0$ e igualar $d_{r,\,(0,\,3)}$ ao raio:

$$\frac{|3 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + c|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = 6 \Rightarrow |c - 3| = 6\sqrt{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c - 3 = \pm 6\sqrt{10} \Rightarrow c = 3 \pm 6\sqrt{10}$$

Assim, as equações das tangentes são:

$$3x - y + 3 + 6\sqrt{10} = 0 \quad \text{e} \quad 3x - y + 3 - 6\sqrt{10} = 0$$



Problema 2

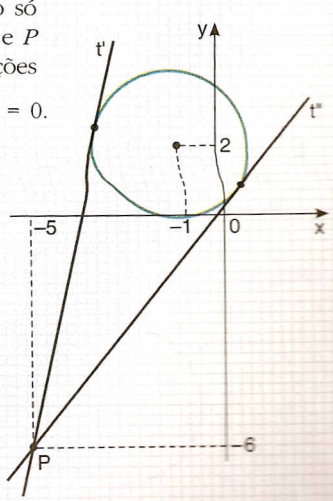
Conduzir, por um ponto dado, as retas tangentes a uma circunferência dada.

Exemplo 15

Procuraremos estabelecer as equações das retas tangentes à circunferência λ: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, traçadas a partir do ponto P(–5, –6).

Inicialmente devemos nos certificar de que o problema tem solução; isso só ocorre se o ponto não for interno à circunferência. No caso, $d_{P,\,C} = 4\sqrt{5} > 2$ e P é externo a λ, apresentando, o problema, duas soluções, que são retas t de equações

$y - (-6) = m[x - (-5)]$ ou $y + 6 = m(x + 5)$ ou, ainda, $mx - y + 5m - 6 = 0$.



Mas as retas t distam 2 do centro (–1, 2). Assim:

$$2 = \frac{|m \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 5m - 6|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \Rightarrow \frac{|4m - 8|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |4m - 8| = 2\sqrt{m^2 + 1} \Rightarrow (4m - 8)^2 = 4 \cdot (m^2 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m^2 - 16m + 15 = 0 \Rightarrow m = \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3}$$

Logo, as equações das tangentes são:

$$t : y = \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3} \cdot x + \frac{5}{3} \cdot \left[(8 \pm \sqrt{19}) - \frac{18}{5}\right], \text{ ou melhor,}$$

$$t : y = \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3} x + \frac{5}{3}\left(\frac{22}{5} \pm \sqrt{19}\right)$$

Exercícios

53 Determine as equações das retas tangentes à circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ e paralelas à reta r: $y = 2x + 1$.

54 (UF-PA) Escreva a equação da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 15 = 0$ no ponto $(3, -2)$.

55 Seja λ uma circunferência com centro sobre a reta $y = 3x$. Sendo λ tangente à reta $y = x$ no ponto de ordenada 4, determine o raio de λ.

56 (EEM-SP) Determine as equações das retas que passam por $A(\sqrt{2}, 0)$ e são tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

57 (FEI-SP) Determine a equação da reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ e que passa pelo ponto A(1, 1).

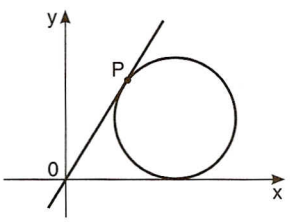
58 (Fuvest-SP) Sejam A = (0, 0), B = (0, 5) e C = (4, 3) pontos do plano cartesiano.

a) Determine o coeficiente angular da reta BC.

b) Determine a equação da mediatriz do segmento BC. O ponto *A* pertence a esta mediatriz?

c) Considere a circunferência que passa por *A*, *B* e *C*. Determine a equação da reta tangente a esta circunferência no ponto *A*.

59 (UF-MG) Na figura, a circunferência tangencia a reta de equação $y = 2x$ no ponto *P* de abscissa $x = 2$ e tangencia, também, o eixo *x*. Determine o raio e as coordenadas do centro da circunferência.

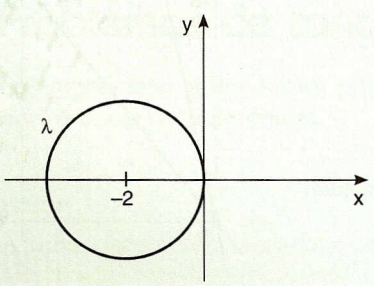


Testes de vestibulares

1 (Unifesp-SP) A equação $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 12 = 0$, em coordenadas cartesianas, representa uma circunferência de raio 1 e centro:

a) (–6, 4)
b) (6, 4)
c) (3, 2)
d) (–3, –2)
e) (6, –4)

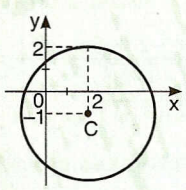
2 (Puccamp-SP) A circunferência λ representada abaixo é tangente ao eixo das ordenadas na origem do sistema de eixos cartesianos.



A equação de λ é:

a) $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4y + 4 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x = 0$
d) $x^2 + y^2 + 4y = 0$
e) $x^2 + y^2 + 4 = 0$

3 (ESPM-SP) Na figura abaixo tem-se representada, em um sistema de eixos cartesianos, a circunferência λ de centro *C*.



A equação de λ é:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

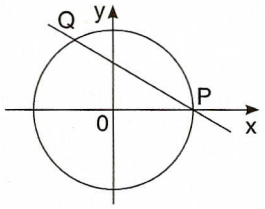
4 (UF-AL) São dados os pontos A(0, 0), B(2, 4), C(6, 2) e a circunferência λ, de raio 1 e equação $x^2 + y^2 - 16x + my + n = 0$. Se o centro de λ, o ponto *A* e o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ estão alinhados, então o valor de *n* é:

a) 100 b) 99 c) 64 d) 36 e) 28

5 (U. F. Juiz de Fora-MG) Consideremos as circunferências C_1 e C_2 de equações
$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ e
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, respectivamente.
É *correto* afirmar que:

a) C_1 é tangente ao eixo das abscissas.
b) C_1 e C_2 se interceptam em um único ponto.
c) C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos.
d) C_1 e C_2 não se interceptam.

6 (UA-AM) Na figura a seguir, *P* e *Q* são pontos de interseção da reta de equação $x + 2y = 4$ com a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 16$. Então o ponto médio do segmento de reta $\overline{PQ}$ é:



a) (4, 5) c) $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ e) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$
b) $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ d) $\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

7 (UF-MS) Num sistema cartesiano ortogonal xOy, considere *C* a circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$, *r* uma reta definida pela equação $y = kx$, sendo *k* uma constante real. Então, assinale *V* ou *F* nas afirmações seguintes:

a) A circunferência *C* é tangente ao eixo Oy.
b) O centro da circunferência *C* é um ponto do eixo Ox.
c) O raio da circunferência *C* é 6 unidades de comprimento.
d) Se a reta *r* for tangente à circunferência *C*, então o triângulo cujos vértices são a origem do sistema xOy, o ponto de tangência e o centro da circunferência *C* é um triângulo retângulo.
e) Se a reta *r* for tangente à circunferência *C*, então a distância da origem do sistema xOy ao ponto de tangência é 6 unidades de comprimento.
f) Para $\frac{-4}{3} < k < \frac{4}{3}$, a reta *r* intercepta a circunferência *C* em dois pontos distintos.

8 (Unicap-PE) Seja a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 10x + 2y - 23 = 0$.
Assinale *V* ou *F*:

a) O ponto P(2, –1) está na região exterior à circunferência.
b) O ponto C(5, 1) é o centro da circunferência.
c) A reta que passa pelos pontos A(2, –1) e B(–5, –1) contém um diâmetro da circunferência.
d) O comprimento da circunferência mede 14π unidades de comprimento.
e) Existe uma e somente uma reta *r* tangente à circunferência em questão.

9 (U. F. Viçosa-MG) Considere a equação $x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$. O maior valor inteiro *p* para que a equação acima represente uma circunferência é:

a) 13 c) 14 e) 10
b) 12 d) 8

10 (Unirio-RJ) Considerando uma circunferência de centro (2, 1), que passa pelo ponto (2, –2), assinale a opção correta.

a) A equação da circunferência é $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$.
b) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 + 4x + y^2 + 2y < 4$.
c) O interior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y < 4$.
d) O exterior da circunferência é representado pela inequação $x^2 - 4x + y^2 - 2y > -2$.
e) O ponto (5, –1) pertence à circunferência.

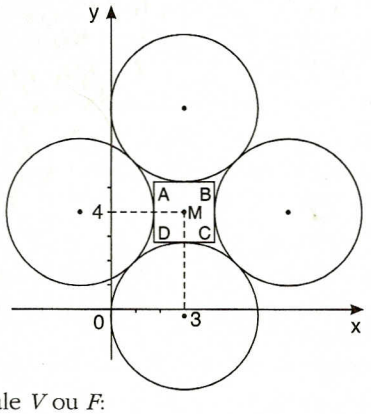
11 (PUC-RS) Uma circunferência tem centro na interseção da reta $x = -2$ com o eixo das abscissas e passa pelo ponto de interseção das retas $y = -2x + 8$ e $y = x + 2$. A equação dessa circunferência é:

a) $x^2 + y^2 = 20$
b) $x^2 + (y + 2)^2 = 32$
c) $(x + 2)^2 + y^2 = 32$
d) $(x - 2)^2 + y^2 = 32$
e) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 32$

12 (Cefet-MG) Sendo *r* a reta de equação $2x - 3y + 5 = 0$ e *s* a reta que contém a origem e o centro do círculo de equação $x^2 - 4x + y^2 = 5$, pode-se afirmar que:

a) *r* e *s* são paralelas.
b) *r* e *s* são perpendiculares.
c) *r* e *s* se cruzam no 1º quadrante.
d) *r* passa no centro do círculo.
e) *r* e *s* se cruzam em ponto exterior ao círculo.

13 (UF-SE, adaptado) No plano cartesiano representado na figura abaixo têm-se: quatro circunferências congruentes e duas a duas tangentes entre si; o quadrado ABCD, com 8 cm^2 de área, cujos lados são paralelos aos eixos cartesianos e tangentes às circunferências dadas; o ponto M(3, 4) é centro do quadrado ABCD.



Assinale *V* ou *F*:

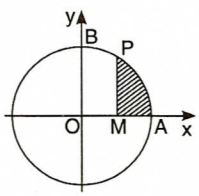
a) A equação da reta suporte do lado $\overline{AB}$ é $y = 4\sqrt{2}$.

b) O simétrico de *C*, em relação ao eixo das ordenadas, é o ponto $(-3 - \sqrt{2}, -4 + \sqrt{2})$.

c) A medida dos raios das circunferências é, em centímetros, igual a $2 + \sqrt{2}$.

14 (UF-PR) Na figura abaixo está representada uma circunferência de raio 6 e centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Dados A(6, 0), M(3, 0) e B(0, 6) e sendo *P* ponto de interseção da circunferência com a reta que contém *M* e é perpendicular ao segmento $\overline{OA}$, assinale *V* ou *F*.



a) A equação da reta que contém *A* e *B* é $x + y + 6 = 0$.

b) A equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 36$.

c) A área do triângulo OMP é igual a $9\sqrt{3}$.

d) A área da região hachurada é igual a $\frac{(12\pi - 9\sqrt{3})}{2}$.

e) A distância de *P* a *M* é menor que 6.

f) Os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OP}$ formam ângulo de 45°.

15 (UF-MA) Seja *C* uma circunferência de raio r = 2 e centro no ponto (0, 0). Se y = Ax + B é a equação da reta tangente a *C* no ponto $P(1, \sqrt{3})$, então os valores de *A* e *B* são:

a) $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $B = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $B = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $B = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $A = 1$, $B = \sqrt{3}$

e) $A = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $B = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

16 (UF-RS) Considere a região plana limitada pelos gráficos das inequações $y \leq -x - 1$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, no sistema de coordenadas cartesianas. A área dessa região é:

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{2} - 1$ e) $\frac{3\pi}{2} - 1$

b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$ d) $\frac{\pi}{2} + 1$

17 (Cefet-PR) Seja a circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ e a reta r: $3x + 4y + k = 0$. Se a reta *r* determina sobre λ uma corda de comprimento 8, então *k* deverá ser igual a:

a) 3 ou –26 c) –4 ou 29 e) –3 ou 25

b) –5 ou 31 d) 4 ou –26

18 (Fuvest-SP) Uma circunferência passa pelos pontos (2, 0), (2, 4) e (0, 4). Logo, a distância do centro dessa circunferência à origem e:

a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{4}$ e) $\sqrt{6}$

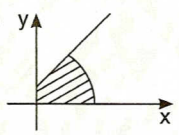
b) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{5}$

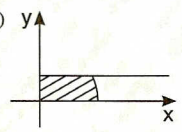
19 (UF-CE) Seja *r* a reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 2$ no ponto (a, b). Se a área do triângulo limitado por *r* e pelos eixos coordenados é igual a 2 u.a. e se *a* e *b* são positivos, o valor de a + b é:

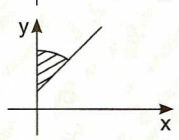
a) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$ e) 2

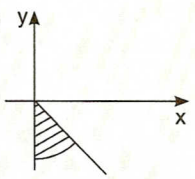
b) 1 d) 3

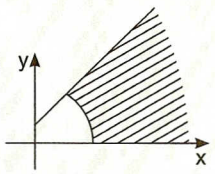
20 (Fuvest-SP) Das regiões hachuradas na seqüência, a que melhor representa o conjunto dos ponto (x, y), do plano cartesiano, satisfazendo ao conjunto de desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x - y + 1 \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 9$ é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

21 (ITA-SP) Duas retas, r_1 e r_2, são paralelas à reta $3x - y = 37$ e tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$. Se d_1 é a distância de r_1 até a origem e d_2 é a distância de r_2 até a origem, então $d_1 + d_2$ é igual a:

a) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt{15}$ d) $\sqrt{10}$

22 (ESPM-SP) Seja P um ponto genérico na circunferência $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e Q um ponto genérico da circunferência $(x - 9)^2 + (y - 9)^2 = 25$. A maior distância possível entre P e Q é:

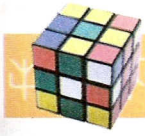
a) 7 c) 14 e) 17
b) 10 d) 15

23 (Fuvest-SP) Sendo P(a, b) um ponto qualquer da circunferência de centro na origem e raio 1, que satisfaça $b > 0$ e $a \neq \pm b$, pode-se afirmar que $\log\left(\frac{b^3}{a^2 - b^2}\left(\frac{a^4}{b^4} - 1\right)\right)$ vale:

a) 0 d) log b
b) 1 e) 2 log b
c) −log b

24 (Fesp-SP/UPE-PE) As retas $x = a$ e $x = b$ são tangentes à circunferência $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$. Podemos afirmar que $|a + b|$ é igual a:

a) 7 c) 9 e) 6
b) 8 d) 10



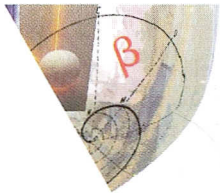
Desafios

1 (UF-CE) Mostre que, para qualquer ponto P pertencente à circunferência inscrita em um triângulo eqüilátero, a soma dos quadrados das distâncias de P aos vértices desse triângulo é constante.

2 Uma circunferência tem o centro sobre a reta dada por $x = 3 - t$ e $y = t - 1$.
São conhecidos A(2, 4) e B(−1, 3), dois pontos da circunferência, cuja equação geral pede-se determinar.

3 (FGV-SP) Uma empresa produz apenas dois produtos, A e B, cujas quantidades anuais (em toneladas) são, respectivamente, x e y. Sabe-se que x e y satisfazem a relação $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0$.

a) Esboce o gráfico da relação, indicando o nome da curva.
b) Que quantidades devem ser produzidas se, por razões estratégicas, a quantidade do produto B for o dobro das de A?



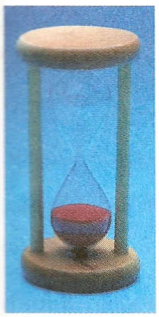
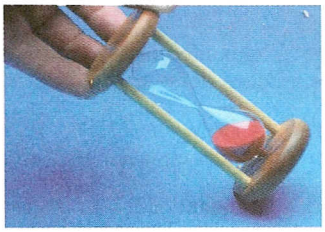
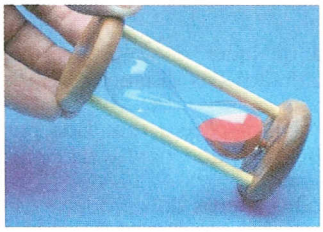
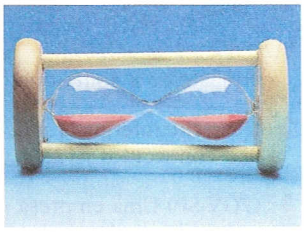
AS CÔNICAS

37

As figuras mostram uma ampulheta, instrumento formado por dois vasos cônicos, que antigamente servia para medir o tempo mediante a passagem de areia ou água do vaso superior para o inferior.

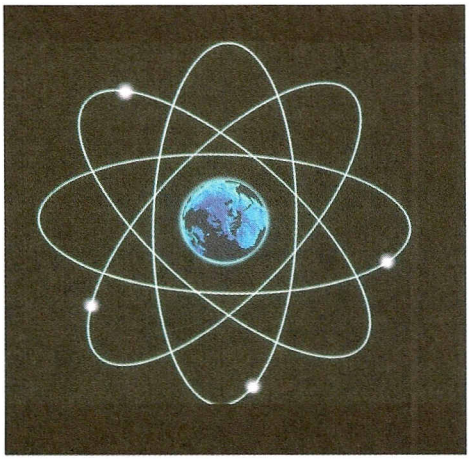
Observe nas fotos que a superfície livre da areia pode assumir diversas formas, conforme varia a inclinação da ampulheta.

Essas seções são chamadas de *cônicas*.

Albany Estúdio

1 ○ Elipse



Stock Photos

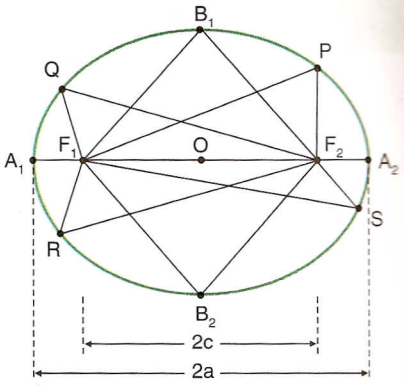
O que é elipse?

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles. *Elipse* é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a ($2a > 2c$).

Elipse = $\{P \in \alpha \mid PF_1 + PF_2 = 2a\}$

Assim, temos:

$$QF_1 + QF_2 = 2a$$
$$RF_1 + RF_2 = 2a$$
$$SF_1 + SF_2 = 2a$$
$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$$
$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$$
$$A_2F_1 + A_2F_2 = 2a$$
$$B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$$



Notemos que $A_1A_2 = 2a$, pois:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_2 + A_2F_1$$

então:

$$x + (x + 2c) = y + (y + 2c)$$

portanto, $x = y$.

$$A_1A_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + F_2A_2 = x + 2c + y = 2(x + c) = 2a$$

Elementos principais

F_1 e F_2 → focos

O → centro

$\overline{A_1A_2}$ → eixo maior

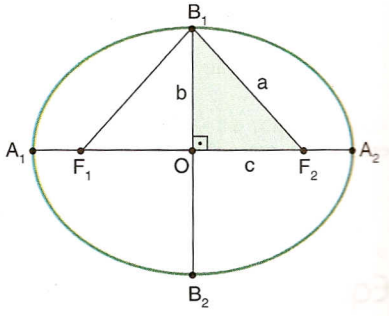
$\overline{B_1B_2}$ → eixo menor

2c → distância focal

2a → medida do eixo maior

2b → medida do eixo menor

$\frac{c}{a}$ → excentricidade



relação notável:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

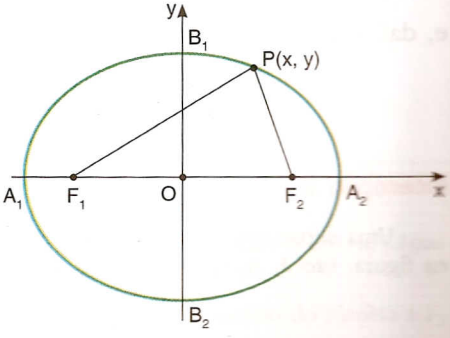
Equação reduzida (I)

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que:

$$\overline{A_1A_2} \subset x \quad e \quad \overline{B_1B_2} \subset y$$

É evidente que os focos são os pontos:

$$F_1(-c, 0) \text{ e } F_2(c, 0)$$



Nessas condições, chama-se equação reduzida da elipse a equação que P(x, y), ponto genérico da curva, vai verificar. Vamos deduzir que equação é essa.

$$P \in \text{elipse} \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$

Então:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx \Rightarrow a^2(x-c)^2+a^2y^2=(a^2-cx)^2$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo por a^2b^2 temos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Exemplo 1

Uma elipse com eixo maior 10 e distância focal 6 apresenta:

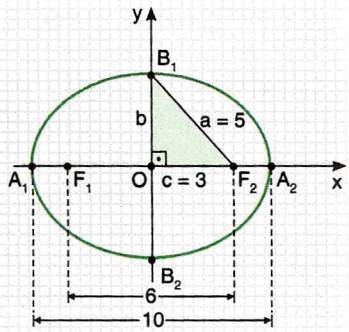
$$\left.\begin{matrix}a=5\\c=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-9=16$$

Se a posição da elipse é a indicada na figura, isto é:

$$\overline{A_1A_2} \subset x \quad \text{e} \quad \overline{B_1B_2} \subset y,$$

então sua equação é:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$



Equação reduzida (II)

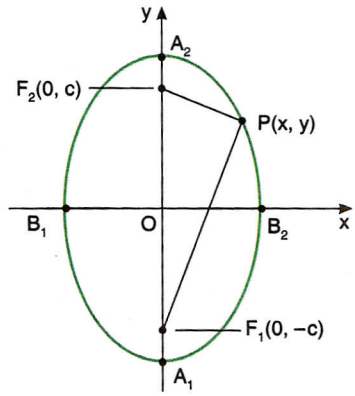
Analogamente ao que vimos há pouco, se a elipse apresenta $\overline{A_1A_2} \subset y$ e $\overline{B_1B_2} \subset x$, temos:

$$PF_1+PF_2=2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=2a$$

e, daí, decorre a equação da elipse:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$



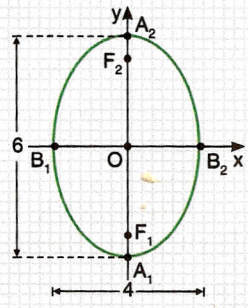
Exemplo 2

Uma elipse com eixo maior 6 e eixo menor 4, na posição indicada na figura, isto é, $\overline{A_1A_2} \subset y$ e $\overline{B_1B_2} \subset x$, tem equação:

$$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$$

ou ainda:

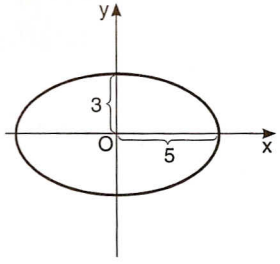
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$



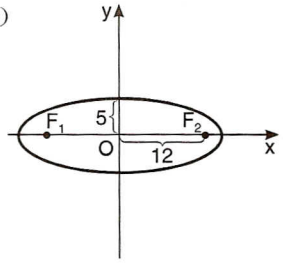
Exercícios

1 Determine as equações das elipses seguintes:

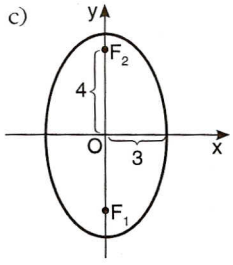
a)



b)



c)



2 Determine as coordenadas dos focos de cada elipse do problema anterior.

3 (Unesp-SP) Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Mostre que o ponto $P = \left(3, \frac{12}{5}\right)$ pertence à elipse e calcule a distância de P ao eixo das abscissas.

b) Determine os vértices Q e R da elipse que pertencem ao eixo das abscissas e calcule a área do triângulo PQR, sendo $P = \left(3, \frac{12}{5}\right)$.

4 Dê a equação da elipse que passa pelos pontos (2, 0), (–2, 0) e (0, 1).

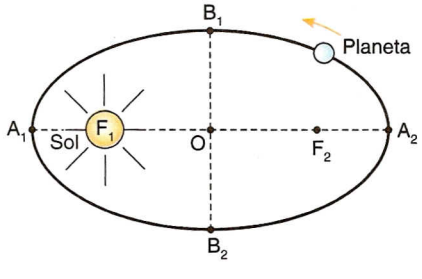
5 Calcule a distância focal e a excentricidade da elipse (λ) $9x^2 + 25y^2 = 900$.

6 Determine a equação da elipse com centro na origem, que passa pelo ponto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e tem um foco $F_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$.

7 (U. F. Juiz de Fora-MG) Determine a equação da elipse, sendo seus focos os pontos $F_1(0, 3)$ e $F_2(0, -3)$ e medindo 8 cm seu eixo menor.

8 Ache as coordenadas dos focos da elipse de equação $9x^2 + 25y^2 = 225$.

9 (UF-MT) A 1ª lei de Kepler estabelece que qualquer planeta gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos.



Admitindo que O se encontra na origem do plano cartesiano e que o eixo focal está sobre o eixo x, julgue como verdadeiros ou falsos os itens.

a) A soma da distância do centro do planeta ao centro do Sol com a distância do centro do planeta a F_2 é igual à distância de A_1 a A_2.

b) A distância de A_1 a O é igual à distância do centro do Sol a B_1.

c) Sendo a e b os semi-eixos maior e menor da elipse, respectivamente, sua equação é dada por $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

10 Construa o gráfico da cônica cuja equação é $169x^2 + 25y^2 = 4\,225$ e obtenha as coordenadas dos focos.

11 (UF-RJ) Sejam F_1 e F_2 os pontos do plano cartesiano de coordenadas $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$. Determine as coordenadas dos pontos da reta r de equação $x - y = 1$ cujas somas das distâncias a F_1 e F_2 sejam iguais a 4 (isto é, determine as coordenadas dos pontos P sobre a reta r que satisfazem $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 4$).

12 Os pontos A(10, 0) e B(–5, y) estão sobre uma elipse cujos focos são $F_1(-8, 0)$ e $F_2(8, 0)$. Calcule o perímetro do triângulo BF_1F_2.

13 (UC-GO, adaptado) Em uma elipse, a corda que passa pelo foco perpendicular ao eixo maior é chamada de corda focal mínima. Se a equação da elipse for $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, qual é, em função de a e b, o comprimento dessa corda?

14 Calcule o comprimento da corda que a reta (r) $y = x$ define na elipse (λ) $9x^2 + 25y^2 = 225$.

15 Determine m de modo que a reta $y = x + m$ intercepte a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

16 (UF-CE) A reta $y = ax + 1$ intercepta a elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ somente num ponto. Calcule $8a^2$.

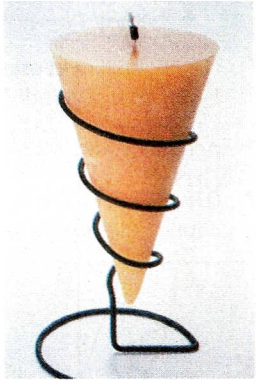
17 Obtenha as tangentes à elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ que têm coeficiente angular –1.

18 (UF-MG) Relativamente à elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com $b < 5$, julgue como verdadeiros ou falsos os itens.

a) Seu eixo maior está sobre o eixo x.
b) Se os focos da elipse estão localizados nos pontos (4, 0) e (–4, 0), então $b = 4$.
c) Se $b = \sqrt{5}$, então existe $m \in \mathbb{R}$ tal que a reta $y = mx + 1$ é tangente à elipse.

2 Hipérbole

O que é hipérbole?



Jorge Butsuem/Abril Imagens

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles. *Hipérbole* é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a ($0 < 2a < 2c$).

$$\text{Hipérbole} = \{P \in \alpha \mid |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

Assim, temos:

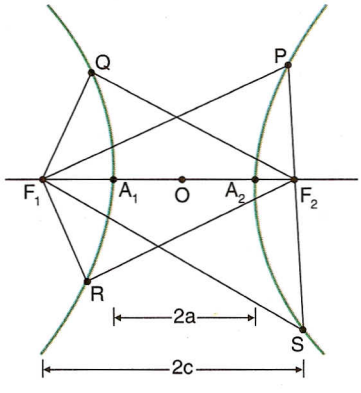
$$QF_2 - QF_1 = 2a$$
$$RF_2 - RF_1 = 2a$$
$$SF_1 - SF_2 = 2a$$
$$A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$$
$$A_2F_1 - A_2F_2 = 2a$$

Notemos que o módulo é abolido desde que façamos a diferença da maior para a menor distância. Se um ponto X está no ramo da direita, temos:

$$XF_1 - XF_2 = 2a, \text{ pois } XF_1 > XF_2$$

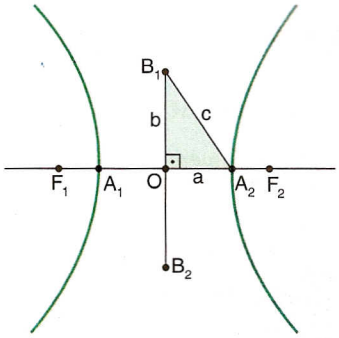
Se X está no ramo da esquerda, temos:

$$XF_2 - XF_1 = 2a, \text{ pois } XF_2 > XF_1$$



Elementos principais

F_1 e F_2 → focos
O → centro
$\overline{A_1A_2}$ → eixo real ou transverso
$\overline{B_1B_2}$ → eixo imaginário
2c → distância focal
2a → medida do eixo real
2b → medida do eixo imaginário
$\frac{c}{a}$ → excentricidade



relação notável:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Notemos que, sendo a hipérbole uma curva aberta, o significado geométrico do eixo imaginário $\overline{B_1B_2}$ é abstrato.

Hipérbole eqüilátera

Uma hipérbole é eqüilátera quando apresenta a = b.

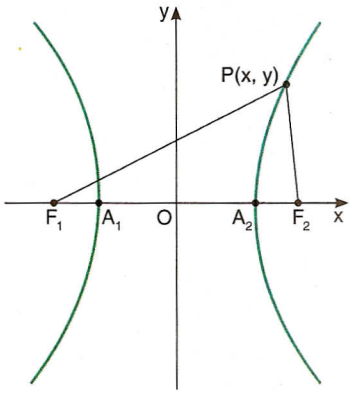
Equação reduzida (I)

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que:

$$\overline{A_1A_2} \subset x \quad e \quad \overline{B_1B_2} \subset y$$

É evidente que os focos são os pontos:

$$F_1(-c, 0) \text{ e } F_2(c, 0)$$



Nessas condições, chama-se equação reduzida da hipérbole a equação que P(x, y), ponto genérico da hipérbole, vai verificar. Vamos deduzir que equação é essa.

$$P \in \text{hipérbole} \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$$

Então:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \pm 2a$$
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a$$
$$(x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 4a^2$$
$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$
$$(cx - a^2)^2 = a^2 \cdot (x - c)^2 + a^2y^2$$
$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo por a^2b^2, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

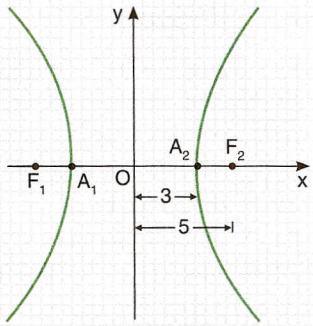
Exemplo 3

Uma hipérbole com eixo real 6 e distância focal 10 apresenta:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$$

Se a posição da hipérbole é a indicada na figura, isto é, $\overline{A_1A_2} \subset x$ e $\overline{B_1B_2} \subset y$, então sua equação é:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$



Equação reduzida (II)

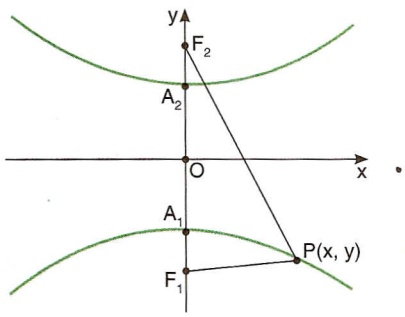
Analogamente ao que vimos há pouco, se a hipérbole apresentar $\overline{A_1A_2} \subset y$ e $\overline{B_1B_2} \subset x$, temos:

$$PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \pm 2a$$

e, daí, decorre a equação da hipérbole:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



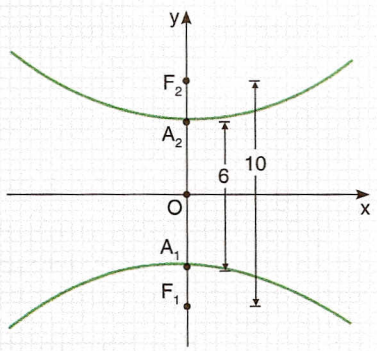
Exemplo 4

Assim, por exemplo, uma hipérbole com eixo real 6 e distância focal 10, na posição indicada na figura, isto é, $\overline{A_1A_2} \subset y$ e $\overline{B_1B_2} \subset x$, tem equação:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

que evidentemente *não* é equivalente a:

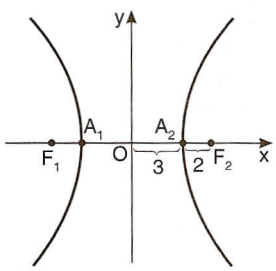
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$



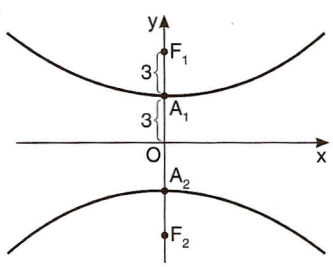
Exercícios

19 Determine as equações das hipérboles seguintes:

a)



b)



20 Determine as coordenadas dos focos de cada hipérbole do problema anterior.

21 Obtenha a distância focal da hipérbole cuja equação é $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

22 Calcule a excentricidade da hipérbole cuja equação é $36x^2 - 49y^2 = 1$.

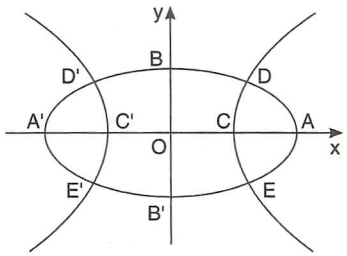
23 Construa os gráficos das cônicas $(\lambda)\ x^2 - y^2 = 1$ e $(\lambda')\ y^2 - x^2 = 1$. São coincidentes?

24 Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $144y^2 - 25x^2 = 3\,600$.

25 Determine a equação reduzida da elipse cujo eixo menor tem por extremos os focos da hipérbole $9x^2 - 16y^2 = -144$ e cuja excentricidade é o inverso da excentricidade da hipérbole dada.

26 Determine o conjunto dos pontos em que a hipérbole $x^2 - 4y^2 = 4$ intercepta a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

27 (IME-RJ) Calcule as coordenadas dos pontos de interseção da elipse com a hipérbole, representadas na figura abaixo, sabendo-se que:

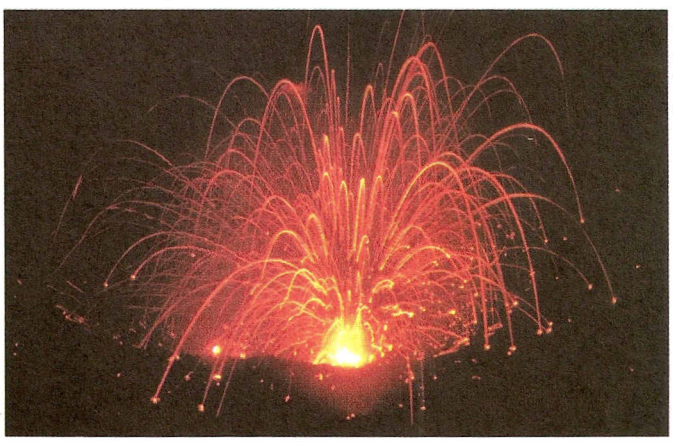


a) os pontos C e C' são os focos da elipse e os pontos A e A' são os focos da hipérbole.
b) $\overline{BB'}$ é o eixo conjugado da hipérbole.
c) $OB = OB' = 3$ m e $OC = OC' = 4$ m.

28 Conduza por $P(0, 2)$ as retas t que são tangentes à hipérbole $(\lambda)\ x^2 - 4y^2 = 4$.

29 Obtenha uma reta t perpendicular à reta $(r)\ x + 3y + 5 = 0$ e tangente à hipérbole $(\lambda)\ 6x^2 - y^2 = 1$.

3 Parábola



Stock Photos

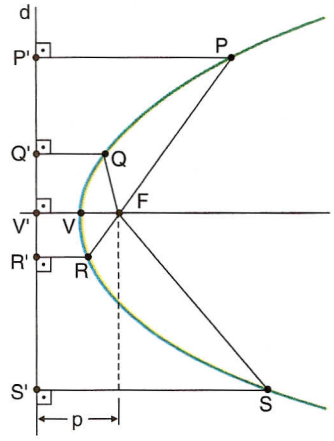
O que é parábola?

Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α, com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d. *Parábola* é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e de d.

$$\text{Parábola} = \{P \in \alpha \mid PF = Pd\}.$$

Assim, temos:

$VF = VV'$
$PF = PP'$
$QF = QQ'$
$RF = RR'$
$SF = SS'$



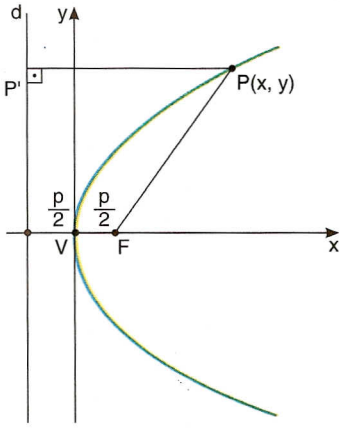
Elementos principais

$F \rightarrow$ foco
$d \rightarrow$ diretriz
$p \rightarrow$ parâmetro
$V \rightarrow$ vértice
reta $\overleftrightarrow{VF} \rightarrow$ eixo de simetria

relação notável:

$$VF = \frac{p}{2}$$

Equação reduzida (I)



Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco. É evidente que o foco é:

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

e a diretriz d tem equação:

$$x = -\frac{p}{2}$$

Nessas condições, chama-se equação reduzida da parábola a equação que P(x, y), ponto genérico da curva, vai verificar.

Vamos deduzir que equação é essa.

$$P \in \text{parábola} \Leftrightarrow PF = PP'$$

Então:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

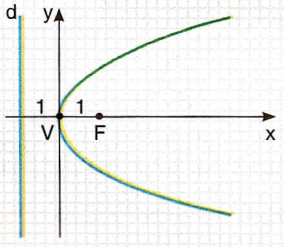
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

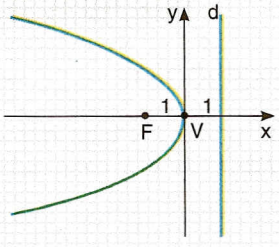
$$y^2 = 2px$$

Exemplo 5

Uma parábola com parâmetro p = 2, vértice V na origem e foco F no eixo dos x tem equação:

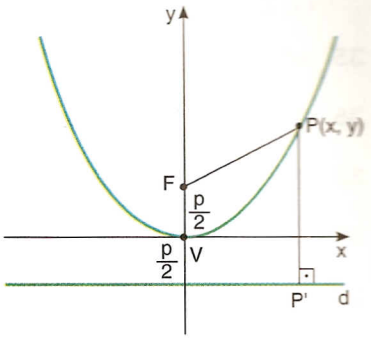
$y^2 = 4x$, se F estiver à direita de V ou $y^2 = -4x$, se F estiver à esquerda de V





Equação reduzida (II)

Analogamente ao que vimos há pouco, se a parábola apresentar vértice na origem e foco no eixo das ordenadas, temos:



$$PF = PP'$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

e, daí, decorre a equação da parábola:

$$x^2 = 2py$$

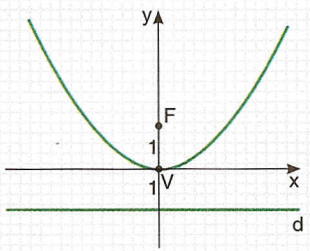
Observação

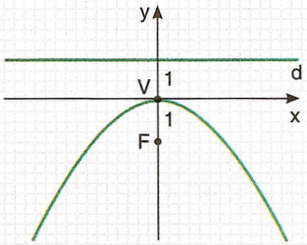
Note que a parábola de equação $x^2 = 2py$ é também o gráfico da função quadrática $y = \frac{1}{2p}x^2$ (ou $y = ax^2$), conforme vimos no estudo de funções (capítulo 4).

Exemplo 6

Uma parábola com parâmetro p = 2, vértice V na origem e foco F no eixo dos y tem equação:

$x^2 = 4y$, se F estiver acima de V ou $x^2 = -4y$, se F estiver abaixo de V

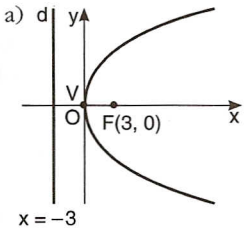




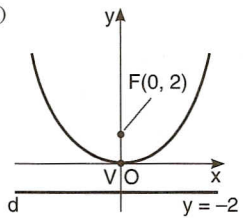
Exercícios

30 Determine as equações das parábolas seguintes:

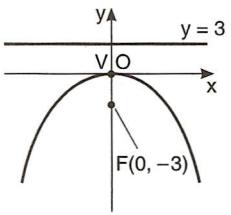
a)



b)



c)



31 Qual é a equação da diretriz da parábola $y^2 = 8x$?

32 Ache as coordenadas do foco F e a equação da diretriz da parábola $y^2 = -16x$.

33 Qual é a equação do conjunto dos pontos P(x, y) que são eqüidistantes do ponto F(0, 3) e da reta $y = -3$?

34 Uma parábola tem vértice na origem, eixo de simetria coincidente com o eixo dos x e passa pelo ponto (4, 2). Qual é sua equação?

35 Ache a distância do ponto P(3, 6) à reta determinada pelos pontos de interseção das curvas $x^2 + y^2 = 2$ e $y = x^2$.

36 Obtenha a interseção da parábola (λ) $y^2 = x$ com a elipse (λ') $x^2 + 5y^2 = 6$.

37 Qual é o número de interseções das curvas de equações $y = x^2$ e $y = x^{\frac{3}{2}}$?

38 Calcule o valor do coeficiente angular m para que a reta $y = mx + 2$ corte a parábola $y^2 = 4x$.

39 Obtenha as equações das retas t que passam por P(3, 0) e são tangentes à parábola (λ) $x = -2y^2$.

40 (Unicamp-SP) Sejam A e B os pontos de interseção da parábola $y = x^2$ com a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.

a) Quais as coordenadas dos pontos A e B?

b) Se P é um ponto da circunferência diferente de A e de B, calcule as medidas possíveis para o ângulo $A\hat{P}B$.

Testes de vestibulares

1 (UA-AM) As coordenadas dos focos F_1 e F_2 da elipse de equação $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ são, respectivamente:

a) (0, 4) e (0, –4)
b) (0, 5) e (0, –5)
c) (0, 12) e (0, –12)
d) (0, 13) e (0, –13)
e) (5, 0) e (–5, 0)

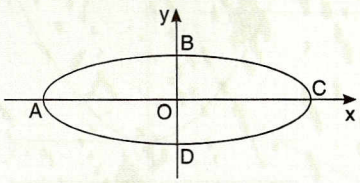
2 (UF-PI) O gráfico da equação $x^2 - y^2 = 4$ representa uma hipérbole. Os focos dessa hipérbole são:

a) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
b) (2, 0) e (–2, 0)
c) $(2\sqrt{2}, 0)$ e $(-2\sqrt{2}, 0)$
d) $(0, \sqrt{2})$ e $(0, -\sqrt{2})$
e) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

3 (Fuvest-SP) A elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é:

a) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$
c) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$
d) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
e) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

4 (Unifor-CE) Na figura abaixo tem-se uma elipse.

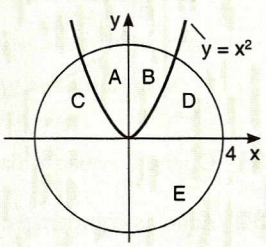


Se OB = 2 cm e OC = 4 cm, a equação dessa elipse é:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$
d) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$
e) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

5 (Unifesp-SP) A região do plano cartesiano, determinada simultaneamente pelas três condições

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 16 \\ y \geqslant x^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$



é aquela, na figura, indicada com a letra:

a) A b) B c) C d) D e) E

6 (PUC-RJ) As parábolas dadas pelas equações $y = x^2$ e $x = y^2$:

a) nunca se encontram
b) se encontram apenas na origem
c) se encontram em exatamente dois pontos
d) se encontram em três pontos
e) se encontram em quatro pontos

7 (Unopar-PR) Considere as seguintes afirmações:

I. A representação gráfica no plano cartesiano dos pontos que satisfazem à relação $x^2 + y^2 = 25$ é uma circunferência de raio 5.

II. A representação gráfica no plano cartesiano dos pontos que satisfazem à relação $\frac{x}{1} + \frac{y}{4} = 1$ é uma reta.

III. A representação gráfica no plano cartesiano dos pontos que satisfazem à relação $y = 2^x$ é uma parábola.

Pode-se afirmar que:

a) estão corretas I, II e III
b) estão corretas I e II, apenas
c) estão corretas II e III, apenas
d) está correta II, apenas
e) nenhuma das afirmações está correta

8 (Fatec-SP) A equação $x^2 + y^2 = 2xy + 4$ representa, no sistema cartesiano ortogonal xOy:

a) uma circunferência
b) uma parábola
c) uma elipse
d) uma reta
e) duas retas paralelas

9 (UFF-RJ) As equações

$y - 2x = 0$, $y + x^2 = 0$ e $y^2 - x^2 + 1 = 0$

representam no plano, respectivamente:

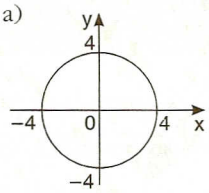
a) uma reta, uma hipérbole e uma parábola
b) uma parábola, uma hipérbole e uma reta
c) uma reta, uma parábola e uma elipse
d) uma elipse, uma parábola e uma hipérbole
e) uma reta, uma parábola e uma hipérbole

10 (UF-PE) A respeito da elipse $x^2 + 4y^2 = 16$, quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

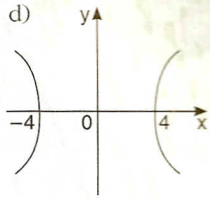
a) Os eixos têm 8 e 4 unidades de comprimento.
b) Os focos têm coordenadas (4, 0) e (–4, 0).
c) A excentricidade é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
d) A distância entre os focos é de 8 unidades de comprimento.
e) A reta $x + 2y - 4 = 0$ corta a elipse em dois pontos.

11 (Unificado-RJ) O gráfico que melhor representa a curva de equação $x^2 + 16y^2 = 16$ é:

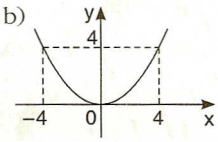
a)



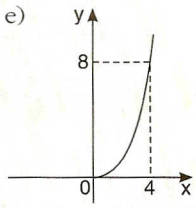
d)



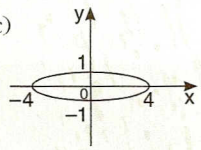
b)



e)



c)



12 (FGV-SP) Assinale *V* ou *F*:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, no plano cartesiano, é a equação de uma elipse com excentricidade igual a 0,6.
b) No plano cartesiano, a equação $x^2 - y^2 = 0$ representa uma hipérbole eqüilátera.
c) No plano cartesiano, a equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$ representa uma circunferência.
d) No plano cartesiano, a equação $|2x - y| = 3$ representa um par de retas paralelas.

13 (Unicap-PE) René, aluno dedicado de Geometria Analítica, estudando um sistema de coordenadas cartesianas no plano, observou que:

a) as retas (r) $4x + 3y = 5$ e (s) $3x - 2y = 8$ não se interceptam
b) a equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ é a de uma circunferência de raio $r = 5$
c) a elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$ tem o ponto $F\left(0, \frac{5\sqrt{5}}{6}\right)$ como um dos focos
d) $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$ são os focos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$

Que observações estão corretas?

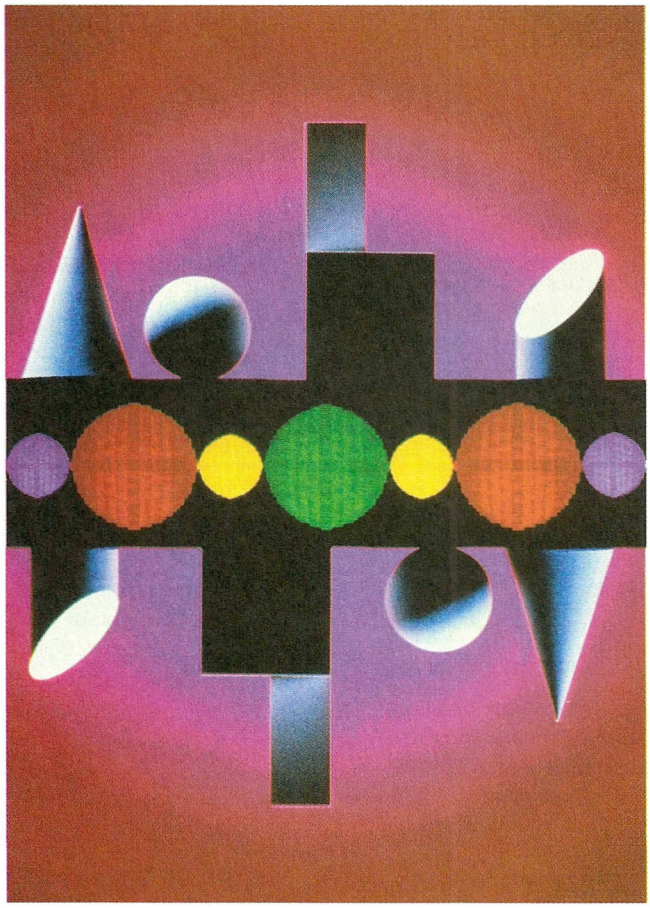
14 (UF-CE) Um segmento de reta desloca-se no plano cartesiano de tal forma que uma de suas extremidades permanece sempre no eixo *y* e o seu ponto médio permanece sempre no eixo *x*. Então, a sua outra extremidade desloca-se ao longo de uma:

a) circunferência
b) parábola
c) reta
d) elipse
e) hipérbole

Desafios

1 (ITA-SP) Qual é o coeficiente angular da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto P(8, 0)?

2 (U. F. Juiz de Fora-MG) Determine os valores de $\theta \in [0, \pi]$ para os quais o ponto P de coordenadas $(2\cos 2\theta, 3\operatorname{sen}\theta)$ pertença à elipse de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.



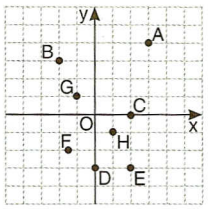
Peter Turner/The Image Bank/Getty Images

Respostas dos exercícios e testes

34 O PONTO

EXERCÍCIOS

1



1º quadrante: A
2º quadrante: B, G
3º quadrante: F
4º quadrante: E, H
eixo das abscissas: C
eixo das ordenadas: D

2 K(–4, 4), L(–2, 4), M(–3, –2), N(1, –2), O(0, 0), P(5, 5), Q(4, 1), R(4, –2), S(–5, –1), T(0, –4), U(–3, 0), V(0, 1) e Z(2, 0)

4 a) (–3, y) b) (x, 4) c) (x, –5) d) (2, y)

5 retângulo e isósceles

6 $\left\{k \in \mathbb{R} \mid -1 < k < \frac{2}{3}\right\}$

7 a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{65}$ c) $4\sqrt{2}$ d) 5 e) $\sqrt{2}$

8 a) $m\sqrt{2}$ b) $-m\sqrt{26}$

9 $5\sqrt{2} + 2\sqrt{37}$

10 ±3

11 $\left(\frac{87}{10}, 0\right)$

12 $\left(0, \frac{19}{4}\right)$ e $\left(-\frac{19}{6}, 0\right)$

13 –8

14 $y = \frac{1 - 2x}{3}$

15 a) –1 b) 5

16 a) (–1, 0) b) (1, –1) c) $\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$ d) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

17 $x_B = 4$ e $y_B = 10$

18 $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{85}}{2}$

19 1

20 (1, 6), (–5, –4) e (9, –2)

21 (0, 2)

22 $x_C = -7$ e $y_C = 5$

23 a) sim b) não c) sim d) sim e) não

24 sim

25 $p \neq 2$, $p \in \mathbb{R}$

26 p = 1 – q

27 $-\frac{2}{3}$

28 5 ou 6

29 $\frac{3}{5}$

30 (1, 1)

31 a) A(0, 0), B(α, 0), C(α, β), D(0, β)
b) $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$

33 (–1, 3), $\left(\frac{16}{7}, \frac{17}{7}\right)$ e (6, 7)

TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**5**	c	**9**	d	**13**	c
2	a	**6**	d	**10**	d	**14**	e
3	d	**7**	b	**11**	c		
4	a	**8**	d	**12**	b		

35 A RETA

EXERCÍCIOS

1 5x – 6y = 0

2 a) x + 7y – 16 = 0 b) x – 3y – 7 = 0 c) x + y – 11 = 0 d) 5x – 3y + 3 = 0

3 a) não b) sim c) sim d) não e) não

4 a) (0, 3) e (2, 0) b) (–16, 0) e (0, –16) c) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$

5 a) 4x + 5y – 20 = 0 b) 4x + 3y + 8 = 0

6 a) sim b) *A*, *B* e *C* estão alinhados.

7 r: 18x – 25y – 159 = 0; não; sim

8 $m = -\frac{1}{5}$; r: $y = -\frac{x}{5} + 2$

9 s: y = –3x – 2; não

10 t: $y = \sqrt{3}x + 6\sqrt{3}$

11 u: $y = \frac{2}{7}x$; 2x – 7y = 0

12 n = 3; $m = -\frac{3}{4}$

13 $-\frac{3}{5}$

14 r: 2x + y + 2 = 0 (geral) e
r: y = –2x – 2 (reduzida)

15 $y = \frac{3x}{2}$

16 6x – 4y + 7 = 0

17 $\overleftrightarrow{AB}$: y = x + 6
$\overleftrightarrow{BC}$: y = –x – 6
S = 18 u.a.

18 a) y = 2x + 1
b) 2x – y + 1 = 0
c) Estão alinhados.

19 2ª bissetriz

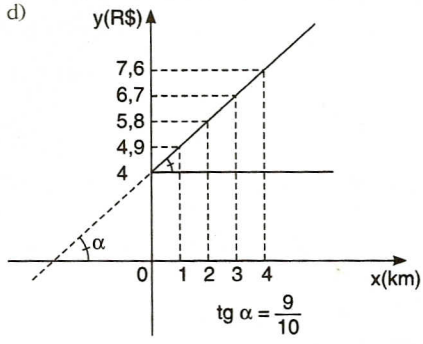
20 geral: r: 2x – y + 2 = 0
reduzida: r: y = 2x + 2
segmentária: r: $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$
paramétricas: r: $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

21 $\frac{5\sqrt{13}}{6}$

22 a) y = 2x – 1
b) y = –2x – 3
c) $y = \frac{1}{2}x - 2$

23 a: $y = x + 7$
b: $y = \sqrt{3}x + (4 + 3\sqrt{3})$
c: $x = -3$
d: $y = -\sqrt{3}x + (4 - 3\sqrt{3})$
e: $y = -x + 1$
f: $y = 4$

24 a) R$ 4,00 b) R$ 11,20 c) 10
d)



25 $\frac{x}{-\frac{3}{4}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$

26 $x - y + 2 = 0$

27 $(-3, 3)$

28 1; (2, 0)

29 $-\frac{27}{2}$

30 4

31 $\left(-\frac{8}{13}, -\frac{45}{13}\right)$

32 isósceles e não-retângulo

33 a) 3
b) (3, 0)

34 $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

35 $\left(-\frac{6}{19}, \frac{9}{19}\right)$

36 não há

37 r // s, *r* distinta de *s*

38 $x - y + 2 = 0$

39 s: $2x - 5y \pm 10 = 0$

40 a) $p = 2$ b) não existe *p* c) $p \neq 2$

41 $m \neq -4$, $m \in \mathbb{R}$

42 $2x - y + 2 = 0$

43 $a = 3b - 5$

44 $\overleftrightarrow{CD}$: $4x - 3y + p = 0$, $p \neq -1$, $p \in \mathbb{R}$

45 a) (0, 3), $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ e $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{4}\right)$
b) $2\sqrt{13} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$

46 r: $4x + 3y + 18 = 0$

47 $4x - 6y + 15 = 0$

48 a) $\left(0, \frac{19}{3}\right)$ b) $\left(-\frac{10}{13}, \frac{11}{13}\right)$

49 50

50 –2

51 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}x + 7$

52 $p \neq \frac{5}{4}$ e $p \neq -3$

53 (3, 2)

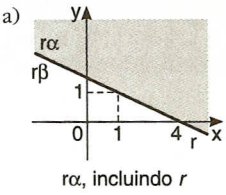
54 29

55 $\left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$

56 a) $(1, 3) \in r$, $\forall a \in \mathbb{R}$ b) –1

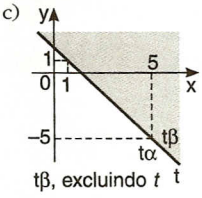
57 $2y - x + 5 = 0$

58 a)



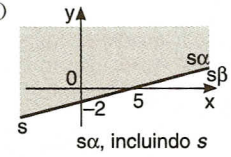
rα, incluindo *r*

c)



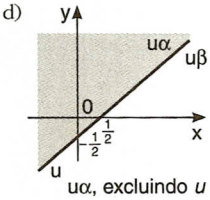
tβ, excluindo *t*

b)



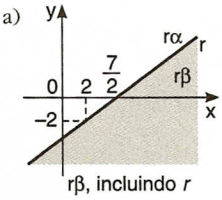
sα, incluindo *s*

d)



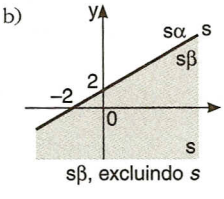
uα, excluindo *u*

59 a)



rβ, incluindo *r*

b)



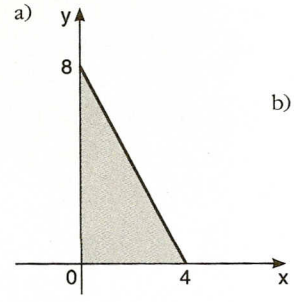
sβ, excluindo *s*

60 a) $2x + 3y - 6 \leq 0$ b) $3x - 2y + 6 < 0$

61 18

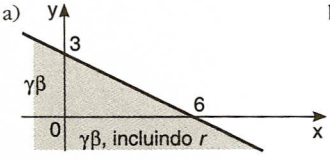
62 4

63 a)



b) $2x - y - 8 = 0$

64 a)



γβ, incluindo *r*

b) 26

65 a) 2 b) $\frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{5}$ c) $\frac{23}{2}$

66 a) 45° b) 90°

67 $\theta \mid \text{tg } \theta = 7$

68 45°

69 $\hat{R} < \hat{Q} < \hat{P}$

70 $\frac{3\pi}{4}$

71 $2x - y - 12 = 0$ ou $x + 2y - 1 = 0$

72 a) 2
b) $\sqrt{5}$
c) $\frac{15\sqrt{13}}{13}$
d) $\sqrt{17}$

73 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

74 $\frac{9\sqrt{74}}{37}$

75 5 **76** $3x - y + 1 \pm 3\sqrt{10} = 0$

77 $\ell = \frac{4\sqrt{15}}{3}$ **78** $\sqrt{5}$ **79** $\sqrt{2}$

80 a) $2x + 3y = 11$ c) $\frac{\sqrt{353}}{2}$

b) $3x - 2y = -3$ d) $\frac{5\sqrt{13}}{13}$

81 a) $\frac{3}{2}$ b) 47 c) $\frac{71}{2}$

82 2 **83** 3

84 a) (3, 1), (–3, 1) e (5, 5) **85** 9
b) 12

86 a) P(4, 0); Q(0, –3) **87** 9
b) (–2, 0)

88 a) $x + 2y - 10 = 0$ b) $a = 4, b = 3$

89 a) (3, 2), (6, 5) e (4, 7) b) 6

90 $y = (7 + 3\sqrt{5})x - (5 + 3\sqrt{5})$ ou
$y = (7 - 3\sqrt{5})x - (5 - 3\sqrt{5})$

91 $5x + y - 5 = 0$ ou $x - 5y + 7 = 0$

92 Não, pois as bissetrizes são, obrigatoriamente, perpendiculares entre si.

93 $(6 - \sqrt{10}, 1 - \sqrt{10})$

94 $\frac{\sqrt{130}}{2}$

TESTES DE VESTIBULARES

1 d **9** b **15** d **25** e

2 c **10** a) V d) V **16** c **26** d
b) F e) F

3 a **17** b **27** e

4 d c) V **18** e **28** a

5 b **11** a **19** a **29** a

6 b **12** a) V d) V **20** d

7 b b) V e) F **21** a

8 a) V c) F **22** d

b) V **13** a **23** a

c) V **14** e **24** c

36 A CIRCUNFERÊNCIA

EXERCÍCIOS

1 a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$
b) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
c) $x^2 + y^2 = 121$
d) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$

2 a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
b) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 13$

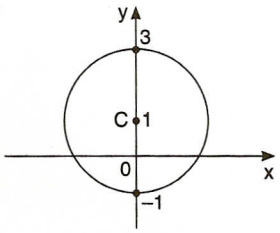
3 $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 8$; não

4 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$

5 $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

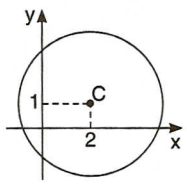
6 (–3, 3) **7** $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$

8 a)



interseções com os eixos: $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, (0, –1) e (0, 3)

b)



interseções com os eixos: $(2 - \sqrt{5}, 0)$, $(2 + \sqrt{5}, 0)$, $(0, 1 + \sqrt{2})$ e $(0, 1 - \sqrt{2})$

9 $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$

10 a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ **11** (3, 9)
b) $y = \frac{4}{3}x$ **12** $1 \pm \sqrt{6}$

13 $-\frac{5}{3}$

14 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$ **15** r: $y = -x + 1$

16 a) sim; (–1, 1) e 1 e) sim; (–4, –3) e 5
b) não f) sim; (–7, –3) e $\sqrt{33}$
c) sim; (–1, 3) e 4 g) não
d) não

17 a) (5, 0) e $4\sqrt{3}$ c) (6, –3) e 7
b) (–1, –3) e $\sqrt{2}$ d) (4, 0) e $3\sqrt{2}$

18 (1, –1) e $\sqrt{3}$

19 $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0$

20 $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 156 = 0$

21 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

22 $x - y - 1 = 0$ e $x + y - 5 = 0$

23 (8, –7) **24** a) 5
b) 50

25 $2x + 3y - 10 = 0$ **26** $3x - 4y + 30 = 0$

27 (5, 5), (4, –2) e (–2, 6)

28 *A* e *C* pertencem a λ; *D* é interno a λ;
B e *E* são externos a λ.

29 *E* pertence a λ; *C* é externo e *A*, *B* e *D* são internos.

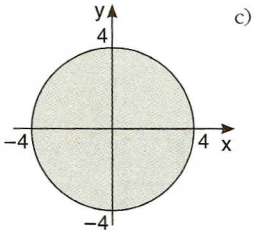
30 C_1 é externo a λ_2 e C_2 é externo a λ_1.

31 $p \in \mathbb{R} \mid p < 3 - \sqrt{5}$ ou $p > 3 + \sqrt{5}$

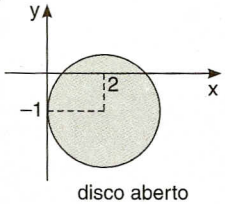
32 λ: $x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0$; $P \in \lambda$

33 a) O é externo à circunferência.
b) P é externo à circunferência.

34 a)

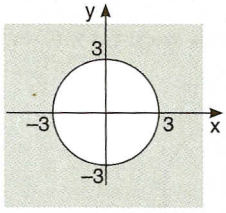


c)

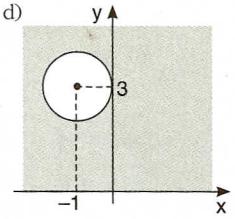


disco aberto

b)

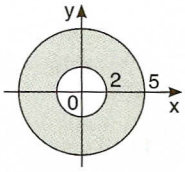


d)

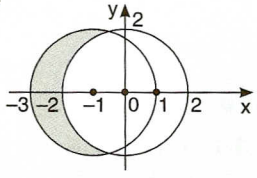


35 5π

36

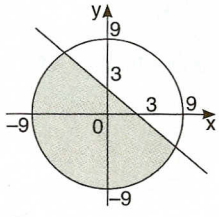


37

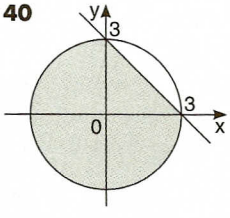


38 o plano todo

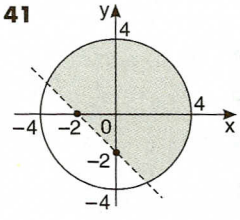
39



40



41



42 $k \in \mathbb{R} \mid k \geq 2\sqrt{2}$

43 a) secantes
b) secantes
c) exteriores
d) tangentes
e) exteriores

44 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ **45** $\sqrt{2}$

46 a) C(1, –1); $r = \sqrt{2}$
b) A reta é tangente à circunferência.

47 (–3, 3) ou (5, –1) **48** $k = 4$

49 λ: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$; Q é externo a λ; r é exterior a λ.

50 $x + y - 2 + \sqrt{2} = 0$ ou $x + y - 2 - \sqrt{2} = 0$

51 a) $x + 2y - 8 = 0$ c) $4\sqrt{5}$
b) (0, 4); (8, 0)

52 a) (1, 1) e (1, –7) b) $\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

53 $2x - y \pm 2\sqrt{5} + 1 = 0$

54 $x + 2y + 1 = 0$ **55** $2\sqrt{2}$

56 $x - y - \sqrt{2} = 0$ e $x + y - \sqrt{2} = 0$

57 $3x + 2y - 5 = 0$

58 a) $-\frac{1}{2}$ b) $2x - y = 0$; sim
c) $x + 2y = 0$

59 $C(2\sqrt{5}, 5 - \sqrt{5})$; $r = 5 - \sqrt{5}$

TESTES DE VESTIBULARES

1 d **9** b **18** d
2 c **10** c **19** e
3 a **11** c **20** a
4 b **12** e **21** e
5 d **13** a) F b) F c) V **22** e
6 c **14** a) F c) F e) V **23** c
7 a) F c) F e) V b) V d) V f) F **24** b
b) V d) V f) F **15** e
8 a) V c) V e) F **16** a
b) F d) V **17** d

37 AS CÔNICAS

EXERCÍCIOS

1 a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$
b) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

2 a) $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4, 0)$
b) $F_1(-12, 0)$ e $F_2(12, 0)$
c) $F_1(0, -4)$ e $F_2(0, 4)$

3 a) $\frac{1}{25} \cdot 3^2 + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 1$; $\frac{12}{5}$
b) (5, 0) e (–5, 0); 12

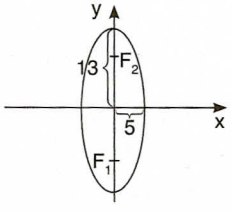
4 $x^2 + 4y^2 = 4$ **5** $2c = 16$ e $e = \frac{4}{5}$

6 $x^2 + 3y^2 = 1$ **7** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

8 $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4, 0)$

9 a) V b) V c) F

10



$F_1(0, -12)$ e $F_2(0, 12)$

11 $(0, -1)$ e $\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$

12 36

13 $\frac{2b^2}{a}$

14 $\frac{30\sqrt{17}}{17}$

15 $-\sqrt{5} \leq m \leq 5$

16 6

17 $y = -x \pm \sqrt{13}$

18 a) V
b) F (pois b = 3)
c) F (pois $\Delta > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$)

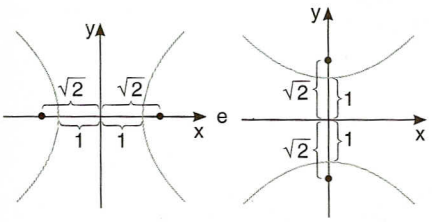
19 a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$

20 a) $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$
b) $F_1(0, 6)$ e $F_2(0, -6)$

21 $2c = 10$

22 $e = \frac{\sqrt{85}}{7}$

23



Não.

24 $F_1(0, -13)$ e $F_2(0, 13)$

25 $16x^2 + 25y^2 = 625$

26 $\{(2\sqrt{2}, 1), (2\sqrt{2}, -1), (-2\sqrt{2}, 1), (-2\sqrt{2}, -1)\}$

27 $\left(\frac{20\sqrt{82}}{41}, \frac{9\sqrt{41}}{41}\right), \left(\frac{20\sqrt{82}}{41}, \frac{-9\sqrt{41}}{41}\right), \left(\frac{-20\sqrt{82}}{41}, \frac{9\sqrt{41}}{41}\right), \left(\frac{-20\sqrt{82}}{41}, \frac{-9\sqrt{41}}{41}\right)$

28 $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x + 2$

29 $3x - y \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

30 a) $y^2 = 12x$
b) $x^2 = 8y$
c) $x^2 = -12y$

31 $x = -2$

32 $F(-4, 0)$ e $(d)x = 4$

33 $x^2 = 12y$

34 $y^2 = x$

35 5

36 $\lambda \cap \lambda' = \{(1, 1), (1, -1)\}$

37 dois pontos: (0, 0) e (1, 1)

38 $m \leq \frac{1}{2}$

39 $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{12}(x - 3)$

40 a) (1, 1) e (–1, 1) b) 45° ou 135°

TESTES DE VESTIBULARES

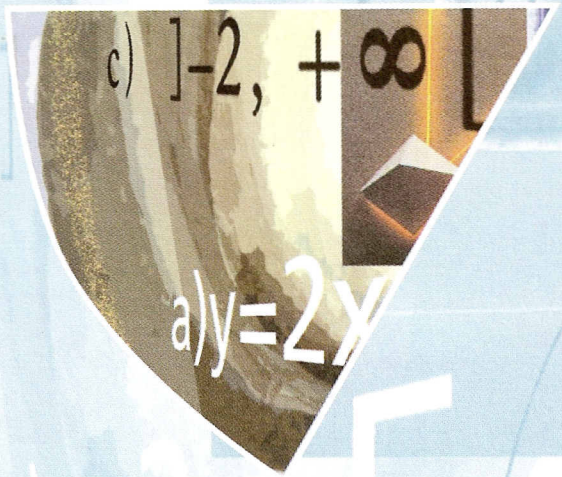
1 b **5** b **9** e **13** c, d

2 c **6** c **10** a, e **14** d

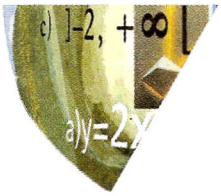
3 d **7** b **11** c

4 a **8** e **12** a) F b) F c) F d) V

• ÁLGEBRA III •



Parte 8



38

NÚMEROS COMPLEXOS

1 ○ Introdução

Quando resolvemos a equação do 2º grau $x^2 + 2x + 5 = 0$, por exemplo, utilizando a fórmula de Bháskara, encontramos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Para determinar o valor de x, é preciso calcular a raiz quadrada de -16. Em $\mathbb{R}$, porém, isso é impossível, pois não existe um número m real tal que $m^2 = -16$.

A necessidade de obter uma solução para esse tipo de problema levou os matemáticos a procurar novos conjuntos em que "o quadrado de certo elemento pudesse ser negativo".

Historicamente, uma equação era vista como a formulação matemática de um problema concreto; assim, se no processo de resolução aparecia um radicando negativo, os matemáticos concluíam, simplesmente, que o problema não tinha solução prática.

Muitos matemáticos procuraram dar uma solução para esse problema, principalmente os italianos Girolamo Cardano (1501-1576) e Raphael Bombelli (1526-1573), no século XVI, os quais deram importantes contribuições para o entendimento dessa questão.

O reconhecimento de números dessa natureza na matemática só ganhou impulso e legitimação com uma poderosa interpretação geométrica, proposta por Gauss (1777-1855) e que você poderá ver na página 612.

Operações com pares ordenados

Consideremos o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) do plano cartesiano, em que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes definições:

- **1ª** *Igualdade:* $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
- **2ª** *Adição:* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

  Exemplo:
  $(-1, 2) + (3, 4) = (-1 + 3, 2 + 4) = (2, 6)$
- **3ª** *Multiplicação:* $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

  Exemplos:
  a) $(1, 2) \cdot (3, 1) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3) = (1, 7)$
  b) $(-3, 4) \cdot (2, -3) = (-6 - (-12), 9 + 8) = (6, 17)$

Observação

Todo par ordenado na forma (x, 0) pode ser identificado pelo número real x, isto é:

$$x = (x, 0), \text{ para todo } x \text{ real}$$

Para ilustrar esse fato, observe que:

a) $(2, 0) + (3, 0) \overset{2^{\circ}\ \text{def.}}{=} (2 + 3, 0 + 0) = (5, 0)$ e $2 + 3 = 5$

b) $(2, 0) \cdot (3, 0) \overset{3^{\circ}\ \text{def.}}{=} (2 \cdot 3 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3) = (6, 0)$ e $2 \cdot 3 = 6$

O que há de verdadeiramente novo nesse estudo de pares ordenados de números reais (o qual se relaciona com a apresentação inicial) é o produto do par ordenado (0, 1) por ele mesmo:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) \overset{3^{\circ}\ \text{def.}}{=} (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

Se chamarmos o par ordenado (0, 1) de *unidade imaginária* e o representarmos por i, teremos $i \cdot i = -1$, isto é, $i^2 = -1$.

Assim, a novidade é que "o quadrado de certo elemento é igual a um número negativo".

Dizemos que i é uma raiz quadrada de -1.

Definição

Chama-se *conjunto dos números complexos*, e representa-se por $\mathbb{C}$, o conjunto de pares ordenados de números reais.

$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y)$, sendo $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

Observemos que, dado um número complexo z = (x, y), temos:

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \end{aligned}$$

Como $(x, 0) = x$, $(y, 0) = y$ e $(0, 1) = i$, podemos escrever:

$$(x, y) = x + yi \quad \text{ou} \quad z = x + yi$$

Vejamos alguns exemplos:

$(2, 3) = 2 + 3i$	$(5, -2) = 5 - 2i$	$(-1, 4) = -1 + 4i$
$(1, 1) = 1 + i$	$(5, 0) = 5 + 0i = 5$	$(0, 2) = 0 + 2i = 2i$

Dessa forma, todo número complexo z = (x, y) pode ser escrito na forma $z = x + yi$, chamada *forma algébrica*. O número real x é chamado *parte real de z*, e o número real y é chamado *parte imaginária de z*. Indica-se por:

$$x = \text{Re}(z) \quad \text{e} \quad y = \text{Im}(z)$$

Vejamos outros exemplos:

$z = 2 + 3i \rightarrow \text{Re}(z) = 2 \text{ e } \text{Im}(z) = 3$

$z = -5 + i \rightarrow \text{Re}(z) = -5 \text{ e } \text{Im}(z) = 1$

$z = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i \rightarrow \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \text{ e } \text{Im}(z) = -\frac{3}{4}$

$z = 2 \rightarrow \text{Re}(z) = 2 \text{ e } \text{Im}(z) = 0$

$z = -3i \rightarrow \text{Re}(z) = 0 \text{ e } \text{Im}(z) = -3$

Observações

1ª) Quando Im(z) = 0, z é um número real. Exemplos:

$$z_1 = 5; \quad z_2 = -2; \quad z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2ª) Quando Re(z) = 0 e Im(z) ≠ 0, z é um número *imaginário puro*.
Exemplos:

$$z_1 = 2i; \quad z_2 = -i; \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{5}\,i$$

Exemplo 1

Para que o número complexo $z = (m - 2) + 5i$ seja *imaginário puro* é preciso que se tenha Re(z) = 0, isto é, $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$.

Exemplo 2

Quais os valores complexos de x que satisfazem a equação $x^2 + 25 = 0$?
Temos:

$$x^2 = -25 \Rightarrow x^2 = 25i^2 \Rightarrow x = -5i \quad \text{ou} \quad x = 5i$$

Observe que: $(\pm 5i)^2 = 25i^2 = -25$; dizemos que $5i$ e $-5i$ são as raízes quadradas de -25.

Exemplo 3

Vamos resolver a equação $x^2 - 6x + 10 = 0$, no universo dos números complexos.
Temos:

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 = 4 \cdot i^2$$

$$x = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i \rightarrow S = \{3 + i, 3 - i\}$$

Exercícios

1 Identifique a parte real e a parte imaginária de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 2 + 7i$
b) $z_2 = -4 + 3i$
c) $z_3 = -10i$
d) $z_4 = \frac{1 + 5i}{3}$
e) $z_5 = 5$
f) $z_6 = 0$

2 Nos itens seguintes, $m \in \mathbb{R}$. Forneça as condições sobre os valores de m a fim de que:

a) $z = 2 + (m - 4)i$ seja real.
b) $z = (2m - 6) + 4i$ seja imaginário puro.
c) $z = (2 + m) + (4 - m^2)i$ seja imaginário puro.

3 Seja $z = (4 - x, 2x - 3)$:

a) Escreva z na forma algébrica.
b) Determine $x \in \mathbb{R}$ para que se tenha Re(z) > 0.
c) Determine x para que z seja um número real.

4 Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações:

a) $x^2 + 4 = 0$
b) $x^2 - 4x + 29 = 0$
c) $x \cdot (x - 1) = -1$
d) $x^2 - 6x + 25 = 0$
e) $2x^4 - x^2 = 3$ (faça $x^2 = y$)
f) $x^3 - 12x^2 + 40x = 0$

2 ○ Igualdade entre números complexos

Lembremos, inicialmente, que um número complexo é um *par ordenado* de números reais. Assim, dados dois números complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, segue que $(a, b) = (c, d)$ quando $a = c$ e $b = d$. Escrevendo z_1 e z_2 na forma algébrica, obtemos a igualdade:

$$\underbrace{a + bi}_{z_1} = \underbrace{c + di}_{z_2} \text{ quando } a = c \text{ e } b = d,$$

isto é, dois números complexos são iguais quando apresentam, simultaneamente, partes reais iguais e partes imaginárias iguais.

Exemplo 4

Vamos encontrar os valores de x e y para que ocorra a igualdade:

$$(x - 2) + (y + 1)i = 3 - 4i$$

- Igualando as *partes reais*, vem:

$$x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5$$

- Igualando as *partes imaginárias*, vem:

$$y + 1 = -4 \Rightarrow y = -5$$

Exercícios

5 Determine x e y para que se tenha: $2x + i = -1 + yi$.

6 Encontre os valores de x e y de modo que: $(x + y) + (2x - 3y)i = 1 - 2i$.

7 Seja $z = (m - 2, n^2 - 4)$. Determine os valores de m e n para que se tenha:

a) $z = (5, 1)$ b) $z = 17i$ c) $z = 0$

3 ○ Operações com números complexos

Adição e subtração

Vamos recordar a definição de adição de pares apresentada na introdução deste capítulo: dados $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, tem-se que $z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$.

Escrevendo esses pares na forma algébrica, obtemos a igualdade:

$$\underbrace{(a + bi)}_{z_1} + \underbrace{(c + di)}_{z_2} = \underbrace{(a + c) + (b + d)i}_{z_1 + z_2}$$

Isso significa que, para somar dois números complexos, devemos somar separadamente suas partes reais e suas partes imaginárias.

A mesma idéia se aplica à subtração:

$$\underbrace{(a + bi)}_{z_1} - \underbrace{(c + di)}_{z_2} = \underbrace{(a - c) + (b - d)i}_{z_1 - z_2}$$

Exemplo 5

Vamos efetuar as seguintes operações:

- $(4 + 2i) + (3 - 5i) = 4 + 2i + 3 - 5i = 7 - 3i$
- $(1 - 3i) - (4 + 3i) = 1 - 3i - 4 - 3i = -3 - 6i$

Observe que, na adição e subtração, reduzimos os "termos semelhantes", como fazemos com expressões algébricas.

Exemplo 6

Sendo $z_1 = (2, m)$ e $z_2 = (n, 1)$, vamos encontrar m e n de modo que $z_1 + z_2 = (-3, 5)$. Podemos fazer isso de dois modos:

▶ *1º modo:* Trabalhando com pares ordenados

$$z_1 + z_2 = (2, m) + (n, 1) = (2 + n, m + 1)$$

Devemos ter:

$$(2 + n, m + 1) = (-3, 5) \Rightarrow \begin{cases} 2 + n = -3 \\ m + 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow n = -5 \text{ e } m = 4$$

▶ *2º modo:* Escrevendo os pares na forma algébrica

$$z_1 = (2, m) = 2 + mi, \quad z_2 = (n, 1) = n + i$$
$$z_1 + z_2 = (2 + mi) + (n + i) = (2 + n) + (m + 1)i$$

Como $(-3, 5) = -3 + 5i$, devemos ter:

$$(2 + n) + (m + 1)i = -3 + 5i, \text{ isto é,}$$
$$2 + n = -3 \Rightarrow n = -5$$
$$m + 1 = 5 \Rightarrow m = 4$$

Exercícios

8 Efetue:

a) $(2 + i) + (4 - 2i)$

b) $(7 - 3i) - (2 - 5i)$

c) $i + (4 - 3i) - (1 - i)$

d) $-3 + (3 + 2i) + (-1 - 4i) - (2 + i)$

9 Sejam os números complexos $z_1 = 7 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$ e $z_3 = 2i$. Determine:

a) $z_1 - z_2 + z_3$

b) $-i - z_1 + z_3 - z_2$

c) $(z_3 - z_2) + (z_2 - z_1)$

10 Determine x e y reais em $(2 + xi) + (y - 3i) = 4 - 5i$.

11 Sejam $z_1 = (x^2, 2)$ e $z_2 = (-3, 5y)$. Determine x e y a fim de que:

a) $z_1 + z_2 = (1, 7)$

b) $z_2 - z_1 = (-19, 0)$

12 Sejam os números complexos $z_1 = (0, b)$, $z_2 = (a - 2) + ci$ e $z_3 = 5 - (2b + 3c + 1)i$. Determine a, b e c de modo que $z_1 + z_2 = z_3 - z_2$ e $z_1 + z_3 = (5, 4)$.

Multiplicação

Dados dois números complexos, z_1 e z_2, para determinar $z_3 = z_1 \cdot z_2$, devemos aplicar a propriedade distributiva, lembrando que $i^2 = -1$, e depois reduzir os "termos semelhantes".

Exemplo 7

Observemos os seguintes produtos:

a) $(2 + 3i) \cdot (4 - 5i) = 8 - 10i + 12i - 15\underbrace{i^2}_{-1} = 8 - 10i + 12i + 15 = 23 + 2i$

b) $4i(2 + i) = 8i + 4i^2 = -4 + 8i$

c) $(3 - 2i)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i$

Observação

A técnica usada nos exemplos anteriores conduz ao mesmo resultado que se obtém usando a definição apresentada para se multiplicarem pares ordenados.

De fato, dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

- usando a definição da página 603:
  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ (*)
- operando na forma algébrica:
  $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bd\underbrace{i^2}_{-1} = (ac - bd) + i(ad + bc)$, cujas parcelas representam o par ordenado obtido em (*).

De modo geral, é mais prático usar a *forma algébrica* para multiplicar números complexos.

Exemplo 8

Vamos determinar $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ para que $z = (x + yi) \cdot (-5 + 4i)$ seja igual a $-41i$.

- É preciso aplicar a distributiva:
$$z = -5x + 4xi - 5yi + 4y\underbrace{i^2}_{-1}$$
- Agrupar parte real e parte imaginária:
$$z = (-5x - 4y) + i(4x - 5y)$$
- Igualar z a $-41i$, isto é, $(-5x - 4y) + i(4x - 5y) = -41i$. Temos:
$$\begin{cases} -5x - 4y = 0 \\ 4x - 5y = -41 \end{cases} \Rightarrow x = -4 \text{ e } y = 5$$

Exercícios

13 Efetue:

a) $(-7 + 2i) \cdot (1 - i)$
b) $(4 - i) \cdot (3 + i)$
c) $(5 - 2i) \cdot (1 + i) - (2 + i)$
d) $2 + i \cdot (3 - i)$
e) $(-3 + 2i) \cdot (-3 - 2i)$
f) $(4 + 3i)^2$

14 Efetue:

a) $(3 + i)^2 - i(3 + i) \cdot (3 - i)$
b) $(1 + i)^4$
c) $(1 + i)^5 \cdot (1 - i)^5$
d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

15 (U. F. São Carlos-SP) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $z = x + yi$ um número complexo.

a) Calcule o produto $(x + yi) \cdot (1 + i)$.
b) Determine x e y, para que se tenha $(x + yi) \cdot (1 + i) = 2$.

16 Dados os números complexos $z_1 = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $z_2 = (2, -5)$, determine:

a) $z_1 \cdot z_2$
b) z_2^2

17 (PUC-RJ) Qual é o valor de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right)^2$?

18 Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z = (4 - xi) \cdot (2 + i)$. Determine x para que:

a) z seja um número real
b) z seja imaginário puro
c) $i \cdot z$ seja imaginário puro

19 Quais os possíveis valores reais de x e y que satisfazem a igualdade $(x + yi)^2 = 4i$?

20 Determine z, $z \in \mathbb{C}$, tal que $z^2 = iz$.

21 Determine z, $z \in \mathbb{C}$, tal que $z^2 = -4i$. (Sugestão: faça $z = a + bi$.)

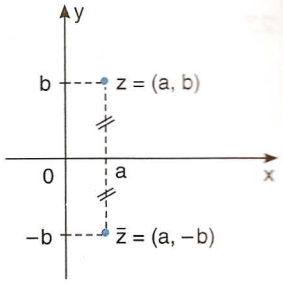
Conjugado de um número complexo

Dado um número complexo $z = (a, b)$, consideremos o par ordenado simétrico a z em relação ao eixo x. Tal par é chamado *conjugado* de z, e é indicado por $\bar{z}$.

Acompanhe a figura ao lado.

Trabalhando com os pares na forma algébrica, dizemos que, se $z = a + bi$, seu conjugado é $\bar{z} = a - bi$.

Assim, por exemplo:



- $z = 2 + 4i \Rightarrow \bar{z} = 2 - 4i$
- $z = -5 - 7i \Rightarrow \bar{z} = -5 + 7i$
- $z = 4i \Rightarrow \bar{z} = -4i$
- $z = 5 \Rightarrow \bar{z} = 5$

Exemplo 9

É possível encontrar $z \in \mathbb{C}$, tal que $(\bar{z})^2 = z$?

Fazendo $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, vem:

$$(a - bi)^2 = a + bi \Rightarrow a^2 - 2abi - b^2 = a + bi \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a & \text{(I)} \\ -2ab = b & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) vem:

$$-2ab - b = 0 \Rightarrow b \cdot (-2a - 1) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ ou } a = -\frac{1}{2}$$

▶ *1º caso:* Quando $b = 0$, em (I) temos:

$$a^2 - 0^2 = a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 1$$

Assim, $z = 0$ ou $z = 1$

▶ *2º caso:* Quando $a = -\frac{1}{2}$, em (I) vem:

$$\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Resposta: $z = 0$, $z = 1$, $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Exercícios

22 Determine o conjugado de cada um dos seguintes números complexos:

a) $1 + 3i$ b) $-2 + 7i$ c) $-\frac{11}{2}i$ d) 0 e) -5

23 Efetue:

a) $\overline{2 + 3i} + i(\overline{1 - i})$

b) $(2 + i) \cdot (\overline{3 - 4i}) + 2 - 5i$

c) $\overline{11 - 3i} + \overline{2 + i} + \overline{4} - \overline{i}$

d) $\overline{i(-2i)^2}$

24 Dados $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $x \in \mathbb{R}$, prove que:

a) $\overline{x} = x$ b) $\overline{x \cdot z_1} = x \cdot \overline{z}_1$ c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

25 Sejam $z_1 = (3, -2)$ e $z_2 = (-4, 3)$. Determine $z_3 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{z}_1 + \overline{z}_3 = i - \overline{z}_2$.

26 (UF-MS, adaptado) Quais os números complexos z que satisfazem a equação $z^2 = -i \cdot \overline{z}$?

27 Determine z, $z \in \mathbb{C}$, que satisfaz cada uma das equações seguintes:

a) $(\overline{z})^2 = -3i$ b) $\overline{z} + 2(z + 1) = \overline{-4 - 4i}$

Divisão

Sejam dois números complexos, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, sendo $z_2 \neq 0$. Dividir z_1 por z_2 é obter um número complexo $z_3 = x + yi$, tal que $\frac{z_1}{z_2} = z_3$, ou seja, $z_1 = z_2 \cdot z_3$.

Vamos determinar $z_3 = x + yi$ na igualdade acima.
Temos:

$$z_1 = z_2 \cdot z_3 \Rightarrow a + bi = (c + di) \cdot (x + yi) \Rightarrow a + bi = (cx - dy) + i(cy + dx).$$

Do conceito de igualdade segue o sistema nas variáveis x e y:

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Então:

$$z_3 = \underbrace{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right)}_{\text{parte real}} + i\underbrace{\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)}_{\text{parte imaginária}} \text{ (I)}$$

A determinação de z_3, contudo, fica facilitada se notarmos que, no quociente $\frac{z_1}{z_2}$, ao multiplicarmos numerador e denominador pelo conjugado do denominador, obtemos (I).

De fato:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - (di)^2} =$$

$$= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + i\left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

Exemplo 10

Façamos as seguintes divisões:

a) $\frac{4 + i}{3 - i} = \frac{4 + i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{12 + 4i + 3i + i^2}{3^2 - i^2} = \frac{11 + 7i}{10} = \frac{11}{10} + \frac{7}{10}i$

(multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado de $3 - i$)

b) $\frac{5 + 3i}{-2i} = \frac{5 + 3i}{-2i} \cdot \frac{2i}{2i} = \frac{10i + 6i^2}{-4i^2} = \frac{-6 + 10i}{4} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$

Exemplo 11

Seja $z = \frac{2 + i}{3 - xi}$. Como podemos determinar o valor real de x para que z seja um número real?

- É preciso escrever z na forma algébrica. Para isso, fazemos a divisão:

$$z = \frac{2 + i}{3 - xi} \cdot \frac{3 + xi}{3 + xi} = \frac{6 + 2xi + 3i + xi^2}{3^2 - (x \cdot i)^2} = \frac{(6 - x) + i(2x + 3)}{9 + x^2}$$

- Identificamos Re(z) e Im(z):

$$z = \underbrace{\frac{6 - x}{9 + x^2}}_{\text{Re}(z)} + i \underbrace{\frac{2x + 3}{9 + x^2}}_{\text{Im}(z)}$$

- Impomos a condição Im(z) = 0, isto é, $\frac{2x + 3}{9 + x^2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Exercícios

28 Efetue:

a) $\frac{4 - 5i}{2 + 3i}$ c) $\frac{9 - 3i}{-2 + 5i}$ e) $\frac{1}{3 - 4i}$

b) $\frac{1 + i}{i}$ d) $\frac{-3i}{2 - i}$

29 Sendo $z = 2 + 3i$, determine:

a) o inverso de z^2 b) o conjugado do inverso de z

30 Seja $z = \frac{2 - 3i}{1 + xi}$. Determine $x \in \mathbb{R}$ para que se tenha:

a) Re(z) = 0 b) Im(z) = –2 c) Re(z) > Im(z)

31 Determine $a \in \mathbb{R}$, de modo que o número $z = \frac{4 + 3i}{x - i}$ seja real.

32 Determine $a \in \mathbb{R}$, de modo que $z = \frac{2 + ai}{1 - i}$ seja imaginário puro. Nessas condições, determine também z.

33 Ao dividirmos $3 + 2i$ por z obtivemos como quociente o número complexo $1 - i$. Determine z.

34 (U. F. Viçosa-MG) Sendo i a unidade imaginária dos números complexos, qual é o valor da expressão $\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$?

4 Potências de *i*

Seja i a unidade imaginária. Vamos calcular i^n, para alguns valores naturais de n. Temos:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

Como vemos, os resultados de i^n ($n \in \mathbb{N}$), com o expoente n variando, repetem-se de quatro em quatro unidades.

Notemos que, para $n \in \mathbb{N}$:

- $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$ (O expoente $4n$ representa os números que são divisíveis por 4.)
- $i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$ (O expoente $4n + 1$ representa os números que, divididos por 4, deixam resto 1.)
- $i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$ (O expoente $4n + 2$ representa os números que, divididos por 4, deixam resto 2.)
- $i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$ (O expoente $4n + 3$ representa os números que, divididos por 4, deixam resto 3.)

Dessa forma, para calcular i^n basta calcular i^r, sendo r o resto da divisão de n por 4.

Exemplo 12

Vamos calcular i^{83} e $(-i)^{118}$.

- Dividimos 83 por 4: $\begin{array}{r|l} 83 & 4 \\ r \rightarrow 3 & 20 \end{array}$ Daí, $i^{83} = i^3 = -i$.
- Observemos que:

$$(-i)^{118} = [(-1) \cdot i]^{118} = \underbrace{(-1)^{118}}_{\| \\ 1} \cdot i^{118} = i^{118} \ (*)$$

Dividindo 118 por 4, encontramos: $\begin{array}{r|l} 118 & 4 \\ 38 & 29 \\ r \rightarrow 2 & \end{array}$ Então, $i^{118} = i^2 = -1$ e, em (*), $(-i)^{118} = -1$.

Exercícios

35 Calcule:

a) i^{17} c) i^{42} e) $(-i)^{59}$

b) i^{36} d) i^{63} f) $(-2i)^9$

36 Efetue:

a) $-(-i)^{13} + i^{123}$ b) $\dfrac{i^{43} + i^{158}}{i^{21}}$ c) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \ldots i^{10}$

37 (Uneb-BA) Se i é a unidade imaginária, qual é o valor de $i^{25} + i^{39} - i^{108} + i \cdot i^{50}$?

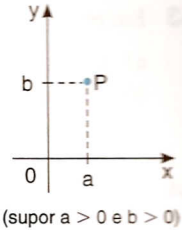
38 Qual é o valor de $\sum_{n=0}^{100} i^n$?

39 (Funrei-MG) Sendo n um número natural e i a unidade imaginária, é *correto* afirmar que todos os possíveis valores da expressão $i^n + i^{-n}$ constituem um conjunto X. Determine X.

5 O Plano de Argand-Gauss

Vamos, neste item, aprofundar a interpretação geométrica e apresentar uma nomenclatura importante sobre os números complexos.

Seja o número complexo z = (a, b), a $\in \mathbb{R}$ e b $\in \mathbb{R}$, cuja forma algébrica é z = a + bi. Representando-o no plano x0y, marcamos sobre os eixos 0x e 0y, respectivamente, a parte real (*a*) e a parte imaginária (*b*) de *z*, obtendo o ponto *P*:



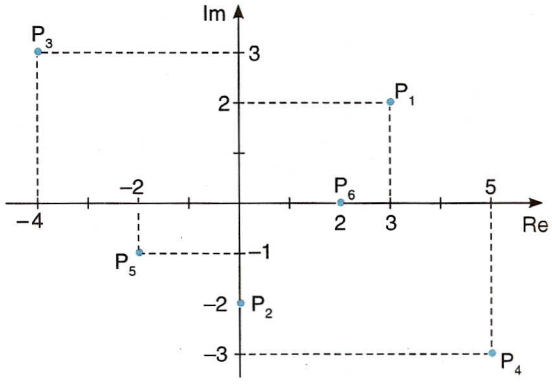
(supor a > 0 e b > 0)

- O ponto *P* recebe o nome de *afixo* ou *imagem geométrica de z*.
- O plano cartesiano é chamado *plano complexo* ou *plano de Argand-Gauss*.
- O eixo 0x, chamado *eixo real*, é indicado por Re; o eixo 0y, chamado *eixo imaginário*, é indicado por Im.

Observe como ficam dispostos no plano os afixos dos seguintes números complexos: $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = -4 + 3i$, $z_4 = 5 - 3i$, $z_5 = -2 - i$ e $z_6 = 2$.

Como vimos:

- a z_1 está associado o ponto $P_1(3, 2)$
- a z_2 está associado o ponto $P_2(0, -2)$
- a z_3 está associado o ponto $P_3(-4, 3)$
- a z_4 está associado o ponto $P_4(5, -3)$
- a z_5 está associado o ponto $P_5(-2, -1)$
- a z_6 está associado o ponto $P_6(2, 0)$



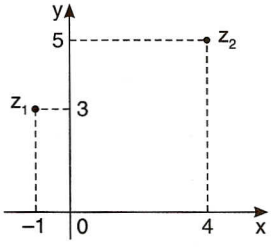
Exercícios

40 Determine, no plano de Argand-Gauss, o afixo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 2 + 5i$ c) $z_3 = 1 - i$ e) $z_5 = -3 - 2i$ g) $z_7 = -4 + 3i$

b) $z_2 = 3i$ d) $z_4 = -2$ f) $z_6 = i^3$ h) $z_8 = 0$

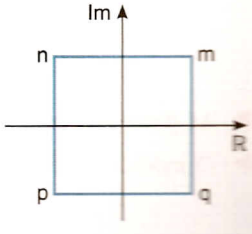
41 (Unificado-RJ)



Sejam z_1 e z_2 números complexos representados pelos seus afixos na figura acima. Dê a forma algébrica do número complexo dado pelo produto de z_1 pelo conjugado de z_2.

42 (UFF-RJ) Considere os números complexos *m*, *n*, *p* e *q* vértices de um quadrado com lados paralelos aos eixos e centro na origem, conforme a figura ao lado.

Qual é o número complexo correspondente a m + n + p + q?



43 Em relação à questão anterior, analise as seguintes afirmações, assinalando *V* ou *F*:

a) $m + q$ é um número real.

b) $\overline{n} + \overline{m}$ é um número imaginário puro.

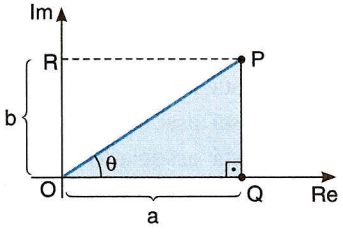
c) im estaria representado no 3º quadrante.

44 (Mackenzie-SP) No plano de Argand-Gauss, os complexos z tais que $\begin{cases} \overline{z} \cdot z = 9 \\ (\overline{z})^2 = z^2 \end{cases}$ são vértices de um polígono. Qual é a área desse polígono?

45 (UF-CE) Calcule a área do triângulo cujos vértices são as imagens, no plano cartesiano, das raízes da equação $z^3 + z^2 + z = 0$, tendo como universo o conjunto dos números complexos.

6 ○ Módulo

Seja $z = a + bi$ a forma algébrica de um número complexo cujo afixo ou imagem geométrica é o ponto P(a, b). Vamos supor que *P* pertença ao 1º quadrante, como indica a figura ao lado:



Unindo *P* à origem *O*, obtemos o segmento $\overline{OP}$.

O triângulo PQO é retângulo em *Q*. Aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (PQ)^2 \Rightarrow (OP)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$$

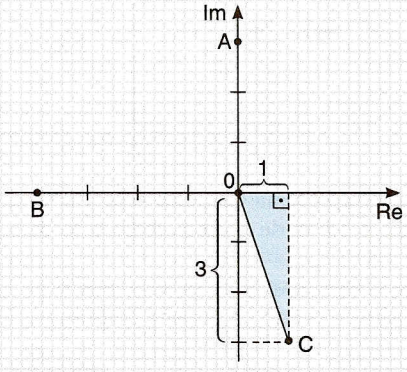
$$\Rightarrow \quad OP = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A medida de $\overline{OP}$ assim obtida é chamada *módulo de um número complexo*, e a indicamos por $|z|$ ou ρ (trata-se de uma letra grega; lê-se: "rô").

Dessa maneira, o módulo de um número complexo z é a *distância entre a origem e a imagem geométrica de z*.

Exemplo 13

Vamos calcular o módulo de cada um dos números complexos: $z_1 = 3i$, $z_2 = -4$ e $z_3 = 1 - 3i$. Os afixos correspondentes a z_1, z_2 e z_3 são, respectivamente: A(0, 3), B(–4, 0) e C(1, –3).



- As distâncias de *A* e *B* à origem são, respectivamente, iguais a 3 e 4. Assim, $|z_1| = 3$ e $|z_2| = 4$.
- O módulo de z_3 pode ser obtido através do teorema de Pitágoras no triângulo sombreado:

$$|z_3|^2 = 1^2 + 3^2 \Rightarrow |z_3|^2 = 10 \Rightarrow |z_3| = \sqrt{10}$$

Exemplo 14

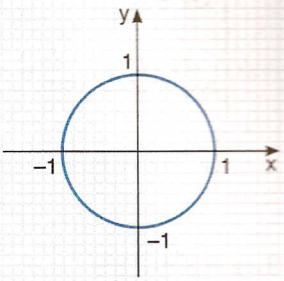
Represente geometricamente no plano de Argand-Gauss o seguinte subconjunto de $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Fazendo $z = x + iy$, com x e y reais, temos:

$$|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \ (*)$$

Desse modo, os pontos (x, y) que satisfazem (*) pertencem à circunferência de centro (0, 0) e raio unitário, conforme vemos na figura ao lado:



Exercícios

46 Calcule os módulos dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 1 - i$
b) $z_2 = -4i$
c) $z_3 = 3$
d) $z_4 = 2 + 3i$
e) $z_5 = -4 + 3i$
f) $z_6 = -1$
g) $z_7 = (0, 11)$
h) $z_8 = (-1, -2)$

47 O módulo do número complexo $z = 3 + 2xi$ é igual a 5. Determine x e represente z no plano complexo.

48 Represente geometricamente no plano de Argand-Gauss os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

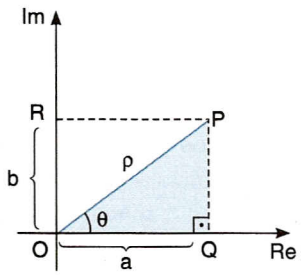
a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 5\}$
b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 1\}$
c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 1\}$
d) $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 \right\}$
e) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \bar{z}| = 6\}$
f) $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| \geqslant 2\}$

49 (UF-MS) Identifique o conjunto de pontos $z = x + iy$ do plano complexo, tais que a parte real do número $z + 1$ é igual a 2.

50 (Fuvest-SP)

a) Determine todas as soluções, no campo complexo, da equação $\bar{z} = iz^2$, em que i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$ e $\bar{z}$ é o conjugado de z.
b) Represente essas soluções no plano complexo.

7 Argumento



Retomemos a figura do item 6.

Consideremos θ o ângulo formado pela semi-reta $\overrightarrow{OP}$ e pelo semi-eixo real positivo, tomado a partir desse semi-eixo, no sentido anti-horário.

θ é chamado *argumento principal* ou *argumento de z*.

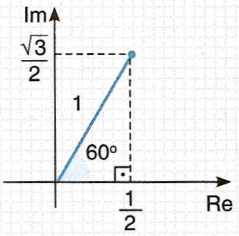
Observe que θ é tal que $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

$$\begin{cases} \text{sen } \theta = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{b}{\rho} \\ \cos \theta = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{a}{\rho} \end{cases}$$

Exemplo 15

Para determinar o argumento de $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, fazemos $\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



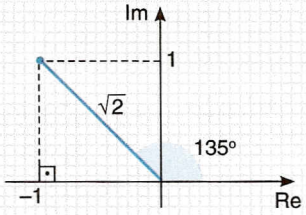
Da Trigonometria segue que $\theta = 60^\circ \left(\text{ou } \frac{\pi}{3}\right)$.

Exemplo 16

Qual é o argumento de $z = -1 + i$?

Temos: $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$



Daí, $\theta = 135^\circ \left(\text{ou } \frac{3\pi}{4}\right)$.

Exercícios

51 Determine o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = \sqrt{3} + i$

b) $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $z_3 = 3i$

d) $z_4 = \frac{-1}{2} + i\frac{1}{2}$

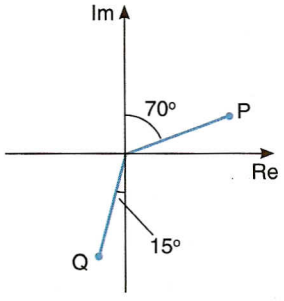
e) $z_5 = 11$

f) $z_6 = -\frac{3}{4}i$

g) $z_7 = -1 - i\sqrt{3}$

h) $z_8 = i^8$

52 Na figura, P é o afixo de z_1 e Q é o afixo de z_2. Determine os argumentos de z_1 e de z_2.



8 ○ Forma trigonométrica ou polar

Seja $z = a + bi \neq 0$ a forma algébrica de um número complexo. Vimos que o argumento θ de z satisfaz:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho \operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho\cos\theta \end{cases}$$

Substituindo tais valores na forma algébrica, vem:

$z = a + bi$

$z = \rho \cos \theta + \rho \operatorname{sen} \theta \cdot i$

$$z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \rightarrow \textit{forma trigonométrica de um número complexo}$$

Veremos, adiante, que a forma trigonométrica é muito útil e prática nas operações de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$.

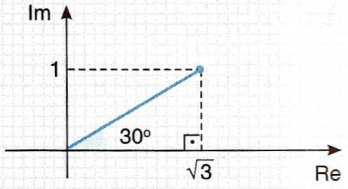
Exemplo 17

Vamos escrever na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $\sqrt{3} + i$ b) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ c) $3i$ d) -5

a) Temos:

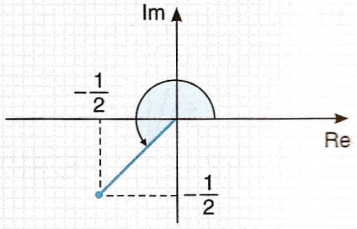
$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 30^\circ \left(\text{ou } \frac{\pi}{6}\right)$$



A forma trigonométrica é $z = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$.

b) $\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

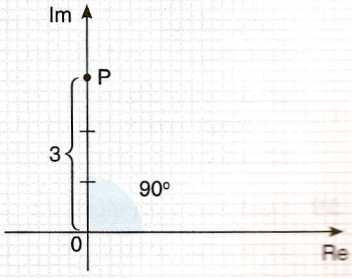
$$\begin{cases} \operatorname{sen} \theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \theta = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 225^\circ \left(\text{ou } \frac{5\pi}{4}\right)$$



A forma trigonométrica é:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$$

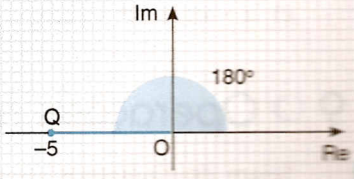
c) O afixo de $z = 3i$ é o ponto P da figura. Podemos, daí, concluir que $\rho = 3$ e $\theta = 90^\circ \left(\text{ou } \frac{\pi}{2}\right)$.



A forma trigonométrica é:

$$z = 3(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$$

d) O afixo de $z = -5$ é o ponto Q abaixo. Observando a figura, é fácil perceber que $\rho = 5$ e $\theta = \pi$ (ou 180°).
Logo, $z = 5(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$.



53 Escreva na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $z = 1 + i\sqrt{3}$

b) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

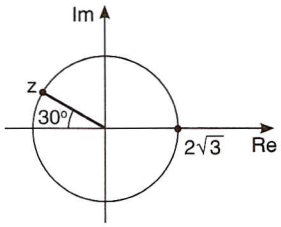
c) $z = -2i$

d) $z = -5\sqrt{2} + i5\sqrt{2}$

e) $z = 4$

f) $z = 1 + i$

54 (UF-MS)



Qual é a forma algébrica do número complexo z representado acima?

55 Obtenha a forma trigonométrica de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z = -4i \cdot (1 - i)$

b) $z = \frac{1}{1 + i\sqrt{3}}$

c) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

d) $z = \overline{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

e) $z = (2i)^{10} \cdot i^{84}$

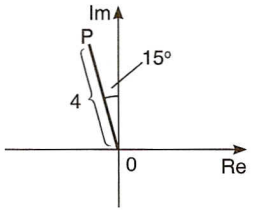
f) $z = \frac{1}{i - 1} - \frac{1}{i}$

56 (Unirio-RJ) Seja $z = x + yi$ um número complexo, com $\overline{z} = x - yi$ sendo o conjugado de z.

a) Represente no plano de Argand-Gauss o conjunto dos afixos dos números complexos tais que a soma de cada número com o seu conjugado seja igual a quatro.

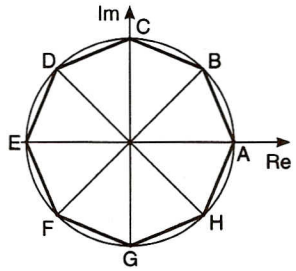
b) Determine, na forma trigonométrica, o número $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

57



Na figura, o ponto P é afixo de z.
Determine a forma algébrica de $\overline{z}$.

58 A figura seguinte representa um octógono regular inscrito numa circunferência.



Se a medida de $\overline{BF}$ é de 8 unidades, determine:

a) a forma trigonométrica dos números complexos z_2 e z_4, cujos afixos são os pontos B e D, respectivamente.

b) a forma algébrica de $\overline{z}_2$ e de $\overline{z}_4$.

59 Qual é a forma algébrica de cada um dos seguintes números complexos?

a) $z = 3(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

b) $z = \cos 180° + i \operatorname{sen} 180°$

c) $z = 4(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

d) $z = \sqrt{2} \cdot (\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

e) $z = 10(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

f) $z = \frac{1}{3} \cdot (\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$

9 ○ Operações na forma trigonométrica

Sejam dois números complexos: $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$.

Multiplicação

Queremos encontrar uma expressão para $z_1 \cdot z_2$ na forma trigonométrica. Temos:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) =$$

$$= \rho_1 \rho_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \underbrace{i^2}_{-1} \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) =$$

$$= \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)]$$

Assim:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2[\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)]$$

Notemos que o número complexo obtido é tal que:

- seu módulo é igual ao produto dos módulos de z_1 e z_2;
- seu argumento é igual à soma dos argumentos de z_1 e z_2.

Observação

Esse raciocínio pode ser generalizado para o produto de n números complexos $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$, isto é:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)]$$

Exemplo 18

Sendo $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$ e $z_2 = 3 \cdot (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot [\cos (30^\circ + 60^\circ) + i \operatorname{sen} (30^\circ + 60^\circ)]$$

isto é:

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ), \text{ ou ainda, } z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot (0 + i \cdot 1) = 6i$$

Divisão

Queremos encontrar uma expressão para $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

Temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{\rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} \cdot \underbrace{\frac{(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}}_{\text{multiplicamos numerador e denominador por } (\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)}{[\cos^2 \theta_2 - (i \operatorname{sen} \theta_2)^2]} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)}{\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2}$$

Assim:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 - \theta_2)]$$

Note que o número complexo obtido é tal que:

- seu módulo é igual ao quociente entre os módulos de z_1 e z_2;
- seu argumento é igual à diferença entre o argumento de z_1 e o argumento de z_2.

Exemplo 19

Sendo $z_1 = 9 \cdot (\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$ e $z_2 = 3 \cdot (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$, temos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{9}{3} \cdot [\cos (180^\circ - 30^\circ) + i \operatorname{sen} (180^\circ - 30^\circ)]$$

isto é:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3 \cdot (\underbrace{\cos 150^\circ}_{\frac{-\sqrt{3}}{2}} + i \underbrace{\operatorname{sen} 150^\circ}_{\frac{1}{2}}), \text{ ou ainda, } \frac{z_1}{z_2} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

Exercícios

60 Sejam os números complexos $z_1 = 2(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$, $z_2 = 4(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$ e $z_3 = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ$. Determine, na forma trigonométrica:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $z_2 \cdot z_3$

c) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

d) $\frac{z_1}{z_3}$

e) $\frac{z_1}{z_2}$

61 Sejam $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$.

Sabendo que $z_1 z_2 = 80 \cdot (\cos 160^\circ + i \operatorname{sen} 160^\circ)$ e $\frac{z_2}{z_1} = 5 \cdot (\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)$, escreva z_1 e z_2 na forma trigonométrica.

10 ○ Potenciação em $\mathbb{C}$

O cálculo da potência z^n, $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, fica muito trabalhoso quando escrevemos z na forma algébrica, pois temos que desenvolver $(a + bi)^n$ usando o binômio de Newton.

Considerando a forma trigonométrica $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, lembremos que $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ vezes}}$. Utilizando a expressão para o produto na forma trigonométrica, vem:

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \rho \cdot \ldots \cdot \rho}_{n \text{ vezes}} \cdot [\cos \underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{n \text{ vezes}} + i \operatorname{sen} \underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{n \text{ vezes}}]$$

isto é:

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)]$$

Esse resultado é conhecido como *fórmula de Moivre*.

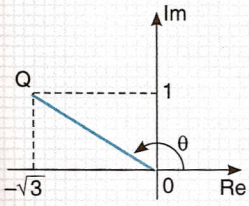
Exemplo 20

Se $z = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$, então $z^7 = 2^7 \cdot (\cos 7 \cdot 30^\circ + i \operatorname{sen} 7 \cdot 30^\circ)$, isto é, $z^7 = 128 \cdot (\underbrace{\cos 210^\circ}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + i \underbrace{\operatorname{sen} 210^\circ}_{-\frac{1}{2}})$, ou ainda, $z^7 = -64\sqrt{3} - 64i$.

Exemplo 21

Vamos calcular $(-\sqrt{3} + i)^{14}$.

- Seja $z = -\sqrt{3} + i$; é preciso escrever z na forma trigonométrica:



$$|z| = \rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \\ \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 150^\circ \left(\text{ou } \frac{5\pi}{6}\right)$$

A forma trigonométrica é: $z = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$

- Aplicando a *fórmula de Moivre* vem:

$$z^{14} = 2^{14} \cdot (\cos 14 \cdot 150^\circ + i \operatorname{sen} 14 \cdot 150^\circ) \Rightarrow z^{14} = 2^{14} \cdot (\cos 2100^\circ + i \operatorname{sen} 2100^\circ)$$

Como $2100^\circ = \underbrace{5 \cdot 360^\circ}_{\substack{5 \text{ voltas} \\ \text{completas}}} + 300^\circ$, segue que $z^{14} = 2^{14} \cdot (\underbrace{\cos 300^\circ}_{\frac{1}{2}} + i \underbrace{\operatorname{sen} 300^\circ}_{\frac{-\sqrt{3}}{2}})$, ou melhor,

$z^{14} = 2^{13} \cdot (1 - i\sqrt{3})$.

Exercícios

62 Sabendo que $z = 2 \cdot (\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$, calcule:

a) z^4 b) z^6

63 Calcule $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^5$ usando:

a) a fórmula de Moivre b) o desenvolvimento do binômio de Newton

64 Calcule:

a) $(1 + i\sqrt{3})^{15}$ c) $(-1 + i)^6$

b) $(\sqrt{3} - i)^5$ d) $\left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i\right)^{-12}$

65 (UF-RJ) Determine o menor inteiro $n \geqslant 1$ para o qual $(\sqrt{3} + i)^n$ é um número real positivo.

66 (Covest-PE) Determine o menor valor natural de n, $n \neq 0$, de modo que o número $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^n$ seja um número real negativo.

67 Dado o número complexo $z = 3 - 3i$ e $n \in \mathbb{N}$, determine:

a) o valor de z^n quando n é múltiplo de 4.

b) o menor valor de n para o qual z^n é imaginário puro.

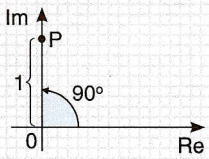
11 Radiciação em $\mathbb{C}$

Seja z um número complexo. Dizemos que z_k é uma raiz enésima de z se $(z_k)^n = z$. Vejamos alguns exemplos:

- Uma das raízes quadradas de -1 é i, pois $i^2 = -1$.
- Uma das raízes cúbicas de $-i$ é i, pois $i^3 = -i$.
- Uma das raízes quartas de 16 é $2i$, pois $(2i)^4 = 16$. Notemos que 2 e -2 também são raízes quartas de 16, pois $2^4 = 16$ e $(-2)^4 = 16$.

Exemplo 22

Vamos encontrar as raízes *quadradas* de $z = i$.



P(0, 1) é o afixo de z.

A forma trigonométrica de z é:

$$z = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}_{\text{convém aqui usar o ângulo em radiano}}$$

O problema consiste em determinar $z_k \in \mathbb{C}$, tal que $z_k^2 = i$.

Escrevendo $z_k = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ (*), segue a igualdade:

$$[\rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

Usando a *fórmula de Moivre* para potências vem:

$$\rho^2 \cdot (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$$

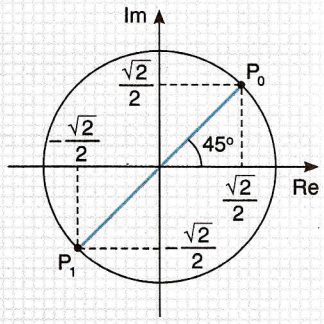
Igualando os módulos e argumentos vem:

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \end{cases}, \text{ isto é, } \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Atribuindo valores inteiros para k, obtemos:

- Se $k = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{em (*)}} z_0 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Se $k = 1$, $\theta = \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{\text{em (*)}} z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Se $k = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$, que é côngruo a $\frac{\pi}{4}$. Desta forma, o número complexo que iríamos encontrar coincidiria com a primeira raiz z_0.

Isso mostra que *não* é necessário fazer outras atribuições de valor para k.

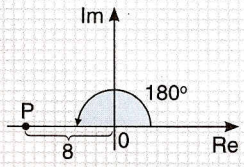


Representando os afixos de z_0 e z_1 no plano, vemos que P_0 e P_1 são extremidades de um *diâmetro* de uma circunferência de centro na origem e raio 1.

Observe que z_0 e z_1 possuem *mesmo módulo*; além disso, para obter o argumento de z_1 (225°), basta somar 180° ao argumento de z_0 (45°).

Exemplo 23

Vamos encontrar as raízes cúbicas de $z = -8$.



P(−8, 0) é o afixo de z.

A forma trigonométrica é:

$z = 8 \cdot (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$

Devemos determinar $z_k \in \mathbb{C}$, tal que $z_k^3 = -8$.

Escrevemos $z_k = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ (*) e usamos a *fórmula de Moivre*:

$$\rho^3 \cdot (\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta) = 8 \cdot (\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$$

Igualamos:

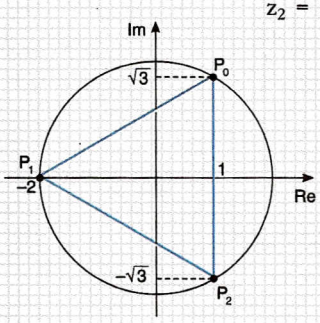
$$\begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \pi + k2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{60^\circ} + k \cdot \underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{120^\circ},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\,(60^\circ) \overset{(*)}{\Rightarrow} z_0 = 2(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ) \Rightarrow \boxed{z_0 = 1 + i\sqrt{3}}$$

Agora, para encontrar as demais raízes z_1 e z_2, basta somar, respectivamente, 120° e $2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$ ao argumento de z_0, que é 60° (lembre que o módulo das raízes é fixo):

$$z_1 = 2 \cdot (\cos 180^\circ + i\,\text{sen}\,180^\circ) \Rightarrow \boxed{z_1 = -2}$$

$$z_2 = 2 \cdot (\cos 300^\circ + i\,\text{sen}\,300^\circ) \Rightarrow \boxed{z_2 = 1 - i\sqrt{3}}$$



Observe que os afixos P_0, P_1 e P_2 das raízes z_0, z_1 e z_2, respectivamente, são vértices de um triângulo eqüilátero inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[3]{8} = 2$.

Exercícios

68 Calcule as raízes quadradas de -2. Represente seus afixos no plano e interprete geometricamente.

69 Determine as raízes cúbicas de 8 e represente seus afixos no plano.

70 (Unicamp-SP) Ache todas as raízes (reais e complexas) da equação $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

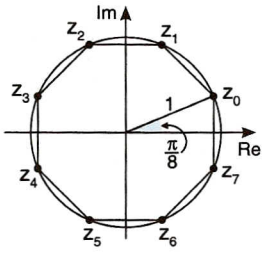
71 Uma das raízes quartas de $-8 + i8\sqrt{3}$ é $z_0 = \sqrt{3} + i$.

a) Determine o módulo e o argumento de z_0.

b) A partir do item anterior, encontre as demais raízes z_1, z_2 e z_3.

(Sugestão: lembre que as quatro raízes dividem o círculo em quatro partes iguais.)

72 Na figura ao lado, z_0, z_1, ..., z_7 são as raízes oitavas de -1. Escreva a forma trigonométrica de z_0, z_1, z_3 e z_6.



73 (Fuvest-SP) No plano complexo, cada ponto representa um número complexo. Nesse plano, considere um hexágono regular, com centro na origem, tendo i, a unidade imaginária, como um de seus vértices.

a) Determine os vértices do hexágono.

b) Determine um polinômio de grau 6, cujas raízes sejam os vértices do hexágono.

Testes de vestibulares

1 (Facs-BA) O módulo do complexo $\overline{1 + 2i} + i(1 - i) - \frac{2}{1 + i}$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$ d) 1
b) $\sqrt{3}$ e) 2
c) $\sqrt{5}$

2 (Furg-RS) Para que $(5 - 2i) \cdot (k + 3i)$ seja um número real, o valor de k deverá ser:

a) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{15}{2}$ e) 0
b) $-\frac{2}{15}$ d) $-\frac{15}{2}$

3 (Puccamp-SP) O argumento principal do número complexo $z = -1 + i\sqrt{3}$ é:

a) $\frac{5\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{6}$
b) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{3}$

4 (Fatec-SP) Sejam os números complexos $z_1 = \frac{1}{2} + i$ e $z_2 = 1 - \frac{1}{2}i$. O argumento principal de $z_1 - \overline{z}_2$ é:

a) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{7\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{8}$
b) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{4}$

5 (Unirio-RJ) Um complexo z possui módulo igual a 2 e argumento $\frac{\pi}{3}$. Sendo $\overline{z}$ o conjugado de z, a forma algébrica do complexo $\overline{z}$ é:

a) $1 - i\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3} + i$ e) $2(\sqrt{3} - i)$
b) $\sqrt{3} - i$ d) $1 + i\sqrt{3}$

6 (Ucsal-BA) Se o número complexo $z = a + bi$ é tal que $z^2 = (\overline{z})^2$, então é verdade que:

a) $a = 0$ e $b \neq 0$ d) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$
b) $a = 0$ ou $b = 0$ e) $a \neq 0$ e $b \neq 0$
c) $a \neq 0$ e $b = 0$

7 (UF-SE) Seja o número complexo $z = 1 + i$. O argumento principal de z^2 é:

a) 30° d) 90°
b) 45° e) 120°
c) 60°

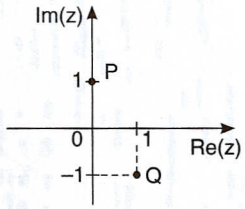
8 (Cefet-MG) O número complexo z que verifica a equação $iz + 2\overline{z} - 1 + i = 0$ é:

a) $1 - i$ d) $-1 - i$
b) $1 + i$ e) $\frac{1 - i}{2}$
c) $-1 + i$

9 (Unificado-RJ) Considere um número complexo z tal que o seu módulo é 10 e a soma dele com o seu conjugado é 16. Sabendo que o afixo de z pertence ao 4º quadrante, pode-se afirmar que z é igual a:

a) $6 + 8i$ c) 10 e) $6 - 8i$
b) $8 + 6i$ d) $8 - 6i$

10 (Puccamp-SP) Considere os números complexos z_1 e z_2 cujas imagens são, respectivamente, os pontos P e Q representados na figura ao lado.



O número complexo $z = z_1^3 \cdot \overline{z}_2$, em que $\overline{z}_2$ é o conjugado de z_2, é igual a:

a) $1 - i$ c) $-1 + i$ e) $2i$
b) $1 + i$ d) $-2i$

11 (UA-AM) Dado o número complexo $z = a \cdot (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ com $a = 4$, $\beta = \frac{\pi}{8}$. Então, o conjugado do número complexo z^2 é:

a) $4 \cdot (\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2})$ d) $\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$
b) $8 \cdot (\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2})$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $2 \cdot (\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2})$

12 (PUC-RJ) Seja z o número complexo $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, em que $i = \sqrt{-1}$. Então, $\frac{1}{z^2 - z}$ é:

a) -2 d) 1
b) -1 e) 2
c) $1 + i\sqrt{3}$

13 (Fuvest-SP) Sendo i a unidade imaginária ($i^2 = -1$), pergunta-se: quantos números reais a existem para os quais $(a + i)^4$ é um número real?

a) 1 c) 3 e) infinitos
b) 2 d) 4

14 (UF-CE) Seja z_0 o número complexo que é raiz da equação $\frac{iz + (1 - 3i)}{1 + i} = 4i$ (lembre-se que $i^2 = -1$). Então, $|z_0|$ é igual a:

a) $2\sqrt{11}$ c) 8 e) $2\sqrt{21}$
b) $3\sqrt{6}$ d) $\sqrt{74}$

15 (PUC-RS) Se as imagens geométricas dos números complexos 0, z e $\bar{z}$ no plano de Argand-Gauss são os vértices de um triângulo eqüilátero, então a medida do segmento que une as imagens de z e $\bar{z}$ é:

a) $\frac{|z|}{2}$ c) $|z|$ e) $\text{Im}(z)$
b) $\frac{|\bar{z}|}{2}$ d) $2\,\text{Re}(z)$

16 (Cefet-PR) Considere o número complexo $3 + \sqrt{3}\,i$, representado por um ponto no plano de Argand-Gauss. Se multiplicarmos este número por uma unidade imaginária *i*, o segmento de reta que une este ponto à origem do sistema sofrerá uma rotação de:

a) 30° no sentido anti-horário
b) 150° no sentido horário
c) 120° no sentido horário
d) 60° no sentido horário
e) 90° no sentido anti-horário

17 (UF-MA) Se *n* é um número inteiro tal que $(1 + i)^n = i(1 - i)^n$, então:

a) $n = 6k, k \in \mathbb{Z}$ d) $n = 5k, k \in \mathbb{Z}$
b) $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ e) $n = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$
c) $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$

18 (U. F. Uberlândia-MG) Sejam z_1 e z_2 números complexos que satisfazem a condição $z_1 = i\bar{z}_2$, em que $i^2 = -1$. Assim, pode-se afirmar que:

a) $z_1 = -z_2$.
b) z_1 e z_2 são simétricos com relação ao eixo Ox.
c) z_1 e z_2 são simétricos com relação ao eixo Oy.
d) z_1 e z_2 são simétricos com relação à reta $y = x$.
e) z_1 e z_2 são simétricos com relação à reta $y = -x$.

19 (PUC-SP) Geometricamente, o módulo de um número complexo *z* é dado pela distância da origem *O* do plano complexo ao ponto imagem de *z*. Assim, dado o complexo $z = 3 + 2i$, considere o triângulo ABO, cujos vértices *A* e *B* são os respectivos pontos imagem de *z* e z.i. É verdade que esse triângulo é:

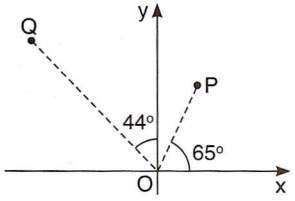
a) eqüilátero
b) escaleno
c) retângulo e isósceles
d) retângulo e não isósceles
e) isósceles e não retângulo

20 (Unit-MG) No conjunto dos números complexos, os três números cujo cubo vale 1 são:

a) 1, –1, i
b) 1, 1 + i, 1 – i
c) $1, i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$
d) $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

Desafios

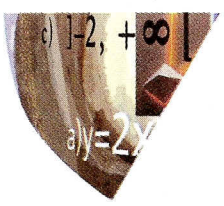
1 (UF-MG) Observe a figura:



Nessa figura, OP = 2 e OQ = 4.
Sejam *z* e *w*, respectivamente, os números complexos representados geometricamente pelos pontos *P* e *Q*.
Considerando esses dados, *escreva* o número complexo $\frac{z^{11}}{i \cdot w^5}$ na forma a + bi, em que *a* e *b* são números reais.

2 (Mackenzie-SP) Qual é o valor de $\sum_{n=1}^{10} i^{n!}$?

3 Considere o desenvolvimento de z^3, em que $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Usando o binômio de Newton e a fórmula de Moivre, verifique que $\text{sen}\,3\theta = 3\,\text{sen}\,\theta - 4\,\text{sen}^3\,\theta$ e $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.



39 POLINÔMIOS

1 ○ Função monomial

Dados um número complexo a e um número natural n, consideremos a função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x) = ax^n$.

A função f é chamada *função monomial* ou *monômio* na variável x.

O número complexo a é denominado coeficiente do monômio e o número natural n é chamado *grau* do monômio.

Assim, vejamos alguns exemplos:

$f(x) = 2x^3$ é um monômio de grau 3

$g(x) = -\sqrt{3}\,x$ é um monômio de grau 1

$h(x) = 2ix^5$ é um monômio de grau 5

$p(x) = 5$ é um monômio de grau 0

Observação

Quando $f(x) = 0$, não se define o grau do monômio.

2 ○ Função polinomial

São dados os números complexos $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ e seja x uma variável complexa. Consideremos a função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que a cada x associa o número $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, isto é, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

A função f é denominada *função polinomial* ou *polinômio* na variável x.

Os números complexos $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são os *coeficientes* do polinômio.

Notemos que o polinômio representa a soma algébrica de monômios na variável x.

São exemplos de polinômios:

$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, sendo $a_2 = 3$, $a_1 = 2$ e $a_0 = -1$

$g(x) = -4x^3 + x + \frac{1}{2}$, sendo $a_3 = -4$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$ e $a_0 = \frac{1}{2}$

$h(x) = -2x^3 + \frac{x}{3}$, sendo $a_3 = -2$, $a_2 = 0$, $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_0 = 0$

Observação

Não representam polinômios:

a) $f(x) = x + x^{\frac{1}{2}} + 2$, devido ao expoente fracionário.

b) $g(x) = -1 + 2x + x^{-3}$, devido ao expoente negativo.

Grau de um polinômio

Grau de um polinômio p(x) é o máximo grau observado entre os graus de seus monômios. O coeficiente do monômio de grau máximo é chamado *coeficiente dominante* do polinômio. Acompanhe os seguintes exemplos:

- $f(x) = 3x^4 - x^3 + x^2 - 5x + 6$ é um polinômio de grau 4 e coeficiente dominante igual a 3.
- $g(x) = -4x^2 - 1$ é um polinômio de grau 2 e coeficiente dominante igual a -4.
- $h(x) = 2ix^7 + x^5 - ix^4 + 3$ é um polinômio de grau 7 e coeficiente dominante igual a $2i$.

Exemplo 1

Seja o polinômio $p(x) = (m + 2)x^4 - 2x^3 + 5x - 1$. Vamos discutir o grau de p(x):

- O grau de p(x) será 4, desde que o coeficiente de x^4 não se anule, isto é, desde que tenhamos $m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$.
- Quando $m = -2$, o polinômio se reduz a $p(x) = -2x^3 + 5x - 1$ e o grau é 3.

Exercícios

1 Determine m a fim de que o grau de $p(x) = mx^2 - 5x + 7$ seja igual a 2.

2 Qual deve ser o valor de k para que o grau de $f(x) = (k^2 - 9)x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ seja igual a 2?

3 Discuta, em função de m, o grau do polinômio $p(x) = (2m - 1)x^6 + x^4 + x^2 - 1$.

4 Qual deve ser o valor de k a fim de que o grau do polinômio $f(x) = (-k^2 + 36)x^8 + (k - 6)x^5 - 3x^3 + x - 4$ seja:
a) 5? b) 3? c) 8?

5 O polinômio $f(x) = (a + b)x^2 - (2a - b + 9)x + 7$ pode ter grau zero? Em que condições isso ocorre?

Valor numérico

Seja α um número complexo e $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio dado por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

O *valor numérico de p* em α é o valor obtido quando substituímos x por α e efetuamos as operações indicadas, isto é:

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0$$

Exemplo 2

Vamos calcular o valor numérico do polinômio $p(x) = x^2 - 2x + 2$ para $x \in \{3, 0, 1 + i\}$.

a) $x = 3$, temos: $p(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 5$

b) $x = 0$, temos: $p(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 2$. Observe que p(0) fornece o valor do *coeficiente independente* do polinômio.

c) $x = 1 + i$, temos: $p(1 + i) = (1 + i)^2 - 2 \cdot (1 + i) + 2 \Rightarrow p(1 + i) = \cancel{1} + 2i + i^2 - \cancel{2} - 2i + \cancel{2}$, ou seja, $p(1 + i) = 0$.

Dizemos que $x = 1 + i$ é uma raiz de p(x).

Observação

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Quando $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é *raiz* do polinômio p(x).

Exercícios

6 Obtenha o valor numérico do polinômio $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ para:

a) $x = -2$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 0$ d) $x = 1$ e) $x = i$

7 Dos números complexos seguintes, quais são raízes do polinômio p dado por $p(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$?

$2 + i$, i, 1, 0 e 3

8 Sabendo que $x = -3$ é raiz do polinômio $p(x) = 2x^3 + mx^2 - 5x + 3$, determine o valor de m.

9 Determine a e b em $p(x) = -3x^4 + ax^3 - 5x^2 + bx - 2$, sabendo que 1 é raiz de $p(x)$ e que $p(2) = -80$.

10 Qual é o polinômio de grau 1 que apresenta soma dos coeficientes igual a 3 e raiz igual a -2?

11 Qual é o polinômio p de grau 3 que tem coeficiente dominante igual a 2, apresenta zero como uma de suas raízes e satisfaz as condições $p(i) = p(-i)$ e $p(1) = 5$?

Polinômio nulo

Vamos considerar um polinômio p que tenha todos os coeficientes iguais a zero. Quando isso ocorre, dizemos que p é um *polinômio nulo*, ou *polinômio identicamente nulo*. Indicamos assim: $p(x) \equiv 0$.

Exemplo 3

Se o polinômio $f(x) = ax^2 + (b - 1)x + c + 3$ é um polinômio nulo, podemos determinar a, b e c impondo que todos os coeficientes de $f(x)$ sejam iguais a zero:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \\ c + 3 = 0 \Rightarrow c = -3 \end{cases}$$

Identidades

Dizemos que dois polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são *idênticos* quando todos os coeficientes de $p_1(x)$ e de $p_2(x)$ são ordenadamente iguais. Indicamos assim: $p_1(x) \equiv p_2(x)$.

Exemplo 4

Os polinômios $f(x) = ax^2 + bx + c - 1$ e $g(x) = -4x^2 - 7x + 2$ são idênticos quando: $a = -4$, $b = -7$ e $c - 1 = 2 \Rightarrow c = 3$.

Exemplo 5

A identidade $\frac{x - 4}{1 - x^2} \equiv \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 + x}$ ocorre quando:

$$\frac{x - 4}{1 - x^2} \equiv \frac{a \cdot (1 + x) + b \cdot (1 - x)}{\underbrace{(1 - x) \cdot (1 + x)}_{1 - x^2}} \Rightarrow a \cdot (1 + x) + b \cdot (1 - x) = x - 4$$

$$a + ax + b - bx = x - 4$$

- Agrupamos os termos semelhantes:

$$x \cdot (a - b) + (a + b) = x - 4$$

- Igualamos coeficientes de mesmo grau:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \text{ e } b = -\frac{5}{2}$$

Exercícios

12 Determine m, n, p a fim de que $f(x) = mx^2 + nx + p$ seja o polinômio nulo.

13 Sabe-se que, $\forall x \in \mathbb{C}$, $p(x) = (a + b)x^2 + (2a - b + 6)x + c$ tem valor numérico igual a zero. Quais os valores de a, b e c?

14 Determine, em cada caso, os valores de a e b a fim de que:

a) $3x + 4 \equiv (a + 1)x + 2b$

b) $ax^2 + (a - b) \cdot x + (b + 6) \equiv 3x^2 + 5x + 4$

c) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} \equiv \frac{3x + 7}{x^2 - x}$

d) $(x + a)^2 + (b - x)^2 \equiv 2x^2 + 10x + 53$

e) $\frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 2} \equiv \frac{-x + 8}{x^2 - x - 2}$

15 (UnB-DF) Considerando que a, b e c são constantes reais tais que, para todo número real $x \neq 0$ e $x \neq 3$, $\frac{8x^2 - 13x + 27}{x(x - 3)^2} \equiv \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 3} + \frac{c}{(x - 3)^2}$, calcule a soma $a + b + c$.

16 (U. F. Ouro Preto-MG) Seja $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, em que a, b, c, d $\in \mathbb{R}$. Determine a, b, c e d para que $xP(x + 2) \equiv -27 + P(x) + dx^4$.

3 Adição, subtração e multiplicação de polinômios

As operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios seguem os procedimentos de Álgebra estudados no ensino fundamental II.

Exemplo 6

Sendo $f(x) = 4x^3 - x^2 + 5x - 6$ e $g(x) = -4x^2 + 3x + 2$, vamos determinar o polinômio correspondente a:

a) $f(x) + g(x)$

Para isso, basta reduzir termos semelhantes, isto é, operar, separadamente, com potências de mesmo grau:

$$(4x^3 - x^2 + 5x - 6) + (-4x^2 + 3x + 2) = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

Observe que, em geral, o grau do polinômio $f(x) + g(x)$ é, no máximo, igual ao maior grau entre os graus de $f(x)$ e de $g(x)$.

b) $f(x) \cdot g(x)$

Basta aplicar a propriedade distributiva, lembrando as propriedades de potenciação:

$$(4x^3 - x^2 + 5x - 6) \cdot (-4x^2 + 3x + 2) = -16x^5 + 12x^4 + 8x^3 + 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 -$$

$$- 20x^3 + 15x^2 + 10x + 24x^2 - 18x - 12 = -16x^5 + 16x^4 - 15x^3 + 37x^2 - 8x - 12$$

Observe que, em geral, o grau de $f(x) \cdot g(x)$ é dado pela soma do grau de $f(x)$ com o grau de $g(x)$.

Exercícios

17 Sendo os polinômios $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -4x^2 + 6x + 3$ e $h(x) = 5x^2 - 3x$, determine:

a) $f(x) + g(x)$ b) $g(x) - h(x)$ c) $f(x) \cdot g(x) + h(x)$ d) $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$

18 Sejam $f(x) = x^2 + bx - 2$ e $g(x) = (a - 3)x^2 - 6x + c$. Determine condições sobre os valores de a, b e c a fim de que:

a) $f(x) + g(x)$ seja o polinômio nulo b) $g(x) - f(x) \equiv -3x^2 - 9x + 5$ c) $f(x) \cdot g(x)$ tenha grau 3

19 (UE-PI) Sabendo que os polinômios $p_1(x) = x^3 - 5$ e $p_2(x) = (x^2 + px + q)(x - 2) + 3$ são idênticos, determine o valor de $p + q$.

20 (UF-PE) Determine p, q reais, tais que $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 \equiv (x^2 + px + q)^2$. Indique $p^2 + q^2$.

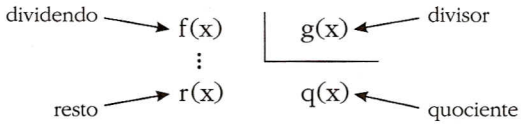
21 (FEI-SP) Os polinômios P(x) e Q(x) são tais que o grau da soma P(x) + Q(x) é 3 e o grau da diferença P(x) – Q(x) é 4. Qual o grau do produto P(x) · Q(x)?

4 Divisão de polinômios

Sejam dois polinômios, f(x) como dividendo e g(x) como divisor, com $g(x) \neq 0$. Dividir f(x) por g(x) é determinar outros dois polinômios: o quociente q(x) e o resto r(x), tais que:

1º) $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ 2º) grau r < grau g ou $r(x) \equiv 0$

Um possível esquema de divisão é apresentado a seguir:



De modo geral, a divisão de dois polinômios quaisquer é feita por meio do *método da chave*, que apresentaremos a seguir.

Exemplo 7

Vamos dividir $f(x) = -6x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 7x - 11$ por $g(x) = 2x^2 - x + 3$, conforme o esquema acima indicado. Notemos que tanto f(x) como g(x) estão escritos segundo potências *decrescentes* de *x*.

- *1º passo:* dividimos o termo de maior grau de f(x) pelo termo de maior grau de g(x): $\frac{-6x^4}{2x^2} = -3x^2$, obtendo assim o 1º termo do quociente q(x).
- *2º passo:* multiplicamos o quociente obtido $-3x^2$ por g(x):

$$-3x^2 \cdot (2x^2 - x + 3) = -6x^4 + 3x^3 - 9x^2$$

O resultado é colocado, com o *sinal trocado*, sob os termos semelhantes de f(x).

$$\begin{array}{l|l} -6x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 7x - 11 & 2x^2 - x + 3 \\ +6x^4 - 3x^3 + 9x^2 & -3x^2 \end{array}$$

- *3º passo:* somamos os termos semelhantes, e os termos de f(x) que não têm semelhantes a somar devem ser copiados. Obtemos, então, um resto parcial.

$$\begin{array}{l|l} -6x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 7x - 11 & 2x^2 - x + 3 \\ +6x^4 - 3x^3 + 9x^2 & -3x^2 \\ \hline \text{resto parcial} \rightarrow 2x^3 + 5x^2 + 7x - 11 & \end{array}$$

- *4º passo:* repetimos os passos anteriores com o resto parcial obtido até que o *grau do resto* se torne *menor* que o *grau do divisor* (g(x)):

$$\begin{array}{l|l} -6x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 7x - 11 & 2x^2 - x + 3 \\ 6x^4 - 3x^3 + 9x^2 & -3x^2 + x + 3 \\ \hline \text{resto parcial} \rightarrow 2x^3 + 5x^2 + 7x - 11 & \\ -2x^3 + x^2 - 3x & \\ \hline \text{resto parcial} \rightarrow 6x^2 + 4x - 11 & \\ -6x^2 + 3x - 9 & \\ \hline \text{como grau } g(x) = 2, \text{ a divisão é encerrada.} \rightarrow 7x - 20 \ (\text{grau } 1) & \end{array}$$

Então:

$$\begin{cases} q(x) = -3x^2 + x + 3 \\ r(x) = 7x - 20 \end{cases}$$

Observe que:

- grau q(x) = grau f(x) – grau g(x)
- g(x) · q(x) + r(x) = f(x) (verifique!)

Exemplo 8

Vamos dividir $f(x) = x^3 - 7x + 6$ por $g(x) = x + 3$.

$$\begin{array}{rl} x^3 - 7x + 6 & \big| \; x + 3 \\ \hline (+)\ -x^3 - 3x^2 & \quad x^2 - 3x + 2 \\ \hline (+)\ -3x^2 - 7x + 6 & \\ \quad +3x^2 + 9x & \\ \hline \quad 2x + 6 & \\ \quad -2x - 6 & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Assim: $\begin{cases} q(x) = x^2 - 3x + 2 \\ r(x) = 0 \end{cases}$

Observação

Quando r(x) = 0, dizemos que a divisão de f(x) por g(x) é *exata*, ou f(x) é *divisível* por g(x), ou ainda, g(x) *divide* f(x).

Exemplo 9

Como determinar os valores de p e q para que $f(x) = -2x^3 + px + q$ seja divisível por $x^2 + x - 4$?

$$\begin{array}{rl} -2x^3 + px + q & \big| \; x^2 + x - 4 \\ \hline +2x^3 + 2x^2 - 8x & \quad -2x + 2 \\ \hline \quad -2x^2 + (p - 8)x + q & \quad \hookrightarrow \text{quociente} \\ \quad -2x^2 - 2x + 8 & \\ \hline \text{resto} \rightarrow (p - 10)x + (q + 8) & \end{array}$$

Devemos ter $r(x) \equiv 0$, isto é, $(p - 10)x + (q + 8)$ deve ser o polinômio nulo.

Assim: $\begin{cases} p - 10 = 0 \Rightarrow p = 10 \\ q + 8 = 0 \Rightarrow q = -8 \end{cases}$

Exercícios

22 Em cada caso, determine o quociente q(x) e o resto r(x) da divisão de f(x) por g(x), sendo:

a) $f(x) = -14x^2 + 3x - 5$ e $g(x) = 7x + 2$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = x^2 - 3x$

c) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 - 2$

d) $f(x) = 6x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 3$ e $g(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 1$

e) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ e $g(x) = x - 1$

23 Faça a divisão de p(x) por d(x), sendo:

a) $p(x) = x^2 + ix - 3$ e $d(x) = x - i$

b) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3i$ e $d(x) = x - 2$

24 Em cada caso, f(x) é *divisível* por g(x). Encontre o valor de a:

a) $f(x) = 4x^2 - 2x + a$ e $g(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = x^3 + ax + 1$ e $g(x) = x - 1$

25 (UF-BA) Sendo $P(x) = (m - 1)x^3 + x^2 + x - 1$ um polinômio de grau 2 e $Q(x) = kx^3 + x^2 + 2x + 2$ um polinômio que tem –1 como raiz, analise as afirmações seguintes, assinalando *V* ou *F*.

a) $k \cdot m = 1$

b) $P(x) \cdot Q(x)$ é um polinômio de grau 6.

c) $P(x)$ tem duas raízes reais.

d) $xP(x) - Q(x) = 2 + 3x$

e) O quociente da divisão de $Q(x)$ por $x + 1$ é $x^2 + 2$.

f) O resto da divisão de $Q(x)$ por $P(x)$ é $3x + 2$.

26 Dividindo um polinômio $p(x)$ por $x^2 + x - 3$ obtemos como quociente $q(x) = 3x + 5$ e resto $r(x) = -2x + 3$. Qual é o valor de $p(2)$?

27 (UFF-RJ) O resto da divisão de $p(x) = x^3 + 2x^2 + a$ por $q(x) = x^2 + 1$ é um polinômio cujo termo independente é 8. Determine o valor do número real *a*.

28 (UF-SC) Se o polinômio $2x^3 - ax^2 + bx + 2$ é divisível por $2x^2 + 5x - 2$, então qual é o valor de $a - b$?

29 Dividindo $x^2 - 3x + 5$ por $g(x)$ obtemos quociente igual a $x - 1$ e resto igual a 3. Determine $g(x)$.

30 (UF-MG) Os polinômios $p_1(x) = x^2 - 4$ e $p_2(x) = x^2 - 7x + 10$ dividem o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 - 12x + c$, em que *a*, *b* e *c* são números reais. Determine *a*, *b* e *c*.

5 Divisão por binômios do tipo x – a

Vamos agora estudar um caso particular de divisão de polinômios, aquele em que o divisor é um binômio do 1º grau do tipo $x - a$ ou $x + a$, sendo $a \in \mathbb{C}$.

Estudaremos dois métodos para esse tipo de divisão, os quais simplificarão bastante nossos cálculos. Alguns resultados deste item serão muito utilizados no capítulo seguinte.

O primeiro método é conhecido como *teorema do resto*. Para entendê-lo e depois enunciá-lo, vamos efetuar, pelo método da chave, a divisão de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ por $g(x) = x - 3$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & x - 3 \\ \cancel{-x^3} + 3x^2 & \underbrace{x^2 - x + 2}_{\text{quociente } q(x)} \\ \hline -x^2 + 5x - 2 & \\ \cancel{+x^2} - 3x & \\ \hline 2x - 2 & \\ \cancel{-2x} + 6 & \\ \hline \text{resto } (r) \rightarrow 4 & \end{array}$$

Notemos que:

▶ **1º** Como vimos, em qualquer divisão temos grau r < grau g.
Como grau g = 1, devemos ter grau r < 1, ou seja, grau r = 0. Logo, o *resto é um número complexo* independente de *x*.

▶ **2º** A raiz do divisor $g(x)$ é: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.
Calculando $f(3)$, temos:

$$f(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2, \text{ isto é, } f(3) = 27 - 36 + 15 - 2 \Rightarrow f(3) = 4$$

O valor encontrado para $f(3)$ é igual ao resto obtido na divisão.
Assim, $r = f(3)$.

Teorema do resto

Seja $p(x)$ um polinômio tal que grau $p \geq 1$. O resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é igual a $p(a)$, ou seja, $r = p(a)$.

Demonstração

Temos:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r \ (r \in \mathbb{C})$$

Calculando o valor numérico do polinômio acima para $x = a$, vem:

$$p(a) = (a - a) \cdot q(a) + r,$$

isto é:

$$p(a) = \underbrace{0 \cdot q(a)}_{=0} + r \Rightarrow r = p(a)$$

Observação

Embora tenhamos enunciado o teorema do resto para divisões de um polinômio f por outro do tipo $x \pm a$ ($a \in \mathbb{C}$), ele permanece válido quando o divisor for do 1º grau do tipo $ax + b$, com $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}$ e, então, temos: $r = f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Exemplo 10

Podemos determinar o resto da divisão de $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 9$ por $g(x) = x + 2$ *sem efetuar a divisão*. Vejamos:

- a raiz do divisor é $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$.
- o resto r é dado por: $r = f(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 + (-2) - 9$, isto é, $r = 16 + 16 - 2 - 9 = 21$.

Uma conseqüência importante do teorema do resto é o *teorema de D'Alembert*, cujo enunciado é:

Um polinômio $f(x)$ é divisível por $x - a$ quando a é raiz de $f(x)$.

Demonstração

Como $f(x)$ é divisível por $x - a$, o resto r dessa divisão é igual a zero. Ora, pelo teorema do resto, $r = f(a)$. Como $r = 0$, temos que $f(a) = 0$, o que mostra que a é raiz do polinômio $f(x)$.

Exemplo 11

Qual deve ser o valor de m para que $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + mx - 3$ seja divisível por $x - 3$?
Pelo teorema de D'Alembert, $x = 3$ deve ser uma raiz de $f(x)$, isto é:

$$f(3) = 0 \Rightarrow 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 3^2 + m \cdot 3 - 3 = 0 \Rightarrow 33 + 3m = 0 \Rightarrow m = -11.$$

Exercícios

31 Determine o resto da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, em cada caso, sendo:

a) $f(x) = (x - 4)^2$ e $g(x) = x - 3$
b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 1$ e $g(x) = x + 1$
c) $f(x) = -2x^5 + x^4 - 6x^3 + 2x + 4$ e $g(x) = x - 2$
d) $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - i$ e $g(x) = x - i$
e) $f(x) = x^{74} + x^{34} + x^{16} - 3$ e $g(x) = x - 1$
f) $f(x) = 2x^6 + 19x^4 - 21x^2 + 5x - 2$ e $g(x) = x$

32 Em cada caso, $f(x)$ é divisível por $g(x)$. Determine m:

a) $f(x) = 4x^2 - 3x + m$ e $g(x) = x + 4$
b) $f(x) = -x^3 + mx^2 - 5x + 2$ e $g(x) = x + 2$
c) $f(x) = 9x^3 - x^2 + mx - 4$ e $g(x) = x - \frac{1}{3}$

33 Ao dividirmos $2x^3 + x^2 + mx - 3$ por $x + 5$ obtemos resto igual a –53. Qual é o valor de m?

34 Determine o polinômio p(x) de grau 2 que é divisível por x + 1, apresenta resto igual a 3 quando é dividido por x – 2 e, $\forall x \in \mathbb{C}$, satisfaz a igualdade, p(x) = p(–x).

35 Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $p(x) = x^{n+1} - x^n - 1$:

a) determine n a fim de que o resto da divisão de p(x) por x – 2 seja igual a 7.

b) qual é o resto da divisão de p(x) por x + 1 quando n é ímpar?

36 Um polinômio é chamado *mônico* quando o coeficiente do termo de maior grau é 1. Assim, são polinômios mônicos $x^3 + 4x^2 - 5x + 3$, $x^2 - 5$, etc.

a) Determine um polinômio mônico de grau 2, divisível por x – 1 e que, quando dividido por x + 1, deixa resto 3.

b) Determine um polinômio p(x) de 3º grau, mônico, tal que 1 e 2 são raízes do polinômio e p(3) = 30.

37 Um polinômio p(x), dividido por x – 3, deixa resto 5 e, dividido por x + 1, deixa resto 2. Qual é o resto da divisão de p(x) por $(x - 3) \cdot (x + 1)$?

38 Um polinômio p(x), dividido por x, deixa resto 2; dividido por x + 2, deixa resto –5 e, dividido por x – 2, deixa resto 25. Qual é o resto da divisão de p(x) por $x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$, ou, melhor, $x^3 - 4x$?

39 (UF-GO) Considere o polinômio $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 + bx + c)$, em que b e c são números reais, e julgue os itens abaixo, assinalando V ou F; explique os falsos:

a) Se 1 e –2 são raízes de P(x), então b = 1 e c = –2.

b) Se b = –1 e c = –6, então $P(x) > 0$, para $-2 < x < 3$.

c) Se na divisão de $x^2 + bx + c$ por $x - 3$ e $x - 1$ obtêm-se restos 0 e 2, respectivamente, então $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 5x + 6)$.

40 (UF-MT) Qual é o resto de divisão de $p(x) = 5 \cdot (x - 3) \cdot (x - 2)^2 \cdot (x - 1)^3 \cdot (x^2 + 1)$ por x?

Dispositivo de Briot-Ruffini

Esse processo fornece o quociente q(x) e também o resto r da divisão de um polinômio f(x) por g(x).

É importante lembrar que estamos supondo que g(x) é da forma x – a (ou x + a); já em relação a f(x) não há restrições.

Sejam $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ e g(x) = x – a.

Consideremos a divisão de f(x) por g(x).

O quociente q(x) dessa divisão é um polinômio de grau n – 1 (pois grau q = grau f – grau g = n – 1), dado por:

$$q(x) = q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \ldots + q_1 \cdot x + q_0$$

O resto r dessa divisão é um número complexo (independente de x); de fato, como grau r < grau g e grau g = 1, segue que grau r = 0.

Nosso objetivo é determinar o resto da divisão e os coeficientes de q(x): q_{n-1}, q_{n-2}, …, q_1 e q_0.

Temos:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r, \text{ isto é:}$$

$$\begin{aligned} &a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \\ &= (x - a) \cdot (q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \ldots + q_1 x + q_0) + r = \\ &= (q_{n-1} x^n + q_{n-2} x^{n-1} + \ldots + q_1 x^2 + q_0 \cdot x) - \\ &\quad - (a q_{n-1} x^{n-1} + a q_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a q_1 x + a q_0) + r \end{aligned}$$

Agrupando os monômios de mesmo grau:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - aq_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (q_0 - aq_1)x + (-aq_0 + r)$$

Da identidade de polinômios segue:

$$\begin{cases} \bullet\ q_{n-1} = a_n \\ \bullet\ a_{n-1} = q_{n-2} - a \cdot q_{n-1} \Rightarrow q_{n-2} = a_{n-1} + a \cdot q_{n-1} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \bullet\ a_1 = q_0 - a \cdot q_1 \Rightarrow q_0 = a_1 + a \cdot q_1 \\ \bullet\ a_0 = -a \cdot q_0 + r \Rightarrow r = a_0 + a \cdot q_0 \end{cases}$$

A determinação do resto da divisão de f(x) por g(x) e dos coeficientes de q(x) torna-se mais rápida com a aplicação do *dispositivo prático de Briot-Ruffini.*

Consideremos a divisão de $f(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 7$ por $g(x) = x - 2$, ambos escritos segundo potências decrescentes de x. Para construir o dispositivo, vamos seguir o seguinte roteiro:

- *1º passo:* calcular a raiz do divisor g(x) e, ao seu lado, colocar os coeficientes ordenados do dividendo f(x).

raiz de g(x): $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

2	−2	1	−5	7

- *2º passo:* abaixar o 1º coeficiente do dividendo (−2) e multiplicá-lo pela raiz do divisor.

$(-2) \cdot 2 = -4$

2	−2	1	−5	7
	−2			

- *3º passo:* somar o produto obtido com o coeficiente seguinte (−4 + 1 = −3). O resultado é colocado abaixo desse coeficiente.

2	−2	1	−5	7
	−2	−3		

- *4º passo:* com esse resultado, repetir as operações (multiplicar pela raiz e somar com o coeficiente seguinte), e assim por diante.

2	−2	1	−5	7
	−2	−3	−11	−15

O último dos resultados obtidos no algoritmo acima é o *resto de divisão*. Assim, r = −15.

Os demais resultados obtidos no algoritmo correspondem aos coeficientes ordenados do *quociente* da divisão.

Assim, $q(x) = -2x^2 - 3x - 11$.

Exemplo 12

Vamos dividir $f(x) = 2x^4 + x^2 - 3x + 5$ por $g(x) = x + 3$ usando o método de Briot-Ruffini.

É preciso, inicialmente, completar com as potências que faltam e escrever $f(x) = 2x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x + 5$.

Temos:

coeficientes ordenados de f(x)

raiz de g(x) → −3

2	0	1	−3	5
2	−6	19	−60	185

Assim, $\begin{cases} r = 185 \\ q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 19x - 60 \end{cases}$

Exemplo 13

Façamos a divisão de $x^2 - 4x + 3$ por $x - 2i$:

$2i$	1	-4	3
	1	$-4 + 2i$	$\boxed{-1 - 8i}$

Assim: $\begin{cases} q(x) = x + (-4 + 2i) \\ r = -1 - 8i \end{cases}$

Exercícios

41 Determine o quociente e o resto da divisão de f(x) por g(x) em cada caso, utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 3$ e $g(x) = x + 4$

b) $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = x - 1$

c) $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 5x + 2$ e $g(x) = x - \frac{1}{2}$

d) $f(x) = x^2 + 2ix + 1$ e $g(x) = x - i$

e) $f(x) = x^5 - 1$ e $g(x) = x - 1$

42 (UA-AM) Determine a para que $P(x) = x^3 - x^2 + ax + 7$ seja divisível por $x + 2$. Forneça, nesse caso, o quociente da divisão.

43 Na divisão do polinômio $3x^3 + ax^2 + bx + 1$ por $x - 2$, obteve-se quociente $3x^2 + 11x + 26$. Qual é o resto dessa divisão?

44 O polinômio $px^3 + 2x + q$ é divisível por $x - 1$ e, quando dividido por $x + 2$, deixa resto 3.

a) Determine os valores de p e q.

b) Qual é o quociente da divisão desse polinômio por $x - 2i$?

45 Dividindo-se o polinômio $-3x^4 + 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ por $x + 1$ obtém-se resto igual a 2. O quociente dessa divisão é, então, dividido por $x - 2$ e obtém-se resto igual a -8.

a) Qual é o valor das constantes a e b?

b) Qual é o quociente obtido na última divisão?

46 (PUC-PR) Na divisão do polinômio F(x) pelo binômio f(x), do 1º grau, usando o dispositivo de Ruffini, encontrou-se o seguinte:

1	a	$2a$	$-2a$	8
			-4	0

Qual o dividendo dessa divisão?

47 Usando o método da chave, obtenha o quociente e o resto da divisão de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 1$ por $2x - 1$. Observe, agora, que $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Efetue, usando Briot-Ruffini, a divisão de f(x) por $x - \frac{1}{2}$ e compare os resultados.

48 Repita o exercício anterior considerando a divisão de $f(x) = 9x^2 - 6x + 11$ por $3x - 1$, e depois por $x - \frac{1}{3}$.

6 ○ Divisões sucessivas

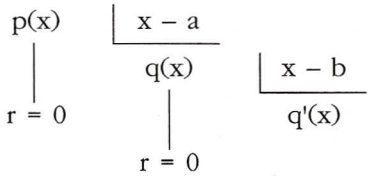
Vamos estudar uma situação importante que pode ocorrer na divisão de polinômios. Os resultados obtidos nesta seção serão usados no capítulo seguinte.

Seja p(x) um polinômio de grau maior que 1; $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$.

Quando p(x) é divisível por $x - a$ e o quociente dessa divisão é divisível por $x - b$, tem-se que p(x) é divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$.

Justificativa

Acompanhe o esquema seguinte:



- Da 1ª divisão, podemos escrever: $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$ (I)
- Da 2ª divisão, podemos escrever: $q(x) = (x - b) \cdot q'(x)$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos $p(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot q'(x)$, o que mostra que p(x) é divisível por $(x - a) \cdot (x - b)$.

Exemplo 14

Uma maneira de descobrir se $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ é divisível por $(x - 2) \cdot (x + 1) = x^2 - x - 2$ é usar o resultado anterior.

Primeiro, dividimos p(x) por x – 2:

2	1	2	–5	–6
	1	4	3	0

coeficientes de q(x)

Em seguida, dividimos o quociente obtido por x + 1:

–1	1	4	3
	1	3	0

Como o resto dessa última divisão também é igual a zero, pode-se concluir que p(x) é divisível por $x^2 - x - 2$.

Observação

Esse primeiro resultado continua válido quando a = b:
se p(x) é divisível por x – a e o quociente dessa divisão é também divisível por x – a, então p(x) é divisível por $(x - a)^2$.

Exemplo 15

Acompanhe a seqüência de divisões abaixo, partindo do polinômio $f(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16$ e tendo sempre x + 4 como quociente:

–4	1	7	8	–16	
–4	1	3	–4	0	← f(x) é divisível por x + 4
–4	1	–1	0		← f(x) é divisível por $(x + 4)^2$
	1	–5			← f(x) *não* é divisível por $(x + 4)^3$

Exercícios

49 Mostre, em cada caso, que f(x) é divisível por g(x), sendo:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ e $g(x) = (x + 2)^2$
b) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ e $g(x) = (x - i)^2$
c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 10x$ e $g(x) = x^2 - 5x$

50 Determine m e p a fim de que $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + mx + p$ seja divisível por $(x + 1)^2$.

51 (Uneb-BA) O polinômio $x^3 + 4x^2 + ax + b$ é divisível pelo polinômio $x^2 - 1$. Qual é o valor de a + b?

52 (UF-PI) Se o polinômio $x^5 - 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x + 1$ for divisível pelo polinômio $x^2 - 2x + 1$, qual deverá ser o valor de a + b?

53 Prove que, se p(x) é divisível por x – a e por x – b (a ≠ b) separadamente, então p(x) é divisível por (x – a) · (x – b).

Testes de vestibulares

1 (PUC-MG) O polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é idêntico ao polinômio $Q(x) = x^3 - 2x + 4$. O valor de a + b + c + d é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

2 (UA-AM) Se o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 + mx + n$ é divisível por $h(x) = x^2 + x + 1$, então o valor de m + n é:

a) 5 b) 2 c) 1 d) 8 e) 3

3 (Fatec-SP) Dividindo-se o polinômio $M(x) = (2x - 1) \cdot (x^2 + 9)$ pelo polinômio $N(x) = x^2 - 3x + 1$, obtêm-se quociente Q(x) e resto R(x). É verdade que:

a) Q(–1) = 3 c) Q(0) = 4 e) R(2) = 40
b) Q(1) = 8 d) R(–2) = –70

4 (UPE-PE) Considere o polinômio $p(x) = 3x^3 - mx^2 + nx + 1$, em que m e n são constantes reais. Sabe-se que p(x) é divisível por g(x) = x – 2 e que deixa resto igual a –12 quando dividido por h(x) = x + 2. Nessas condições, tem-se:

a) $m = -9$ e $n = \frac{7}{4}$ d) $m = -\frac{7}{4}$ e $n = \frac{7}{4}$
b) $m = \frac{7}{4}$ e $n = -9$ e) $m = n = 6$
c) m = 9 e n = 5

5 (UF-SE) Se os números reais A e B satisfazem a igualdade $\frac{3x + 1}{x^2 - 9} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3}$, com $x \neq \pm 3$, então é verdade que:

a) A < B d) $A - B = \frac{1}{3}$
b) $A \cdot B = \frac{20}{3}$ e) B + 1 = A
c) A + B = 9

6 (PUC-RJ) Se $x^2 + 2x + 5$ divide $x^4 + px^2 + q$ exatamente (isto é, o resto da divisão do segundo polinômio pelo primeiro é zero), então:

a) p = –2 e q = 5 d) p = 6 e q = 25
b) p = 5 e q = 25 e) p = 14 e q = 25
c) p = 10 e q = 20

7 (Uneb-BA) Dividindo-se $x^4 - x^2 + \frac{1}{2}$ por x – 2, obtêm-se:

a) quociente $x^3 + 3x - 6$ e resto $\frac{3}{4}$.
b) quociente $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ e resto $\frac{25}{2}$.
c) quociente $x^3 + 3x^2 + 5$ e resto $-\frac{1}{2}$.
d) quociente $7x^2 - 25x$ e resto 3.
e) quociente $-3x^2 + 4x$ e resto –2.

8 (Cefet-MG) O resto da divisão de $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 1$ por Q(x) = x – 3 é:

a) um múltiplo de 7 d) um número primo
b) um múltiplo de 12 e) maior que 50
c) um divisor de 12

9 (UF-MG) Considere os polinômios $p(x) = ax^3 + (2a - 3b)x^2 + (a + b + 4c)x - 4bcd$ e $q(x) = 6x^2 + 18x + 5$, em que a, b, c e d são números reais. Sabe-se que p(x) = q(x) para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim sendo, o número d é igual a:

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) 3

10 (Unificado-RJ) Dividindo-se um polinômio P(x) por outro, D(x), obtêm-se quociente e resto $Q(x) = x^3 - 2x - 1$ e R(x) = 5x + 8, respectivamente. O valor de P(–1) é:

a) –1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 13

11 (U. F. Viçosa-MG) Dividindo-se o polinômio p(x) por $x^2 + 4x + 7$, obtêm-se $x^2 + 1$ como quociente e $x - 8$ como resto. É CORRETO afirmar que o coeficiente do termo de grau 2 é:

a) –1 b) 4 c) 8 d) 5 e) 1

12 (Puccamp-SP) Sejam os polinômios $p = 5x^9 - 3x^7 + x^5 - x^3 + x$ e $q = x^4 - 3$. Na divisão de p por q, o resto é:

a) $-10x^3 + 49x$
b) $-3x^3 + 16x$
c) $-x^3 + x$
d) $8x^3 - 41x$
e) $10x^3 - 9x$

13 (UF-PI) O resto da divisão do polinômio $P(x) = x^{101}$ pelo binômio $x^2 - 1$ é:

a) x c) $x - 1$ e) $2x + 1$
b) –x d) $x + 1$

14 (U. F. Juiz de Fora-MG) Um polinômio p(x), dividido por $x - 1$, deixa resto 2. O quociente desta divisão é então dividido por $x - 4$, obtendo-se resto 1. O resto da divisão de p(x) por $(x - 1)(x - 4)$ é:

a) 1 c) $x + 1$ e) 3
b) 2 d) $x - 1$

15 (Mackenzie-SP)

P(x)	3x – 2	$(x^2 - 1) \cdot P(x)$	3x – 2
1	Q(x)	K	$Q_1(x)$

Nas divisões acima, de polinômios, podemos afirmar que o resto K vale:

a) $-\frac{5}{9}$ b) $-\frac{4}{9}$ c) $-\frac{1}{9}$ d) $-\frac{2}{9}$ e) $\frac{4}{9}$

16 (UF-GO) Assinale *V* ou *F*.
Os coeficientes do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ formam uma progressão aritmética de razão 2, cujo primeiro termo é a, o segundo é b e o terceiro é c. Assim:

a) se a = 1, o polinômio é $p(x) = x^2 + 3x + 6$
b) se b = 0, as raízes do polinômio são iguais a 2 e –2
c) se o polinômio p(x) tem 1 como raiz, então a = –2
d) se $-1 < a < 0$, então p(x) possui duas raízes reais distintas

17 (UF-RS) Se, para todo número real k, o polinômio $p(x) = x^n - (k + 1)x^2 + k$ é divisível por $x^2 - 1$, então, o número n é:

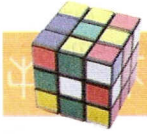
a) par
b) divisível por 4
c) múltiplo de 3
d) negativo
e) primo

18 (Fuvest-SP) Sejam R_1 e R_2 os restos das divisões de um polinômio p(x) por $x - 1$ e por $x + 1$, respectivamente. Nessas condições, se R(x) é o resto da divisão de p(x) por $x^2 - 1$, então R(0) é igual a:

a) $R_1 - R_2$
b) $\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$
c) $R_1 + R_2$
d) $R_1 R_2$
e) $\frac{R_1 + R_2}{2}$

19 (Mackenzie-SP) O resto da divisão de um polinômio P(x) por $(x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 4)$ é $R(x) = x^2 - 2x + 3$. Então o resto da divisão de P(x) por $x + 4$ é:

a) –27 b) 27 c) –30 d) 30 e) zero



Desafios

1 (UF-CE, adaptado) Seja $(1 + x + x^2)^{10} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{20}x^{20}$. Qual é o valor de $A_1 + A_3 + A_5 + \ldots + A_{19}$?

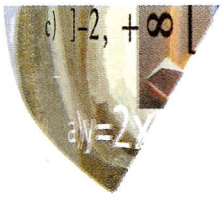
2 (UFF-RJ) Considere a expressão $p(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Determine o polinômio q(x) e as e as constantes A, B e C tais que $p(x) = q(x) + \frac{A}{x^2 - 1}$ e $\frac{A}{x^2 - 1} = \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$.

3 (Fuvest-SP) P(x) é um polinômio de grau ≥ 2, tal que P(1) = 2 e P(2) = 1. Sejam D(x) = (x – 2)(x – 1) e Q(x) o quociente da divisão de P(x) por D(x).

a) Determine o resto da divisão de P(x) por D(x).
b) Sabendo que o termo independente de P(x) é igual a 8, determine o termo independente de Q(x).

4 (UE-RJ) Considere o polinômio $P(n) = (n + 1) \cdot (n^2 + 3n + 2)$, $n \in \mathbb{N}$. Calcule:

a) a quantidade de paralelepípedos retângulos de bases quadradas e volumes numericamente iguais a P(11), cujas medidas das arestas são expressas por números naturais.
b) o valor da expressão $\frac{7^9 + 4 \cdot 7^6 + 5 \cdot 7^3 + 2}{344^2}$.



40 EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

1 ○ Introdução

Considere o seguinte problema:

"A diferença entre o cubo de um número real e o seu quadrado é igual à soma do triplo do quadrado desse número com 25.

Qual é esse número?"

Chamando de x o número procurado, segue a equação:

$$x^3 - x^2 = 3x^2 + 25 \Rightarrow \quad x^3 - 4x^2 - 25 = 0$$

Essa última equação é um exemplo de uma equação polinomial ou algébrica, a qual passaremos a estudar com detalhes.

Ao final deste capítulo, poderemos descobrir qual é o valor de x nesse problema.

2 ○ Noções iniciais

Equação polinomial ou *algébrica* é toda equação redutível à forma $p(x) = 0$, em que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau n, $n \geqslant 1$, com coeficientes em $\mathbb{C}$ e a variável x assume um valor qualquer em $\mathbb{C}$.

Vejamos alguns exemplos:

$$x^3 - 4x^2 + 5x + 2 = 0 \qquad x^5 - x^4 + x^2 + 1 = 0 \qquad ix^2 + 5x - 3 = 0$$

Raiz

Um número complexo r é *raiz* da equação polinomial $p(x) = 0$, em que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, quando, substituindo x por r na equação e efetuando os cálculos, obtemos $p(r) = a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$.

Em outras palavras, r é raiz de uma equação $p(x) = 0$ se for raiz do *polinômio p(x)*.

Exemplo 1

Na equação $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$, o número complexo i é uma das raízes, pois:

$$i^3 - 3 \cdot i^2 + i - 3 = -i + 3 + i - 3 = 0$$

O número real 3 também é raiz: $3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 0$.

Observe, por fim, que o número real 2 *não* é raiz:

$$2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 3 = 8 - 12 + 2 - 3 = -5 \neq 0.$$

Observação

O conjunto de todas as raízes de uma equação é o *conjunto solução* dessa equação.

3 O Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Todo polinômio de grau n, $n \geq 1$, admite ao menos uma raiz complexa.

Admitiremos aqui a validade desse teorema, sem demonstração.

4 O Teorema da decomposição

Seja $p(x)$ um polinômio de grau n, $n \geq 1$, dado por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0).$$

Então, $p(x)$ pode ser decomposto em n fatores do 1º grau sob a forma:

$$p(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \ldots (x - r_n),$$

em que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são as raízes de $p(x)$ e a_n é o coeficiente dominante de $p(x)$.

Demonstração

Como $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, o TFA nos garante que $p(x)$ tem ao menos uma raiz complexa r_1. Assim, $p(r_1) = 0$ e, pelo teorema de D'Alembert, $p(x)$ é divisível por $x - r_1$. Então:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x) \quad \text{(I)},$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n (pois o divisor $x - r_1$ tem coeficiente dominante unitário).

Temos:

a) Se $n = 1$, então $q_1(x)$ é um polinômio de grau $1 - 1 = 0$, ou seja, $q_1(x)$ é um polinômio constante, dado por $q_1(x) = a_n$. Substituindo em (I), vem $p(x) = a_n(x - r_1)$, e o teorema fica demonstrado.

b) Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$. Assim, podemos aplicar o TFA ao polinômio $q_1(x)$, isto é, $q_1(x)$ tem ao menos uma raiz complexa r_2. Assim, $q_1(r_2) = 0$ e $q_1(x)$ é divisível por $x - r_2$:

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x) \quad \text{(II)},$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante a_n. Substituindo (II) em (I), resulta:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x) \quad \text{(III)}$$

Se $n = 2$, $q_2(x)$ é um polinômio de grau 0, dado por $q_2(x) = a_n$. De (III), segue que $p_2(x) = a_n (x - r_1) (x - r_2)$, e o teorema fica demonstrado.

c) Aplicando sucessivamente n vezes o TFA, obtemos:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \ldots (x - r_n) \cdot q_n(x),$$

em que $q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $q_n(x) = a_n$.
Assim:

$$p(x) = a_n(x - r_1) (x - r_2) \ldots (x - r_n)$$

Observações

1ª) Pode-se mostrar que, com exceção da ordem dos fatores do produto, a decomposição de $p(x)$ em termos de suas raízes é única.

2ª) Dizemos que cada um dos polinômios do 1º grau, $x - r_1, x - r_2, \ldots, x - r_n$, é um fator de $p(x)$.

3ª) $p(x)$ é divisível por, individualmente, cada um de seus fatores.

Conseqüência do teorema da decomposição

Toda equação polinomial de grau n, $n \geq 1$, admite exatamente n raízes complexas.

Exemplo 2

Sabendo que as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ são 1, –2 e 4, podemos fatorá-lo como:

$$p(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$$

Exemplo 3

Vamos construir uma equação de 3º grau cujas raízes são: $1 + i$, $1 - i$ e 3.

Seja $p(x)$ o polinômio procurado. Pelo teorema da decomposição podemos fatorar $p(x)$ como:

$$p(x) = a_n \cdot \underbrace{(x - 1 - i) \cdot (x - 1 + i)}_{(x-1)^2 - i^2} \cdot (x - 3), \text{ isto é,}$$

$$p(x) = a_n \cdot (x^2 - 2x + 2) \cdot (x - 3)$$

Escolhendo como coeficiente dominante $a_n = 1$, segue que $p(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$ e a equação pedida é: $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$.

Observe que a escolha do coeficiente dominante a_n não altera o conjunto solução da equação obtida.

De fato, a equação $a_n \cdot (x^2 - 2x + 2) \cdot (x - 3) = 0$ apresenta como conjunto solução $S = \{1 + i, 1 - i, 3\}$, qualquer que seja a_n ($a_n \neq 0$).

Exemplo 4

Sabendo que uma das raízes da equação $x^3 - 5x^2 - 34x + 80 = 0$ é igual a 2, como podemos obter as outras duas?

Seja $p(x)$ o polinômio dado.

- Usamos o teorema da decomposição:

$$p(x) = 1 \cdot (x - 2) \cdot \underbrace{(x - r_2) \cdot (x - r_3)}_{q(x)}$$

- Fazemos a divisão de $p(x)$ por $x - 2$ a fim de obter $q(x)$:

2	1	–5	–34	80
	1	–3	–40	0

coeficientes de $q(x)$

- Resolvemos a equação $q(x) = 0$:

$$x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ ou } x = 8$$

Exemplo 5

Duas raízes da equação $x^4 - 2x^3 - 11x^2 - 8x - 60 = 0$ são 5 e –3. Vamos encontrar as outras duas raízes.

Sendo $p(x)$ o polinômio dado, podemos fatorá-lo como $p(x) = (x - 5) \cdot (x + 3) \cdot q(x)$.

A partir daí podemos utilizar dois caminhos diferentes:

1ª solução

Da fatoração de $p(x)$, concluímos que $p(x)$ é divisível por $(x - 5) \cdot (x + 3) = x^2 - 2x - 15$. Fazendo essa divisão pelo método da chave, encontramos $q(x) = x^2 + 4$.

Resolvendo a equação $q(x) = 0$, isto é, $x^2 + 4 = 0$, vem $x = \pm 2i$.

2ª solução

Como p(x) é divisível por (x – 5) · (x + 3), podemos dividir p(x) por x – 5 e, em seguida, dividir o quociente obtido por x + 3, conforme aprendemos em divisões sucessivas:

5	1	–2	–11	–8	–60
–3	1	3	4	12	0
	1	0	4	0	

coeficientes de q(x)

Daí, $q(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2i$.

Observação:

Embora o estudo da variação das funções polinomiais e, em particular, de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 - 8x - 60$ *não* faça parte dos objetivos desta obra, é importante destacar que o gráfico de *f* intercepta o eixo *x* em dois pontos (5, 0) e (–3, 0), cujas abscissas correspondem às *duas raízes reais* de *f*.

Exercícios

1 Resolva, em $\mathbb{C}$, cada equação seguinte e, em seguida, fatore o polinômio dado:

a) $x^2 - 8x + 25 = 0$

b) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

2 Em cada caso, escreva uma equação algébrica de grau mínimo cujas raízes são:

a) –3i e 3i

b) –2, 2 + i, 2 – i

c) –5, 4, 1

d) 1, 2, 3 e 4

3 O número 2 é uma raiz da equação $x^3 - 16x^2 + mx - 106 = 0$.

a) Determine *m*.

b) Encontre as demais raízes dessa equação.

4 (UF-RJ) O polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + d$, $d \in \mathbb{R}$, é divisível por (x – 2).

a) Determine *d*.

b) Calcule as raízes da equação P(x) = 0.

5 Duas das raízes da equação $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ são 1 e 2. Encontre o conjunto solução dessa equação.

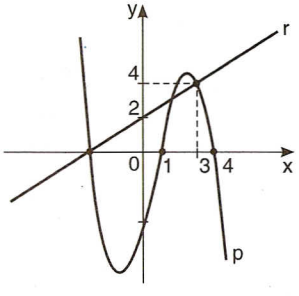
6 A equação $x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x - 20 = 0$ apresenta como duas de suas raízes os números 1 + 3i e 1 – 3i. Quais são as outras raízes que essa equação possui?

7 (Unifor-CE) Quantas raízes reais e distintas tem o polinômio $p(x) = (x - 1) \cdot (3x^3 + 4x^2 + 2x)$? Determine-as.

8 (UF-CE) Seja *a* um número racional não nulo. Se *b* e $\sqrt{2}$ são raízes irracionais da equação $x^3 + ax^2 - 2x - 2a = 0$, determine o valor de b^4.

9 (ESPM-SP) Sendo –1, *p* e *q* as raízes da equação $x^3 - 11x^2 + 15x + 27 = 0$, qual é o valor de $\log_q^p + \log_p^q$?

10 (UFF-RJ) Os gráficos da função polinomial *p* e da reta *r* estão representados na figura ao lado.



a) Calcule o resto da divisão de p(x) por x – 3.

b) Escreva a equação de *r*.

c) Determine a expressão que define *p*, sabendo que as três únicas raízes de *p* são reais.

11 (UF-CE) Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, no qual *a*, *b* e *c* são números reais e $b > 0$. Mostre que, se P(x) = –P(–x) para todo número real *x*, então a equação P(x) = 0 possui somente uma raiz real.

5 ○ Multiplicidade de uma raiz

- Quando resolvemos a equação do 2º grau $x^2 - 10x + 25 = 0$, encontramos duas raízes *iguais* a 5. Usando o teorema da decomposição, fatoramos o polinômio dado:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5) \cdot (x - 5) = (x - 5)^2$$

Dizemos, então, que 5 é raiz de *multiplicidade 2* ou *raiz dupla* da equação proposta.

- Se a forma fatorada de um polinômio p é:

$$p(x) = (x + 4)^3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)^2,$$

concluímos que:

- $x = -4$ é raiz com multiplicidade 3 ou raiz *tripla* da equação $p(x) = 0$
- $x = 2$ é raiz com multiplicidade 1 ou raiz *simples* da equação $p(x) = 0$
- $x = -1$ é raiz com multiplicidade 2 ou raiz *dupla* da equação $p(x) = 0$

De modo um pouco mais formal, dizemos que r é uma raiz de *multiplicidade* m ($m \geqslant 1$) da equação $p(x) = 0$ se:

$$p(x) = (x - r)^m \cdot q(x); \text{ com } q(r) \neq 0$$

Notemos que:

1º) $p(x)$ é divisível por $(x - r)^m$.

2º) A condição $q(r) \neq 0$ significa que r não é raiz de $q(x)$ e garante, então, que a multiplicidade da raiz r não é maior que m.

Exemplo 6

Vamos resolver a equação $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 3x - 36 = 0$, sabendo que 3 é raiz dupla.

Seja $p(x)$ o polinômio dado, temos:

$$p(x) = (x - 3) \cdot (x - 3) \cdot \underbrace{(x - r_3) \cdot (x - r_4)}_{q(x)}, \text{ isto é, } p(x) = (x - 3)^2 \cdot q(x).$$

- Fazendo a divisão de $p(x)$ por $(x - 3)^2$ obtemos $q(x)$:

3	1	−9	23	−3	−36	
3	1	−6	5	12	0	← p(x) é divisível por x − 3
	1	−3	−4	0		← p(x) é divisível por $(x - 3)^2$

coeficientes de q(x)

- Resolvendo a equação $q(x) = 0$, vem:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4$$

$S = \{-1, 3, 4\}$

Exercícios

12 A respeito da equação $(x - 2)^3 \cdot (x^3 + 3x^2 - 10x) = 0$, determine suas raízes e as respectivas multiplicidades.

13 Em cada caso, escreva uma equação algébrica de grau mínimo tal que:

a) 2 seja raiz dupla e −1, raiz simples.

b) i e $-i$ sejam raízes duplas.

c) −3 seja raiz tripla.

14 Sabendo que a equação $3x^3 + 5x^2 + x + m = 0$ apresenta −1 como raiz dupla:

a) Determine m.

b) Encontre a outra raiz dessa equação.

15 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8 = 0$, sabendo que 2 é raiz tripla.

16 Se, na equação $x^3 - 75x + 250 = 0$, m é raiz dupla e $-2m$ é a outra raiz, determine seu conjunto solução.

17 (Fuvest-SP) Suponha que o polinômio do 3º grau $P(x) = x^3 + x^2 + mx + n$, em que m e n são números reais, seja divisível por $x - 1$.

a) Determine n em função de m.

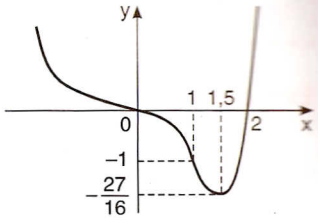
b) Determine m para que $P(x)$ admita raiz dupla diferente de 1.

c) Que condições m deve satisfazer para que $P(x)$ admita três raízes reais e distintas?

18 (Unirio-RJ) Seja f um polinômio de grau 4, cujo gráfico é dado pela figura ao lado.
Sabendo que o zero é raiz tripla de f, determine:

a) A lei que define f.

b) Os valores de $x < 1{,}5$ tais que $-1 < f(x) < 0$.



6 ○ Raízes complexas

O teorema seguinte nos fornece uma informação importante a respeito do número de *raízes complexas não reais* de uma equação polinomial com coeficientes reais.

Antes de demonstrá-lo, vamos apresentar algumas propriedades importantes a respeito do conjugado de um número complexo. Sejam z_1 e z_2 números complexos e $x \in \mathbb{R}$.

(I) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ (II) $\overline{x \cdot z_1} = x \cdot \overline{z}_1$ (III) $\overline{x} = x$

As justificativas de (I), (II) e (III) encontram-se no exercício 24, capítulo 38.

(IV) Escrevendo $z = a + bi$ na forma trigonométrica, $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, podemos verificar que:

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

Pela fórmula de Moivre, temos:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

Assim:

$$\overline{z^n} = \rho^n[\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)] \quad (a)$$

Por outro lado:

$$\overline{z} = \rho(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) = \rho[\cos(-\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(-\theta)]$$

Donde:

$$(\overline{z})^n = \rho^n[\cos(-n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(-n\theta)] = \rho^n[\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)] \quad (b)$$

Comparando (a) e (b), segue que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Teorema

Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação com *coeficientes reais*, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz dessa equação.

Demonstração

Seja a equação $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ coeficientes reais.
Da hipótese, z é raiz da equação, isto é, $p(z) = 0$.

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = 0 \Rightarrow \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0} = \overline{0}$$

Usando (I), podemos escrever:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

De (II) e (III), vem:

$$a_n \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

Usando (IV), vem:

$$a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0$$

isto é, $p(\overline{z}) = 0$, o que mostra que $\overline{z}$ é raiz de $p(x) = 0$.

Observações

1ª) Se o número complexo $z = a + bi$, $b \neq 0$, é raiz com multiplicidade m de uma equação polinomial, então seu conjugado $\overline{z} = a - bi$, $b \neq 0$, também é raiz com multiplicidade m dessa equação.

2ª) Esse teorema nos garante que, numa equação de coeficientes reais, raízes complexas não reais sempre ocorrem aos pares ($a + bi$ e $a - bi$). Dessa forma, uma equação de grau ímpar apresenta ao menos uma raiz real.

Exemplo 7

Se uma equação com coeficientes reais tem como raízes simples 3, $-2i$ e $1 + i$, então, necessariamente, duas outras raízes são $2i$ e $1 - i$, pelo teorema das raízes complexas. Assim, o menor grau que essa equação pode ter é 5.

Exemplo 8

Vamos resolver a equação $x^3 - 3x^2 - 5x + 39 = 0$, sabendo que $3 - 2i$ é uma de suas raízes.

Observemos, de início, que se trata de uma equação com coeficientes reais. Como $3 - 2i$ é raiz, podemos afirmar que $3 + 2i$ também é raiz e o polinômio dado é divisível por
$(x - 3 + 2i) \cdot (x - 3 - 2i) = (x - 3)^2 - (2i)^2 = x^2 - 6x + 13$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - 5x + 39 & x^2 - 6x + 13 \\ \cline{2-2} -x^3 + 6x^2 - 13x & x + 3 \\ \cline{1-1} \quad 3x^2 - 18x + 39 & \\ \quad -3x^2 + 18x - 39 & \\ \cline{1-1} \quad\quad 0 & \end{array}$$

A outra raiz vem de $x + 3 = 0$, ou seja, $x = -3 \Rightarrow S = \{3 - 2i, 3 + 2i, -3\}$

Exercícios

19 Em cada caso, determine o menor grau que pode ter uma equação de coeficientes reais que admite:

a) 3, -4 e $2 + i$ como raízes simples.

b) i como raiz dupla e $3 + 4i$ como raiz simples.

20 Resolva a equação $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 12x + 15 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $-2 + i$.

21 (FGV-SP) Dada a equação polinomial $x^3 - 5x^2 + 8x - m = 0$, em que m é um parâmetro real:

a) Mostre que tal equação tem ao menos uma raiz real.

b) Obtenha m, de modo que 3 seja raiz, e encontre as outras raízes.

22 (Vunesp-SP) Sabe-se que a unidade imaginária i é raiz do polinômio real $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + 2$. Nessas condições:

a) Determine o valor de a.

b) Encontre o conjunto solução da equação $p(x) = 0$.

23 (UF-MT) Considere o polinômio P(x) de coeficientes reais, não nulo e de menor grau, que satisfaça as seguintes condições:

- o coeficiente de seu termo de maior grau é -3;
- admite i (unidade imaginária) como raiz;
- é divisível por $(x - 1)$.

Calcule $P(-2)$.

24 Verifique que i é raiz da equação $ix^2 + 2x - i = 0$, mas $-i$, seu conjugado, não é raiz. Isso contradiz o teorema das raízes complexas?

25 (UFF-RJ) Dados os números reais a, b, c, d, e o polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabe-se que:

a) $2i$ é raiz de $p(x)$;

b) $p(x)$ é divisível por $x - 1$;

c) o produto das raízes de $p(x)$ é 16.

Determine $p(x)$.

7 ○ Relações de Girard

Algumas relações entre os coeficientes de uma equação e suas raízes, conhecidas como *relações de Girard*, constituem uma ferramenta importante na resolução de equações quando conhecemos alguma informação sobre suas raízes. Vejamos quais são essas relações nas equações de 2º e 3º graus e, a partir daí, generalizemos para uma equação de grau n.

Equação de 2º grau

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Sabemos, pelo teorema da decomposição, que:

$$ax^2 + bx + c \equiv a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

E daí, vem:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv (x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1r_2) \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2$$

Da identidade de polinômios segue que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Equação de 3º grau

Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes de equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a\,(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)\,x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)\,x - r_1r_2r_3$, donde:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Assim, se r, s e t são as raízes da equação $x^3 - 4x^2 - 5x + 8 = 0$, então:

- $r + s + t = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-4)}{1} = 4$
- $r \cdot s + r \cdot t + s \cdot t = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-5}{1} = -5$
- $r \cdot s \cdot t = \dfrac{-d}{a} = \dfrac{-8}{1} = -8$

Equação de grau n

Seja a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ suas raízes. Através de raciocínio análogo aos anteriores, vem:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \ldots + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & \text{(soma das } n \text{ raízes)} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \ldots + r_nr_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} & \text{(soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas)} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} & \left(\begin{array}{l}\text{soma dos produtos das raízes} \\ \text{tomadas três a três}\end{array}\right) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_1} & \text{(produto das } n \text{ raízes)} \end{cases}$$

Exemplo 9

Vamos resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, sabendo que uma das raízes é a média aritmética das outras duas.

As raízes procuradas são r_1, r_2, r_3. Escrevendo as relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = \dfrac{-(-6)}{1} = 6 & (1) \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 = \dfrac{11}{1} = 11 & (2) \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \dfrac{-(-6)}{1} = 6 & (3) \end{cases}$$

Do enunciado, escrevemos:

$$r_1 = \frac{r_2 + r_3}{2}, \text{ ou melhor, } r_2 + r_3 = 2r_1 \ (*)$$

Substituindo (*) em (1) vem:

$$r_1 + \underbrace{r_2 + r_3}_{2r_1} = 6 \Rightarrow 3r_1 = 6 \Rightarrow r_1 = 2$$

Para achar r_2 e r_3 basta dividir o polinômio dado por $x - 2$:

2	1	−6	11	−6
	1	−4	3	0

Daí:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3 \Rightarrow S = \{1, 2, 3\}$$

Observação

Ao determinarmos r_1, poderíamos ter substituído esse valor em (1) e (2), para encontrarmos as outras raízes da equação. Esse procedimento, contudo, pode-se tornar muito trabalhoso em alguns exercícios.

Exemplo 10

Duas das raízes da equação $x^4 - 11x^3 + 42x^2 - 14x + p = 0$, em que p é um coeficiente real, são 2 e $5 + 3i$. Vamos encontrar seu conjunto solução, bem como o valor de p.

- Como a equação tem coeficientes reais, uma outra raiz é $5 - 3i$.
- Usando a 1ª relação de Girard (soma das raízes), vem:

$$2 + 5 + 3i + 5 - 3i + r_4 = \frac{-b}{a} \Rightarrow 12 + r_4 = 11 \Rightarrow r_4 = -1$$

- Escrevendo a última relação (produto de todas as raízes), vem:

$$2 \cdot \underbrace{(5 + 3i) \cdot (5 - 3i)}_{25 - (3i)^2} \cdot (-1) = \frac{e}{a} \Rightarrow -68 = \frac{p}{1} \Rightarrow p = -68$$

e o conjunto solução é $S = \{2, 5 + 3i, 5 - 3i, -1\}$.

Exercícios

26 Sejam r e s as raízes, em $\mathbb{C}$, da equação $2x^2 + 6x + 1 = 0$. Determine:

a) $r + s$

b) $r \cdot s$

c) $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$

d) $r^2 + s^2$

27 Sendo r, s e t as raízes, em $\mathbb{C}$, da equação $x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0$, calcule:

a) $r + s + t$ b) $r \cdot s + r \cdot t + s \cdot t$ c) $r \cdot s \cdot t$ d) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$

28 (Vunesp-SP) Dada a equação $x^2 + x - \sqrt{2} = 0$, calcule a soma dos inversos de suas raízes.

29 (UF-CE) Se a, b e c são as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$, encontre o valor numérico de $\left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}\right)^2$.

30 Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, sabendo que o produto de duas de suas raízes vale -6.

31 Resolva a equação $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$, sabendo que suas raízes são números naturais ímpares e consecutivos.

32 (Unicamp-SP) A soma de dois números positivos é igual ao triplo da diferença entre esses mesmos dois números. Essa diferença, por sua vez, é igual ao dobro do quociente do maior pelo menor.

a) Encontre esses dois números.
b) Escreva uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$ cujas raízes são aqueles dois números.

33 Resolva a equação $-2x^3 + 11x^2 - 44x - 25 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $3 + 4i$.

34 (FGV-SP) Considere a seguinte equação polinomial:

$$x^3 - 3x^2 - kx + 12 = 0$$

a) Determine k de modo que haja duas raízes opostas.
b) Determine k de modo que 1 seja raiz da equação; nesse caso, determine também as outras raízes.

35 (UFU-MG) Sejam r_1 e r_2 as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - 6ax + a^2$. Se $r_1^2 + r_2^2 = 17$, determine os possíveis valores para a.

36 (PUC-RJ) A diferença entre as raízes do polinômio $x^2 + ax + (a - 1)$ é 1. Quanto vale a?

37 (UF-PA) Encontre as raízes da equação $x^3 - 15x^2 + 74x - 120 = 0$, sabendo que elas estão em progressão aritmética.

38 (Unifor-CE, adaptado) A equação $x^3 - 15x^2 + (7k + 4)x - t = 0$, de variável x, tem três raízes que são números inteiros consecutivos. Determine k e t.

39 As raízes da equação $x^3 - 18x^2 + 92x + t = 0$ estão em progressão aritmética. Determine o valor de t e o conjunto solução dessa equação.

40 (UF-MA) Sabendo que $P(x)$ é um polinômio de terceiro grau divisível por $x - 3$, e que $P(x) = P(x - 3) - x^2 - 3$, determine o produto das raízes de $P(x)$.

41 As raízes da equação $2x^3 + qx^2 + 7x + k = 0$ são positivas e estão em progressão geométrica de razão igual a 2.

a) Qual é o valor de $q + k$? b) Qual é o conjunto solução dessa equação?

42 O polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ é tal que $p(0) = 1$, e todos os seus coeficientes são reais. Sabendo que i é uma de suas raízes e que 1 é raiz dupla, determine os valores de a, b, c, d.

43 Resolva a equação $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, sabendo que ela admite uma raiz de multiplicidade 2.

8 ○ Raízes racionais

Teorema

Seja a equação polinomial de coeficientes *inteiros*: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ (p e q primos entre si) é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração

Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação, temos:

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando ambos os membros por q^n, vem:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0 \ (*)$$

Isolando $a_n p^n$ e colocando q em evidência em (*), vem:

$$a_n p^n = -q\underbrace{(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})}_{\alpha} \quad (I)$$

Isolando $a_0 q^n$ e colocando p em evidência em (*), vem:

$$a_0 q^n = -p\underbrace{(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2} \cdot q + \ldots + a_1 q^{n-1})}_{\beta} \quad (II)$$

Como todos os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, p e q são inteiros, segue que α e β são inteiros. Em (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} a_n p^n = -q \cdot \alpha \Rightarrow \dfrac{a_n p^n}{q} = -\alpha \in \mathbb{Z} \ (I') \\ \quad e \\ a_0 q^n = -p \cdot \beta \Rightarrow \dfrac{a_0 q^n}{p} = -\beta \in \mathbb{Z} \ (II') \end{cases}$$

As igualdades acima obtidas mostram que:

(I') $a_n p^n$ é divisível por q. Como p^n e q são primos entre si, a_n é divisível por q, isto é, q é divisor de a_n.

(II') $a_0 q^n$ é divisível por p. Como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p, isto é, p é divisor de a_0.

Observação

O teorema acima *não* nos garante a existência de raízes racionais de uma equação de coeficientes inteiros. Apenas, em caso de existirem raízes racionais, ele nos exibe todas as possibilidades para tais raízes.

Exemplo 11

Vamos resolver a equação $3x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = 0$.

Como não dispomos de nenhuma informação sobre suas raízes, vamos pesquisar as possíveis raízes racionais.

Os números racionais candidatos a raiz têm a forma $\frac{p}{q}$, sendo p um divisor de -2 e q um divisor de 3, isto é, $p \in \{\pm 1, \pm 2\}$ e $q \in \{\pm 1, \pm 3\}$.

Assim, se a equação tiver raízes racionais, essas raízes estarão no conjunto:

$$\left\{+1, -1, \frac{+1}{3}, \frac{-1}{3}, +2, -2, \frac{+2}{3}, \frac{-2}{3}\right\}$$

Seja f(x) o polinômio dado e façamos as verificações:

$f(1) = 10$ $\quad$ $f(-1) = -4$ $\quad$ $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{9}$ $\quad$ $f(2) = 50$ $\quad$ $f(-2) = -14$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{34}{9}$ $\quad$ $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{3}$

Assim, a única raiz racional dessa equação é $\frac{1}{3}$.

Para encontrar as outras raízes, basta dividir f(x) por $x - \frac{1}{3}$:

$\frac{1}{3}$	3	5	4	−2
	3	6	6	0

$\Rightarrow 3x^2 + 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm i$

$$S = \left\{\frac{1}{3}, -1 + i, -1 - i\right\}$$

Exercícios

44 Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$.

45 Resolva a equação $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0$.

46 Prove que a equação $2x^3 - x + 3 = 0$ apresenta, pelo menos, uma raiz real irracional.

47 Resolva o problema proposto na introdução deste capítulo.

48 (UF-RJ) Determine todas as raízes de $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$.

49 (Fuvest-SP)

a) Quais são as raízes inteiras do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 4$?

b) Decomponha o polinômio p(x) em um produto de dois polinômios, um de grau 1 e outro de grau 2.

c) Resolva a inequação $p(x) < 4(x - 2)$.

Testes de vestibulares

1 (Unifesp-SP) Os números complexos 1 + i e 1 − 2i são raízes de um polinômio com coeficientes reais, de grau 8. O número de raízes reais deste polinômio, no máximo, é:

a) 2 c) 4 e) 6
b) 3 d) 5

2 (UCDB-MT) Se 1, x_1 e x_2 são as raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2x + b$, então o produto $x_1 \cdot x_2$ é igual a:

a) $\frac{3}{2}$ c) −1 e) −3
b) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$

3 (UF-SE) Seja a equação $x^3 - x^2 + mx + n = 0$ com m e n reais. Se o número complexo 1 − i é uma das raízes dessa equação, então:

a) m − n = 2 d) m + n = 2
b) m + n = 0 e) mn = 1
c) m − n = 0

4 (UF-RS) O polinômio $p(x) = ax^4 + 3x^3 - 4x^2 + dx - 2$, com $a \neq 0$, admite 1 e −1 como raízes. Então:

a) a = 6 e d = −3 d) a = 9 e d = −3
b) a = 3 e d = −3 e) a = −3 e d = 6
c) a = −3 e d = 3

5 (U. F. São Carlos-SP) Sabendo-se que a soma de duas das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ é igual a 5, pode-se afirmar a respeito das raízes que:

a) são todas iguais e não nulas
b) somente uma raiz é nula
c) as raízes constituem uma progressão geométrica
d) as raízes constituem uma progressão aritmética
e) nenhuma raiz é real

6 (U. F. Ouro Preto-MG) Considere a equação $7x(x - 1)^2 \cdot (2x - 2) = 0$. Então, podemos afirmar que:

a) 1 é raiz tripla. d) −1 é raiz dupla.
b) 1 é raiz dupla. e) −1 é raiz tripla.
c) 1 é raiz simples.

7 (Unificado-RJ) Se a, b e c são as raízes da equação $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$, então o valor da expressão $a^2bc + ab^2c + abc^2$ é igual a:

a) 400 c) −100 e) −400
b) 200 d) −200

8 (UF-MG) A soma de todas as raízes de $f(x) = (2x^2 + 4x - 30)(3x - 1)$ é:

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $-\frac{3}{5}$ d) $-\frac{5}{3}$

9 (PUC-RS) Se $m, n \in \mathbb{R}$ e uma das raízes da equação $2 \cdot x^2 + m \cdot x + n = 0$ é $3 - 2 \cdot i$, o valor de $m + n$ é:

a) 0 b) 1 c) 8 d) 14 e) 24

10 (Ucsal-BA) Um polinômio f, de grau 3, admite 2 e 3 como raízes. Se na divisão de f por $x - 5$ obtém-se resto 60, então f pode ser igual a:

a) $2x^3 - 10x^2 + 12x$
b) $3x^3 - 57x + 90$
c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$
d) $x^3 + 5x^2 + 6x + 5$
e) $x^3 - 19x + 30$

11 (UA-AM) Se $2i$ é uma raiz da equação $x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12 = 0$, então o produto das raízes reais dessa equação é igual a:

a) 2 b) 3 c) −3 d) −2 e) 8

12 (Fesp/UPE-PE) Se $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ é uma função polinomial, cujas raízes são 2, 3, 5 e 6, podemos afirmar que $f(8)$ é igual a:

a) 120 b) 0 c) 360 d) 240 e) 1

13 (Unifor-CE) Considerando que a equação $3x^3 + x^2 - 6x - 2 = 0$ admite uma raiz racional negativa, é correto afirmar que suas demais raízes são números:

a) irracionais
b) não reais
c) inteiros positivos
d) inteiros negativos
e) racionais e não inteiros

14 (Fuvest-SP) O polinômio $x^4 + x^2 - 2x + 6$ admite $1 + i$ como raiz, sendo $i^2 = -1$. O número de raízes reais deste polinômio é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

15 (Mackenzie-SP) Se a, b e c são as raízes da equação $x^3 - 13x^2 - 5x + 1 = 0$, então o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & a & -c \\ 0 & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vale:

a) −5 b) 5 c) −4 d) 4 e) 0

16 (Fuvest-SP) Se a equação $8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$ tem raízes reais a e $-a$, então o valor de k é:

a) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{9}{8}$ e) −4
b) 2 d) −2

17 (PUC-SP) Um paralelepípedo retângulo tem suas dimensões dadas, em centímetros, pelas expressões $x - 4$, $x - 3$ e $\frac{2x + 3}{3}$, nas quais x é um número racional maior do que 4. Se o volume do paralelepípedo é 30 cm^3, então sua área total, em centímetros quadrados, é:

a) 62 b) 54 c) 48 d) 31 e) 27

18 (UFF-RJ) Três raízes de um polinômio $p(x)$ do 4º grau com coeficientes reais estão escritas sob a forma i^{576}, i^{42} e i^{297}. O polinômio $p(x)$ pode ser representado por:

a) $x^4 + 1$ d) $x^4 - x^2 + 1$
b) $x^4 - 1$ e) $x^4 - x^2 - 1$
c) $x^4 + x^2 + 1$

19 (Puccamp-SP) Sabe-se que o polinômio $f = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16$ admite a raiz -2 com multiplicidade 2. As demais raízes desse polinômio são números:

a) inteiros e opostos
b) racionais não inteiros
c) irracionais e positivos
d) irracionais e opostos
e) não reais

20 (F. M. Triângulo Mineiro-MG) Sabe-se que $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$ é divisível por $(x + 1)^2$. Então, a soma das raízes do polinômio $Q(x) = (2x - 3)^5 - 2(2x - 3)^4 - 3(2x - 3)^3 + 4(2x - 3)^2 + 4(2x - 3)$ é igual a:

a) 5,5 c) 6,5 e) 8,5
b) 6,0 d) 7,0

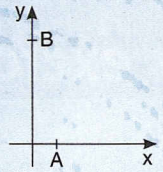
21 (UF-AL) Sabe-se que o polinômio $f = 3x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 8x + 4$ é divisível por $g = x^2 - x - 2$. As duas menores raízes reais de f têm soma igual a:

a) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{7}{3}$ e) −4
b) $-\frac{5}{3}$ d) −3

22 (Vunesp-SP) Seja a uma raiz da equação $x^2 + 2x + c^2 = 0$, em que c é um número real positivo. Se o discriminante dessa equação é menor que zero, então $|a|$ é igual a:

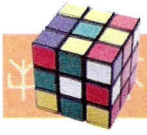
a) c c) c^2 e) $\frac{c}{2}$
b) $2c$ d) $2c^2$

23 (UF-MG) Observe esta figura:



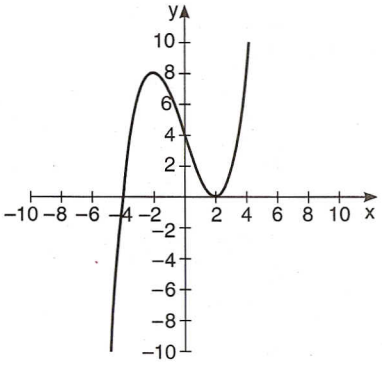
Nela estão representados o ponto *A*, cuja abscissa é 1, e o ponto *B*, cuja ordenada é 5. Esses dois pontos pertencem ao gráfico da função $f(x) = (x + 1)(x^3 + ax + b)$, em que *a* e *b* são números reais. Assim sendo, o valor de f(4) é:

a) 65 b) 115 c) 170 d) 225



Desafios

1 (PUC-RS, adaptado) Na figura, tem-se o gráfico de $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, em que todos os coeficientes são reais.



a) Explique por que esse polinômio apresenta uma raiz dupla.

b) Qual das raízes é dupla? Explique.

c) Determine *a*, *b*, *c*, *d*.

2 (Fuvest-SP) P(x) é um polinômio cujas raízes formam uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 2. O coeficiente do termo de mais alto grau de P(x) é 1 e o termo independente é igual a 2^{21}. Qual é o grau desse polinômio?

3 (Unicamp-SP)

a) Qual é o valor de λ na equação $z^3 - 5z^2 + 8z - \lambda = 0$ de modo que $z = 3$ seja uma raiz dessa equação?

b) Para esse valor de λ, ache as três raízes z_1, z_2, z_3 dessa equação.

c) Ache o volume do sólido obtido quando a região triangular cujos vértices são os pontos z_1, z_2, z_3 gira em torno da reta de equação $x = 1$.

Respostas dos exercícios e testes

38 NÚMEROS COMPLEXOS

EXERCÍCIOS

1 a) $Re(z_1) = 2$ e $Im(z_1) = 7$
b) $Re(z_2) = -4$ e $Im(z_2) = 3$
c) $Re(z_3) = 0$ e $Im(z_3) = -10$
d) $Re(z_4) = \frac{1}{3}$ e $Im(z_4) = \frac{5}{3}$
e) $Re(z_5) = 5$ e $Im(z_5) = 0$
f) $Re(z_6) = 0$ e $Im(z_6) = 0$

2 a) $m = 4$ b) $m = 3$ c) não existe $m \in \mathbb{R}$

3 a) $z = (4 - x) + i(2x - 3)$ c) $x = \frac{3}{2}$
b) $x < 4$

4 a) $S = \{-2i, 2i\}$
b) $S = \{2 + 5i, 2 - 5i\}$
c) $S = \left\{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$
d) $S = \{3 + 4i, 3 - 4i\}$
e) $S = \left\{\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2}, i, -i\right\}$
f) $S = \{0, 6 + 2i, 6 - 2i\}$

5 $x = -\frac{1}{2}$ e $y = 1$ **6** $x = \frac{1}{5}$ e $y = \frac{4}{5}$

7 a) $m = 7$ e $n = \pm 3$
b) $m = 2$ e $n = \pm 5$
c) $m = 2$ e $n = \pm 2\sqrt{2}$

8 a) $6 - i$
b) $5 + 2i$
c) $3 - i$
d) $-3 - 3i$

9 a) $10 - 7i$
b) $-4 + 2i$
c) $-7 + 7i$

10 $x = -2$ e $y = 2$

11 a) $x = \pm 2$ e $y = 1$
b) $x = \pm 4$ e $y = \frac{2}{5}$

12 $a = \frac{9}{2}$, $b = \frac{11}{2}$ e $c = \frac{-7}{2}$

13 a) $-5 + 9i$
b) $13 + i$
c) $5 + 2i$
d) $3 + 3i$
e) 13
f) $7 + 24i$

14 a) $8 - 4i$ b) -4 c) 32 d) 1

15 a) $x - y + i(x + y)$ b) $x = 1$ e $y = -1$

16 a) $\left(16, \frac{7}{2}\right)$ b) $(-21, -20)$ **17** i

18 a) $x = 2$ b) $x = -8$ c) $x = 2$

19 $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$

20 $z = 0$ ou $z = i$

21 $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

22 a) $1 - 3i$
b) $-2 - 7i$
c) $\frac{11}{2}i$
d) 0
e) -5

23 a) $1 - 2i$ b) $4 + 6i$ c) $17 + 3i$ d) $4i$

24 a) $x = x + 0i$, $\overline{x} = x - 0i \Rightarrow x = \overline{x}$
b) $xz_1 = ax + bxi \Rightarrow \overline{xz_1} = ax - bxi = x(a - bi) = x \cdot \overline{z}_1$
c) $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} =$
$= (a + c) - i(b + d) = (a - bi) + (c - di) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$
d) $\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (a - bi) \cdot (c - di) = ac - i(ad + bc) - bd =$
$= (ac - bd) - i(ad + bc) = \overline{z_1 \cdot z_2}$

25 $z_3 = (1, -2) = 1 - 2i$ **26** 0; i

27 a) $\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $-2 + 4i$

28 a) $-\frac{7}{13} - \frac{22}{13}i$
b) $1 - i$
c) $-\frac{33}{29} - \frac{39}{29}i$
d) $\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$
e) $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

29 a) $-\frac{5}{169} - \frac{12}{169}i$ b) $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

30 a) $x = \frac{2}{3}$
b) $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$
c) $x < 5$

31 $x = -\frac{4}{3}$ **32** $a = 2$; $z = 2i$

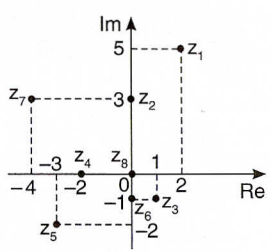
33 $z = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ **34** 2

35 a) i
b) 1
c) -1
d) $-i$
e) i
f) $-512i$

36 a) 0 b) $-1 + i$ c) $-i$

37 $-1 - i$ **38** 1 **39** $X = \{0, -2, 2\}$

40



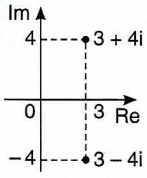
41 $11 + 17i$ **42** zero

43 a) V b) V c) F; 2º quadrante

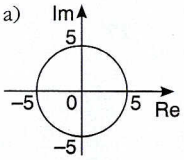
44 18 **45** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

46 a) $\sqrt{2}$
b) 4
c) 3
d) $\sqrt{13}$
e) 5
f) 1
g) 11
h) $\sqrt{5}$

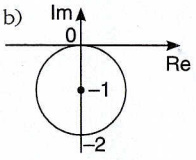
47 $x = \pm 2$



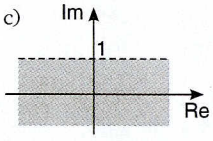
48 a)



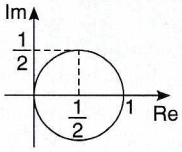
b)



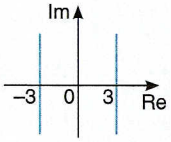
c)



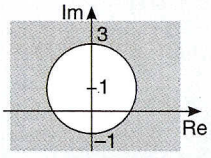
d)



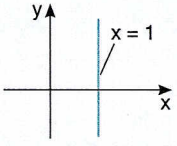
e)



f)

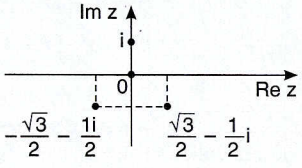


49 reta vertical passando pelos pontos de abscissa 1



50 a) $z = 0$, $z = i$, $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

b)



51 a) $30^\circ \left(\text{ou } \frac{\pi}{6}\right)$

b) $315^\circ \left(\text{ou } \frac{7\pi}{4}\right)$

c) $90^\circ \left(\text{ou } \frac{\pi}{2}\right)$

d) $135^\circ \left(\text{ou } \frac{3\pi}{4}\right)$

e) 0° (ou 0 rad)

f) $270^\circ \left(\text{ou } \frac{3\pi}{2}\right)$

g) $240^\circ \left(\text{ou } \frac{4\pi}{3}\right)$

h) 180° (ou π)

52 20° e 255°

53 a) $2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$

b) $\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ$

c) $2(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$

d) $10(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$

e) $4(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ)$

f) $\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

54 $-3 + i\sqrt{3}$

55 a) $4\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$

b) $\frac{1}{2}(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$

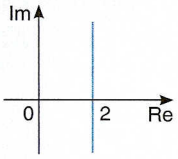
c) $\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ$

d) $\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ$

e) $1024(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$

56 a)



Reta vertical passando por $x = 2$

b) $4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$

57 $(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + i(-\sqrt{2} - \sqrt{6})$

58 a) $z_2 = 4(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$
$z_4 = 4(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)$

b) $\overline{z}_2 = 2\sqrt{2} - i\,2\sqrt{2}$
$\overline{z}_4 = -2\sqrt{2} - i\,2\sqrt{2}$

59 a) $-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

b) -1

c) $2\sqrt{3} + 2i$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$

e) $10i$

f) $-\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{6}i$

60 a) $8(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$

b) $4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$

c) $8(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$

d) $2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$

e) $\frac{1}{2}(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$

61 $z_1 = 4(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$
$z_2 = 20(\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ)$

62 a) -16 b) $64i$

63 $16\sqrt{2}(-1 + i)$

64 a) -2^{15}

b) $-16\sqrt{3} - 16i$

c) $8i$

d) 5^{-12}

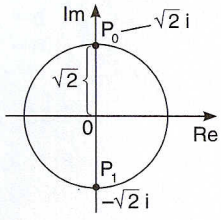
65 12

66 4

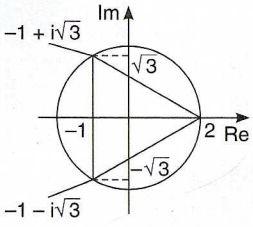
67 a) $\pm(3\sqrt{2})^n$

b) 2

68 $\sqrt{2}\,i$ e $-\sqrt{2}\,i$
P_0 e P_1 são extremidades de um diâmetro de uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$.



69 2, $-1 + i\sqrt{3}$ e $-1 - i\sqrt{3}$
Os afixos são vértices de um triângulo eqüilátero inscrito em uma circunferência de centro (0, 0) e raio $\sqrt[3]{8} = 2$.



70 $S = \left\{-1, 2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$

71 a) 2; 30°
b) $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = -\sqrt{3} - i$; $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$

72 $z_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}$; $z_1 = \cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{8}$;
$z_3 = \cos\frac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{8}$; $z_6 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{8}$

73 a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (0, 1), $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, (0, –1) e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
b) $z^6 - 1 = 0$

TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**6**	b	**11**	b	**16**	e
2	c	**7**	d	**12**	b	**17**	e
3	b	**8**	b	**13**	c	**18**	d
4	b	**9**	d	**14**	d	**19**	c
5	a	**10**	a	**15**	c	**20**	d

39 POLINÔMIOS

EXERCÍCIOS

1 $m \neq 0$ **2** $k = -3$ ou $k = 3$

3 O grau de p(x) é 6 se $m \neq \frac{1}{2}$;
o grau de p(x) é 4 se $m = \frac{1}{2}$.

4 a) $k = -6$ b) $k = 6$ c) $k \neq -6$ e $k \neq 6$

5 Sim; se $a = -3$ e $b = 3$.

6 a) –23 b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) –2 e) 5 – i

7 2 + i e 3 **8** 4

9 $a = -5$ e $b = 15$ **10** $p(x) = x + 2$

11 $p(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$ **12** $m = n = p = 0$

13 $a = -2$, $b = 2$ e $c = 0$

14 a) $a = 2$ e $b = 2$ d) $a = 7$ e $b = 2$
b) $a = 3$ e $b = -2$ e) $a = -3$ e $b = 2$
c) $a = -7$ e $b = 10$

15 28 **16** $a = 27$, $b = 9$, $c = -15$, $d = 3$

17 a) $-4x^2 + 8x + 2$
b) $-9x^2 + 9x + 3$
c) $-8x^3 + 21x^2 - 3x - 3$
d) $-40x^5 + 104x^4 - 48x^3 - 15x^2 + 9x$

18 a) $a = 2$, $b = 6$ e $c = 2$ c) $a = 3$
b) $a = 1$, $b = 3$ e $c = 3$

19 6 **20** 10 **21** 8

22 a) $q(x) = -2x + 1$; $r = -7$
b) $q(x) = x + 2$; $r(x) = x + 1$
c) $q(x) = x^2 + x + 1$; $r(x) = 2x + 3$
d) $q(x) = 2x^2 + 2x + 3$; $r(x) = 7x^2$
e) $q(x) = x^2 - 4x + 2$; $r = -1$

23 a) $q(x) = x + 2i$; $r = -5$
b) $q(x) = 2x^2 + 3x + 1$; $r = 2 + 3i$

24 a) –6 b) –2

25 a) V; pois $m = k = 1$ d) F; $-3x - 2$
b) F; grau é 5 e) V
c) V; $\Delta = 5$ f) V

26 32 **27** 10 **28** 4 **29** x – 2

30 $a = 3$, $b = -15$, $c = 60$

31 a) 1 c) –88 e) 0
b) –8 d) 2i + 1 f) –2

32 a) –76 b) –5 c) $\frac{34}{3}$

33 –35 **34** $p(x) = x^2 - 1$

35 a) 3 b) 1

36 a) $p(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
b) $x^3 + 9x^2 - 34x + 24$

37 $r(x) = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$ **38** $r(x) = 2x^2 + \frac{15}{2}x + 2$

39 a) V b) F; $x < -2$ ou $x > 3$ c) V

40 60

41 a) $q(x) = 2x^2 - 9x + 37$; $r = -151$
b) $q(x) = -x^3 + 4x^2 + 4x + 2$; $r = 3$
c) $q(x) = 12x^2 - 2x + 4$; $r = 4$
d) $q(x) = x + 3i$; $r = -2$
e) $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $r = 0$

42 $-\frac{5}{2}$; $q(x) = x^2 - 3x + \frac{7}{2}$

43 53 **44** a) $p = -1$ e $q = -1$
b) $-x^2 - 2ix + 6$

45 a) $a = 6$ e $b = -4$ b) $-3x^2 - x - 1$

46 $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 8$

47 $q(x) = x^2 - x + 3$ e $r = 2$; o resto é o mesmo, e o quociente ficou multiplicado por 2.

48 $q(x) = 3x - 1$ e $r = 10$; o resto é o mesmo, e o quociente ficou multiplicado por 3.

49 c) faça $g(x) = (x - 0) \cdot (x - 5)$ e aplique sucessivamente Briot-Ruffini.

50 $m = 2$ e $p = 1$ **51** –5 **52** 2

TESTES DE VESTIBULARES

1	b	**6**	d	**11**	c	**16**	a) F c) V
2	e	**7**	b	**12**	a		b) F d) V
3	a	**8**	d	**13**	a	**17**	a
4	b	**9**	a	**14**	c	**18**	e
5	d	**10**	d	**15**	a	**19**	b

40 EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

EXERCÍCIOS

1 a) $S = \{4 - 3i, 4 + 3i\}$; $(x - 4 - 3i) \cdot (x - 4 + 3i)$
b) $S = \{0, 1, -2\}$; $x \cdot (x-1) \cdot (x+2)$

2 a) $x^2 + 9 = 0$, por exemplo
b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$, por exemplo
c) $x^3 - 21x + 20 = 0$, por exemplo
d) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, por exemplo

3 a) 81 b) $7 + 2i$ e $7 - 2i$

4 a) 10 b) 2; $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$

5 $S = \{1, 2, -1, -3\}$ **6** -1 e 2

7 duas; 0 e 1 **8** 4

9 $\frac{5}{2}$

10 a) 4
b) $2x - 3y + 6 = 0$
c) $p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 4$

11 A condição implica: $x^3 + bx = 0 \Rightarrow x(x^2 + b) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ ou $x^2 + b = 0$. Como $b > 0$, a última equação só admite raízes complexas não reais e a única raiz é $x = 0$.

12

Raízes	Multiplicidade
2	4
0	1
−5	1

13 a) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$, por exemplo
b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$, por exemplo
c) $x^3 + 9x^2 + 9x + 27 = 0$, por exemplo

14 a) -1 b) $\frac{1}{3}$

15 $S = \{2, -i, i\}$ **16** $S = \{5, -10\}$

17 a) $n = -m - 2$
b) $m = -1$
c) $m < -1$ e $m \neq -5$

18 a) $f(x) = x^4 - 2x^3$
b) $0 < x < 1$

19 a) 4
b) 6

20 $S = \{-2 + i, -2 - i, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$

21 a) Trata-se de uma equação de coeficientes reais com grau ímpar.
b) $m = 6$; $1 + i$ e $1 - i$

22 a) -3 b) $S = \{i, -i, 1, 2\}$ **23** 45

24 Não, o teorema só se aplica a equações de coeficientes reais.

25 $p(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 20x + 16$

26 a) -3 b) $\frac{1}{2}$ c) -6 d) 8

27 a) 2 b) 1 c) -4 d) $-\frac{1}{4}$

28 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **29** 25

30 $S = \{1, -2, 3\}$ **31** $S = \{3, 5, 7\}$

32 a) 4 e 8 b) $x^2 - 12x + 32 = 0$

33 $S = \left\{3 + 4i, \ 3 - 4i, \ -\frac{1}{2}\right\}$

34 a) $k = 4$ b) 10; $1 + \sqrt{13}$ e $1 - \sqrt{13}$

35 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ **36** 1 ou 3

37 $S = \{4, 5, 6\}$ **38** $k = 10$ e $t = 120$

39 $t = -120$; $S = \{2, 6, 10\}$ **40** 108

41 $a = -9$ b) $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

42 $a = -2$, $b = 2$, $c = -2$, $d = 1$

43 $S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ **44** $S = \{-1, 3, 5\}$

45 $S = \left\{1, 2, 3, -\frac{3}{2}\right\}$

47 5

48 $-1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

49 a) A única raiz inteira é 2.
b) $(x - 2) \cdot (x^2 + x + 2)$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**7**	d	**13**	a	**19**	e
2	d	**8**	d	**14**	a	**20**	e
3	d	**9**	d	**15**	a	**21**	d
4	a	**10**	e	**16**	e	**22**	a
5	c	**11**	c	**17**	a	**23**	d
6	a	**12**	c	**18**	b		